

ОПТИМАЛЬНЫЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ

Аннотация. Рассматривается управляемая система дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерры, описывающая процесс развития двух взаимосвязанных популяций хищников и жертв. Система содержит две переменные управления, которые выбираются так, чтобы время перехода к стационарной точке было минимальным. Построены функции управления и соответствующие траектории движения в фазовом пространстве и обоснована их оптимальность.

Ключевые слова: принцип максимума, стационарная точка, минимальное время.

1. УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ

Альфред Джеймс Лотка и Вито Вольтерра предложили модель взаимодействия двух популяций хищников и жертв. Модель представляет собой систему двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma)x_2,\end{aligned}\quad (1)$$

где величины $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ означают соответственно количества жертв и хищников в момент времени t , а положительные числа α , β , δ , γ являются параметрами модели. Считаем, что в некоторый момент времени t_0 выполняются неравенства $x_1(t_0) > 0$, $x_2(t_0) > 0$. При этих условиях точка $(x_1(t), x_2(t))$, где функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе (1), движется по замкнутой кривой против часовой стрелки вокруг стационарной точки $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ и выполняются неравенства $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $-\infty < t < +\infty$. Подобные модели применяются в биологии, экономике, медицине.

Управляемые динамические системы типа хищник–жертва изучались во многих публикациях. В работе [1] найдены оптимальные управления для системы Лотки–Вольтерры с одной переменной управления, которая определяет степень сепарации популяций, и максимизируется стоимость экосистемы в заданный момент времени. В статьях [2–5] решаются задачи оптимального управления системами хищник–жертва с одной переменной управления. В работе [6] система Лотки–Вольтерры с двумя переменными управления используется для минимизации затрат сельскохозяйственного предприятия, которые связаны с различными способами влияния на экосистему, в частности с внесением пестицидов. В статье [7] исследуется система хищник–жертва с двумя переменными управления. Решается задача об оптимальном быстродействии, доказаны теоремы об управляемости и о существовании оптимального управления, однако при условиях, которые не выполняются для модели Лотки–Вольтерры.

В настоящей статье изучается управляемая система Лотки–Вольтерры

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2 + u_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma + u_2)x_2, \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq \bar{\bar{u}}_i, \quad i = 1, 2,\end{aligned}\quad (2)$$

где $u_i = u_i(t)$ — переменные управления; $\bar{u}_i, \bar{\bar{u}}_i$ — константы, $\bar{u}_i < 0 < \bar{\bar{u}}_i$, $i = 1, 2$. С помощью принципа максимума Понтрягина строится управление, которое за минимальное время переводит фазовую точку из заданного положения $x_1(t_0) > 0$, $x_2(t_0) > 0$ в стационарную точку $(\gamma / \delta, \alpha / \beta)$ системы (1). Рассматриваются только кусочно-непрерывные функции управления $u_i(t)$; в точках разрыва эти функции считаются непрерывными справа.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ТРАЕКТОРИЙ

Выполняя замену переменных $x_1 = \delta y_1 - \gamma$, $x_2 = \beta y_2 - \alpha$ в системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma), \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + u_2)(x_2 + \alpha), \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq \bar{\bar{u}}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

получаем систему (2), поэтому далее решается задача минимизации времени достижения начала координат для системы (3). Пусть на временном отрезке $[t_0, t_1]$ под воздействием некоторого управления фазовая точка переходит из заданного положения в начало координат. Требуется выбрать управление так, чтобы время перехода $t_1 - t_0$ было минимальным. Начальные значения должны удовлетворять условиям $x_1(t_0) > -\gamma$, $x_2(t_0) > -\alpha$. Считаем, что выполняются неравенства

$$\alpha > -\bar{u}_1, \quad \gamma > \bar{\bar{u}}_2. \quad (4)$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (3) при условии, что величины u_1 и u_2 принимают постоянные значения, получаем соотношение

$$e^{-x_1} (x_1 + \gamma)^{\gamma - u_2} e^{-x_2} (x_2 + \alpha)^{\alpha + u_1} = c, \quad (5)$$

где $c > 0$ — величина, не зависящая от времени. Из анализа этого соотношения следует, что фазовые кривые системы (3) замкнуты [8]. При условии постоянства величин управления точка $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе (3), движется по замкнутой кривой против часовой стрелки вокруг стационарной точки $(-u_2, u_1)$ и выполняются неравенства $x_1(t) > -\gamma$, $x_2(t) > -\alpha$. Пример фазовых траекторий системы (3) приведен на рис. 1.

Для построения оптимальных управлений используем принцип максимума Понтрягина [9]. Рассмотрим функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, H :

$$H = -\psi_1(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma) + \psi_2(x_1 + u_2)(x_2 + \alpha)$$

и систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= (x_2 - u_1)\psi_1 - (x_2 + \alpha)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= (x_1 + \gamma)\psi_1 - (x_1 + u_2)\psi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматриваются только нетривиальные решения $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ этой системы уравнений. В каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ оптимальный вектор управления $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$ должен удовлетворять условию

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \max_V H(\Psi(t), X(t), V), \quad (7)$$

где вектор $V = (v_1, v_2)$ принадлежит множеству допустимых управлений, т.е. $\bar{u}_1 \leq v_1 \leq \bar{\bar{u}}_1$, $\bar{u}_2 \leq v_2 \leq \bar{\bar{u}}_2$. Из соотношения (7) вытекает

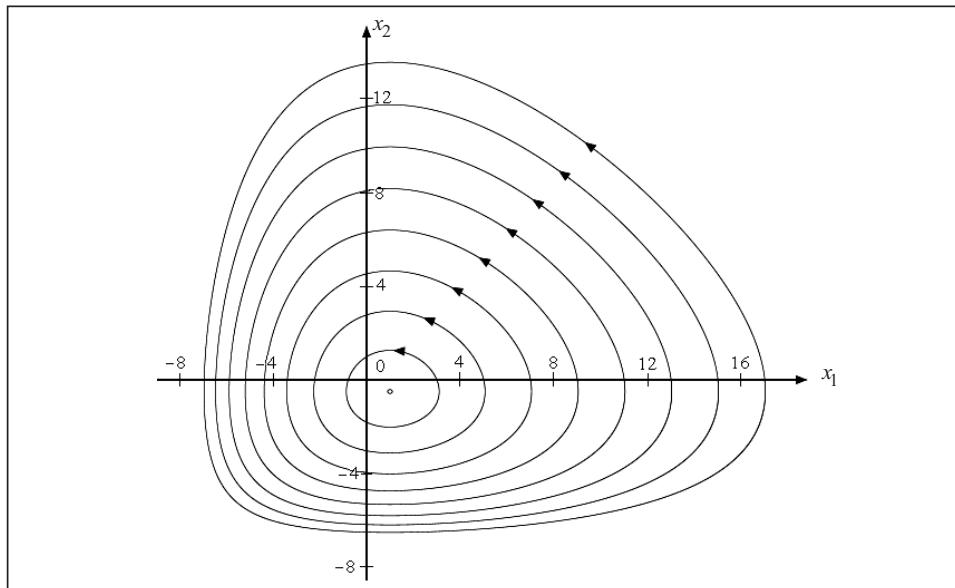


Рис. 1. Фазовые траектории системы (3) при условиях $\alpha = 8$, $\gamma = 10$, $u_1(t) \equiv -0.5$, $u_2(t) \equiv -1$

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \bar{u}_1, & \text{если } \psi_1(t) > 0, \\
 u_1(t) &= \underline{u}_1, & \text{если } \psi_1(t) < 0, \\
 u_2(t) &= \bar{u}_2, & \text{если } \psi_2(t) > 0, \\
 u_2(t) &= \underline{u}_2, & \text{если } \psi_2(t) < 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В моменты времени такие, что $\psi_1(t) = 0$ ($\psi_2(t) = 0$), величина $u_1(t)$ ($u_2(t)$) выбирается из условия непрерывности справа. Оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$ являются кусочно-постоянными функциями и могут принимать значения $\bar{u}_1, \underline{u}_1, \bar{u}_2, \underline{u}_2$.

Часть фазовой траектории, соответствующая промежутку времени, на котором величины u_1 и u_2 принимают постоянные значения, представляет собой часть кривой, определяемой (5), причем стационарная точка системы (3) равна $(-u_2, u_1)$. При условии оптимальности вектор $(-u_2, u_1)$ может принимать одно из четырех значений: $A = (-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$, $B = (-\bar{u}_2, \underline{u}_1)$, $C = (-\underline{u}_2, \bar{u}_1)$ или $D = (-\underline{u}_2, \underline{u}_1)$.

Решение $\Psi(t)$ системы (6) пересекает все четыре квадранта в направлении против часовой стрелки. Действительно, если в момент t точка $\Psi(t)$ находится на положительной полуоси абсцисс, то из (6) следует $\dot{\psi}_2 = (x_1 + \gamma)\psi_1 > 0$, т.е. $\Psi(t)$ переходит из четвертого квадранта в первый. Аналогично из первого квадранта точка $\Psi(t)$ переходит во второй, из второго в третий, из третьего в четвертый. Кроме того, из доказанной далее леммы 1 следует, что точка $\Psi(t)$ находится в каждом квадранте ограниченное время. Поэтому векторы A, B, C, D со временем следуют в таком порядке: $\dots, A, B, C, D, A, B, C, D, \dots$

На рис. 2 тонкими линиями изображены траектории движения, жирными линиями показано множество точек переключения управлений, штриховыми линиями изображены дуги, которые одновременно являются и траекториями, и линиями переключения. Фазовые точки движутся вдоль линий, имеющих вид спиралей, против часовой стрелки. Перед попаданием в начало координат фазовая точка движется вдоль одной из четырех штриховых дуг, которые обозначим $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Эти дуги удовлетворяют соотношению (5) и относятся соответственно к стационарным точкам A, B, C, D .

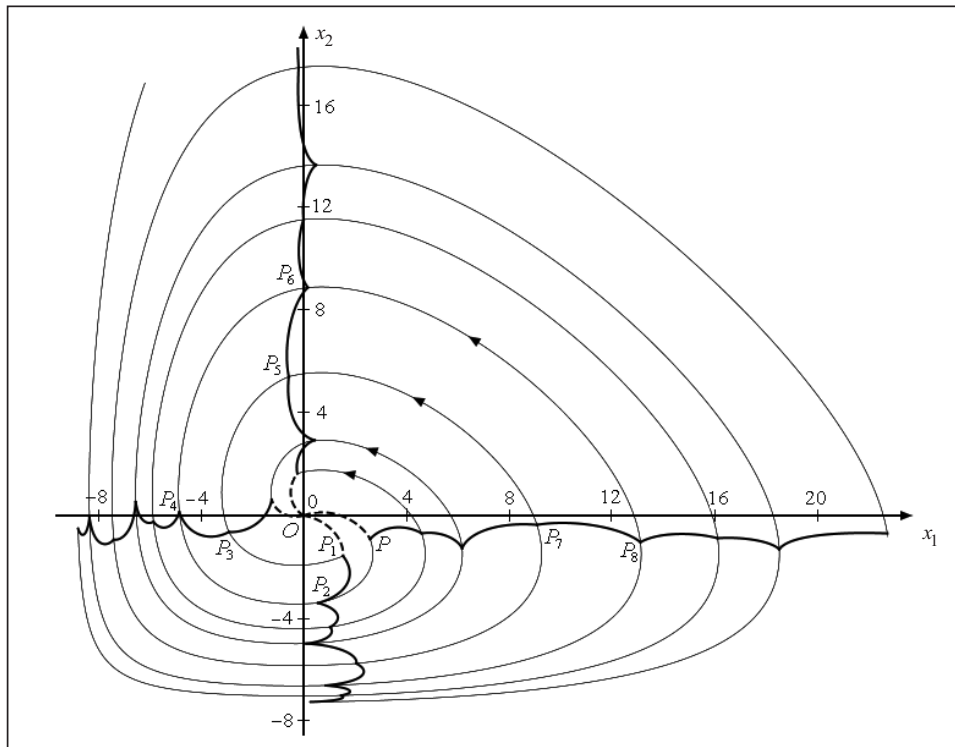


Рис. 2. Оптимальные траектории и линии переключения системы (3) при условиях $\alpha = 8, \gamma = 10, \bar{u}_1 = -1.5, \bar{u}_1 = 0.9, \bar{u}_2 = -0.7, \bar{u}_2 = 0.3$

Начальные точки дуг $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$ легко рассчитать численным методом. Например, для того чтобы найти начальную точку дуги \check{A} , следует решить систему дифференциальных уравнений (3), (6) с начальными значениями $t_1, X(t_1) = (0, 0), \Psi(t_1) = (1, 0)$. Пусть t'_1 — момент времени такой, что $t'_1 < t_1, \psi_1(t'_1) = 0$ и $\psi_1(t) > 0, t'_1 < t < t_1$. Точка $X(t'_1)$ является начальной точкой дуги \check{A} .

Предположим, что в момент времени t' фазовая точка X попадает на дугу \check{D} , т.е. на дугу OP (см. рис. 2). Это значит, что, начиная с момента t' , задействован вектор управления (\bar{u}_1, \bar{u}_2) , который соответствует стационарной точке D системы (3), а до момента t' использовался вектор управления (\bar{u}_1, \bar{u}_2) , который соответствует стационарной точке C . Решая систему дифференциальных уравнений (3), (6) с начальными значениями $t', X(t'), \Psi(t') = (-1, 0)$ численным методом, найдем момент времени t'' такой, что $t'' < t', \psi_1(t'') = 0$ и $\psi_1(t) < 0, t'' < t < t'$. В момент t'' вектор управления меняет свое значение с (\bar{u}_1, \bar{u}_2) на (\bar{u}_1, \bar{u}_2) . Если точка $X(t')$ пробегает дугу OP , то точка $X(t'')$ пробегает дугу P_1P_2 , которая является линией переключения управлений. Криволинейный четырехугольник OPP_2P_1 заполняют дуги, удовлетворяющие (5) при условии $(u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, вдоль которых движутся фазовые точки; к таким дугам принадлежат OP_1, PP_2 .

После построения криволинейного четырехугольника OPP_2P_1 аналогично строим криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_4P_3$, используя дугу переключения P_1P_2 как множество уже рассчитанных точек $X(t'')$ фазовых траекторий. Решая систему дифференциальных уравнений (3), (6) с начальными значениями $t'', X(t''), \Psi(t'') = (0, 1)$, находим момент времени t''' такой, что $t''' < t'', \psi_2(t''') = 0$ и $\psi_2(t) > 0, t''' < t < t''$. Если точка $X(t'')$ пробегает дугу P_1P_2 , то точка $X(t''')$ пробегает дугу P_3P_4 , которая является линией переключения.

Аналогично строим криволинейные четырехугольники $P_3P_4P_6P_5, P_5P_6P_8P_7, \dots$.
Описанное построение выполняем для дуг $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$.

На рис. 2 приведен пример синтеза оптимальных траекторий. Внутри каждого криволинейного четырехугольника вектор управления принимает постоянное значение. Такое же значение вектор управления принимает на его сторонах, за исключением стороны, через которую траектории покидают четырехугольник. Для того чтобы определить оптимальное управление в заданной фазовой точке, следует найти криволинейный четырехугольник, которому эта точка принадлежит. Если фазовая точка лежит на линии переключения, управление выбирается из условия непрерывности справа.

Лемма 1. Если на временном интервале (t', t'') точка $\Psi(t)$ принадлежит одному из квадрантов и выполняются условия (3), (4), (6), (8), то $t'' - t' < \infty$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что на интервале (t', t'') используется постоянный вектор управления (u_1, u_2) . Пусть $X(t) = (-u_2, u_1), t \in (t', t'')$. В этом случае система (6) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -(u_1 + \alpha)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= (-u_2 + \gamma)\psi_1.\end{aligned}$$

С учетом (4) легко доказать, что решение $\Psi(t)$ этой системы уравнений пересекает каждый квадрант за конечное время, поэтому утверждение леммы справедливо.

Предположим, $X(t) \neq (-u_2, u_1), t \in (t', t'')$. Докажем лемму для случая $(u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. Для трех дугих случаев: $(u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), (u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), (u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, доказательство аналогично. Из условия (8) следует, что на интервале (t', t'') точка $\Psi(t)$ принадлежит четвертому квадранту. Обозначим L замкнутую кривую, удовлетворяющую (5), которая содержит точки $X(t), t \in (t', t'')$, соответствует управлению (\bar{u}_1, \bar{u}_2) и стационарной точке $(-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$ системы (3). Пусть T — время, за которое фазовая точка один раз проходит кривую L под управлением (\bar{u}_1, \bar{u}_2) . Очевидно, что $T < \infty$.

Предположим, $t'' - t' > T$. В интервале (t', t'') существуют два момента времени τ_1, τ_2 таких, что $X(\tau_1) = (-\bar{u}_2 + \sigma_1, \bar{u}_1), X(\tau_2) = (-\bar{u}_2 - \sigma_2, \bar{u}_1)$, причем $\sigma_i > 0, X(\tau_i) \in L, i = 1, 2$. С учетом (4) получаем

$$\begin{aligned}H(t) &= -\psi_1(x_2 - \bar{u}_1)(x_1 + \gamma) + \psi_2(x_1 + \bar{u}_2)(x_2 + \alpha), \\ H(\tau_1) &= \psi_2\sigma_1(\bar{u}_1 + \alpha) < 0, H(\tau_2) = -\psi_2\sigma_2(\bar{u}_1 + \alpha) > 0,\end{aligned}$$

т.е. функция $H(t)$ на интервале (t', t'') как минимум один раз меняет знак. Но из [10] следует, что при условиях (3), (6), (8) величина $H(t)$ не зависит от времени. Из полученного противоречия следует, что сделанное предположение $t'' - t' > T$ неверно.

Лемма доказана.

3. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПОСТРОЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В разд. 2 построены управления и соответствующие траектории системы (3) с помощью принципа максимума, который является необходимым, а в линейном случае и достаточным условием оптимальности. Поскольку эта система нелинейна, следует доказать, что построенные управления и траектории оптимальны. Для доказательства оптимальности используем теорию регулярного синтеза [10].

Предположим, в результате выполнения численных расчетов, изложенных в разд. 2, для каждой дуги $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$ построено конечное ненулевое число замкнутых криволинейных четырехугольников, начиная с первого (при этом пропуски не допускаются). Считаем, что каждый такой четырехугольник образован четырьмя различными точками, являющимися вершинами, и четырьмя дугами (сторонами), которые имеют общие точки только в вершинах. Каждый такой четырехугольник полностью заполнен дугами, удовлетворяющими (5); все эти дуги соответствуют одной стационарной точке из множества A, B, C, D , которая не принадлежит данному четырехугольнику. Такие дуги попарно не пересекаются, через каждую точку четырехугольника проходит только одна дуга. Построенные четырехугольники не имеют общих внутренних точек. Множество построенных криволинейных четырехугольников назовем регулярным, если все они удовлетворяют указанным свойствам.

Обозначим \bar{G} замыкание объединения всех построенных криволинейных четырехугольников и пусть G — внутренность множества \bar{G} . Траектория, принадлежащая множеству G и переводящая фазовую точку из положения X в начало координат, и соответствующее этой траектории управление считаются оптимальными в G , если нет другой траектории, принадлежащей G , и соответствующего управления таких, что время перехода из X в начало координат меньше. Покажем, что построенные траектории оптимальны в G .

Рассмотрим один из построенных криволинейных четырехугольников. Пусть S_0 — его сторона, являющаяся линией переключения, после попадания на которую фазовые точки движутся внутри четырехугольника, а S_1 — противоположная сторона четырехугольника, также представляющая линию переключения, в момент попадания на которую фазовые точки покидают четырехугольник. Например, в четырехугольнике OPP_2P_1 (см. рис. 2) стороной S_0 является дуга P_1P_2 , а стороной S_1 — дуга OP .

Лемма 2. Если в построенном криволинейном четырехугольнике дуга S_1 представляет гладкую линию и каждая фазовая траектория, которая подходит к внутренней точке этой дуги из внутренней части четырехугольника, образует с ней ненулевой угол, то дуга S_0 также является гладкой линией.

Доказательство этой леммы (которое здесь не приводится) основано на использовании теоремы о дифференцируемости решения по начальным значениям [11] и теоремы о неявной функции [12]. (Определение гладкой линии дано в [12].) Поскольку дуги $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$ удовлетворяют (5), они являются гладкими линиями. Поэтому из леммы 2 по индукции следует, что все дуги переключения в построенных криволинейных четырехугольниках гладкие. Очевидно, что все другие стороны криволинейных четырехугольников также гладкие.

Пусть $A' = (a'_1, a'_2)$, $B' = (b'_1, b'_2)$, $C' = (c'_1, c'_2)$, $D' = (d'_1, d'_2)$ — точки, принадлежащие соответственно дугам $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$.

Лемма 3. Справедливы неравенства

$$a'_1 \leq -\bar{u}_2, \quad b'_2 \leq \bar{u}_1, \quad c'_1 \geq -\bar{u}_2, \quad d'_2 \geq \bar{u}_1. \quad (9)$$

Доказательство этой леммы (которое не приводится) основано на использовании постоянства функции $H(t)$.

С помощью леммы 3 легко доказать неотрицательность функции $H(t)$. Действительно, поскольку функция $H(t)$ постоянна, проверить ее неотрицательность можно в момент попадания фазовой точки на одну из дуг $\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D}$. Выполним проверку для дуги \check{A} (в трех других случаях проверка проводится аналогично). Пусть в момент времени t' фазовая точка попадает на указанную дугу. Это значит,

что, начиная с момента t' , используется вектор управления (\bar{u}_1, \bar{u}_2) , в момент t' имеем $\Psi(t') = (0, \sigma)$, где $\sigma < 0$. Используя первое неравенство (9), получаем

$$H(t') = \sigma(x_1(t') + \bar{u}_2)(x_2(t') + \alpha) \geq 0.$$

В работе [10] введено понятие регулярного синтеза и доказана теорема об оптимальности траекторий, для которых выполняются условия такого синтеза. Для задачи (3) условия регулярного синтеза в множестве G можно сформулировать следующим образом.

1. Стороны каждого построенного криволинейного четырехугольника являются гладкими линиями. Вектор управления внутри такого четырехугольника постоянный. На всех сторонах четырехугольника вектор управления также постоянный, за исключением вершин, в которых управление может изменяться в соответствии с условием его непрерывности справа.

2. Через каждую точку каждого криволинейного четырехугольника проходит единственная фазовая траектория системы (3). Если траектория проходит внутри четырехугольника, то она через конечное время покидает его, упираясь в линию переключения под ненулевым углом и подходя к ней с ненулевой скоростью. Если траектория на некотором временном промежутке совпадает со стороной четырехугольника, не являющейся линией переключения, то через конечное время она покидает четырехугольник, подходя к его вершине с ненулевой скоростью.

3. Каждая построенная траектория заканчивается в начале координат, пересекая криволинейные четырехугольники и линии переключения конечное число раз.

4. Все построенные траектории удовлетворяют принципу максимума.

5. Значение времени перехода от точки X до начала координат является непрерывной функцией точки X .

Из леммы 2 и процесса построения управлений следует, что первое условие регулярного синтеза выполнено. Справедливость второго условия (за исключением условия о ненулевых углах), а также третьего и пятого не вызывает сомнений. Очевидно, что скорость движения фазовой точки не может быть равной нулю. Для построенных управлений и траекторий выполняются равенства (3), (6), (8), а неотрицательность функции H доказана с помощью леммы 3, поэтому четвертое условие выполняется. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть множество построенных криволинейных четырехугольников регулярно и для каждой построенной траектории, проходящей через внутренние части четырехугольников, выполняется следующее условие: углы, под которыми она подходит изнутри четырехугольников к линиям переключения, ненулевые. Тогда все построенные траектории и соответствующие векторы управления оптимальны в G .

Доказанной теоремой можно воспользоваться при условии, что траектории упираются в линии переключения под ненулевыми углами. Теоретическая проверка этого условия затруднительна, поэтому предлагается использовать численный метод. Естественно, для каждой дуги переключения проверку того, что угол не равен нулю, можно выполнить лишь в конечном числе точек дуги. Так, на рис. 2 для каждой дуги переключения не менее чем в 1000 различных точках была проведена проверка, на основании которой сделан вывод об отсутствии нулевых углов. Следовательно, в данном случае теорема применима.

Таким образом, в настоящей статье с помощью принципа максимума Понтрягина построены оптимальные управления и траектории движения для управляемой системы Лотки–Вольтерры. Управления представляют собой кусочно-постоянные функции от времени, а фазовые точки движутся по кривым, имеющим вид спиралей. Поскольку система нелинейна, доказываемость оптимальности построенных управлений и траекторий; при этом используется теория регулярного синтеза В.Г. Болтянского.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Yosida S. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funct. Ekvacioj*. 1982. Vol. 25. P. 283–293.
2. Колмановский В.Б., Спивак А.К. Об управлении по быстрдействию системой «хищник–жертва». *Прикл. математика и механика*. 1990. Т. 54, № 3. С. 502–506.
3. Михайлова Е.В. Оптимальное управление в системе Лотки–Вольтерры «хищник–жертва». *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 3-й Всерос. науч. конф. (29–31 мая 2006 г.)*, 2006. С. 123–126.
4. Apreutesei N.C. An optimal control problem for a prey-predator system with a general functional response. *Applied Mathematics Letters*. 2009. Vol. 22, N 7. P. 1062–1065.
5. Sadiq A.N. The dynamics and optimal control of a prey-predator system. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 13. P. 5287–5298.
6. Vincent T.L. Pest management programs via optimal control theory. *Biometrics*. 1975. Vol. 31. P. 1–10.
7. Albrecht F., Gatzke H., Haddad A., Wax N. On the control of certain interacting populations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1976. Vol. 53, Iss. 3. P. 578–603.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 367 с.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1969. 384 с.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. Москва: Наука, 1969. 408 с.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1965. 331 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: Наука, 1969. 607 с.

Надійшла до редакції 22.09.2020

С.В. Пашко

ОПТИМАЛЬНІ ШВИДКОДІЇ В КЕРОВАНІЙ СИСТЕМІ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРИ

Анотація. Розглянуто керовану систему диференціальних рівнянь Лотки–Вольтерри, що описує процес розвитку двох взаємопов’язаних популяцій хижаків та жертв. Система містить дві змінні керування, які обирають так, щоб час переходу до стаціонарної точки був мінімальним. Побудовано функції керування і відповідні траєкторії руху в фазовому просторі та обґрунтовано їхню оптимальність.

Ключові слова: принцип максимуму, стаціонарна точка, мінімальний час.

S.V. Pashko

TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE LOTKA–VOLTERRA SYSTEM

Abstract. We consider a controlled system of Lotka–Volterra differential equations that describes the evolution of two interrelated populations of predators and prey. The system contains two control variables, which are chosen so that the transition time to a stationary point is minimal. In the article, the control functions and the corresponding trajectories of motion in the state space are constructed, and their optimality is substantiated.

Keywords: maximum principle, stationary point, minimum time.

Пашко Сергей Владимирович,

доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института программных систем НАН Украины, Киев, e-mail: pashko55@yahoo.com.