

**КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ У ВИЗНАЧЕННІ
АНТИМАГІЧНИХ РОЗМІТОК ГРАФІВ**

Анотація. Формалізовано визначення розмітки графу в термінах комбінаторних конфігурацій. Досліджено зв'язок реберних та вершинних (a, d) -дистанційних антимігчних розміток з такими відомими конфігураціями, як відокремлювальні системи і множини магічних прямокутників. Отримано розв'язок задачі побудови цих розміток для окремих типів графів і певних значень a, d .

Ключові слова: комбінаторна конфігурація, відокремлювальна система, множина магічних прямокутників, регулярний граф, бірегулярний граф, антимігчна розмітка, (a, d) -дистанційна антимігчна розмітка.

ВСТУП

У загальному розумінні розмітка f графу $G = (V, E)$ — це бієктивне або ін'єктивне відображення множини елементів графу G на множину чисел, яке задовольняє певні умови. Ці умови залежать від типу розмітки. Наприклад, якщо f належить до антимігчного типу, то додатково на V або E вводять вагову функцію, що набуває різних значень для кожного елемента відповідної множини. Крім цього, розмітки можна класифікувати так:

f — вершинна розмітка графу $G = (V, E)$, якщо областю її визначення є множина V ;

f — реберна розмітка графу $G = (V, E)$, якщо областю її визначення є множина E ;

f — тотальна розмітка графу $G = (V, E)$, якщо областю її визначення є множина $V \cup E$.

Графи з розміткою є зручними моделями для розв'язання задач з різних галузей, серед яких криптографія, теорія кодування, керування базами даних, мережеві технології, планування турнірів. Ця робота присвячена дослідженню взаємозв'язків між розмітками антимігчного типу і певними комбінаторними схемами. Термін «схема» з'явився під час вивчення математичних об'єктів, побудованих на множинах різної природи, таких як латинські та магічні прямокутники, блочні схеми, різницеві множини, скінченні проєктивні площини тощо [1, 2]. Для формалізації визначення комбінаторних схем застосовують поняття конфігурації. Термін «конфігурація» в більш загальному розумінні вперше запропонував Т. Рейє у 1876 р. [3]. Він досліджував проєктивні площини. Його надбання в сучасній математиці інтерпретовані в контексті многовидів, внаслідок чого праці Т. Рейє стали відомими широкому колу вчених. Першу роботу під назвою Tactical Memoranda I–III, за авторства Е. Мура, в якій виконано певну систематизацію множини різних конфігурацій, опубліковано у 1896 р. Протягом довгого часу дослідники ігнорували різницю між комбінаторною і геометричною конфігураціями [4, 5]. У сучасній інтерпретації елементами геометричної конфігурації є точки, прямі та евклідові або проєктивні площини. У комбінаторних конфігураціях їх замінюють на абстрактні множини. З часом також з'явилося поняття топологічної конфігурації [6], що оперує термінами «точка», «псевдолінія», «проєктивна площина». Надалі зупинимося лише на комбінаторних конфігураціях.

У другій половині ХХ століття відбулося виокремлення теорії комбінаторних конфігурацій у самостійний напрям математики, який продовжує розвиватися на основі взаємозв'язку з іншими її галузями, такими як теорія груп, теорія скінченного поля, теорія скінченних геометрій, теорія чисел, комбінаторна теорія матриць і теорія графів [1, 2, 7–11]. У 1968 р. К. Берже визначив конфігурацію як відображення множини об'єктів довільної природи в скінченну абстрактну множину із заданою структурою і перерахував шість аспектів вивчення конфігурацій: вивчення відомої конфігурації; дослідження невідомої конфігурації; підрахунок конфігурацій; наближений підрахунок конфігурацій; перелік конфігурацій; оптимізація на множині конфігурацій [12]. Більше відомостей з цього питання можна знайти в [1, 2, 13]. Багато застосунків, у тому числі в комунікаційних мережах і криптографії, що також пов'язані з антиміагічними розмітками графів, з'явилося завдяки напрацюванням у теорії конфігурацій кінця ХІХ і початку ХХ століть. Ця галузь математики продовжує інтенсивно розвиватися і в наш час. Вагомий внесок у її вивчення і розвиток зробили вітчизняні вчені І.В. Сергієнко, Г.П. Донець, Л.Ф. Гуляницький, Н.К. Тимофієва, А.Я. Петренюк, Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.О. Ємець, О.С. Пічугіна, С.Л. Кривий, П.І. Стецюк, В.В. Різник.

У цій статті розглянуто два відомі класи комбінаторних конфігурацій: відокремлювальні системи (separating system) і множини магічних прямокутників (magic rectangle set). Повністю відокремлювальні системи (completely separating system) застосовані в [14] як засіб для вивчення антиміагічної розмітки графів. Ця розмітка введена Н. Хартсфілд і Г. Рінгелем у 1989 р. [15]. Множину магічних прямокутників запропонував Д. Фрончек у 2013 р., так само як і поняття дистанційної d -антиміагічної розмітки графу, під час складання розкладів для проведення неповних турнірів змагань [16]. Роком раніше цю розмітку досліджували С. Арумугам і Н. Камачі в [17]. Вони назвали її (a, d) -дистанційною антиміагічною. Щоб уникнути плутанини, користуватимемося термінологією, наведеною в [17].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $G = (V, E)$ є скінченим неорієнтованим графом без кратних ребер та петель з множиною вершин V і множиною ребер E . Якщо не вказано їхню потужність, то вважатимемо $|V| = p$ і $|E| = q$. Позначимо $N(u)$ множину суміжності вершини $u \in V(G)$ графу G , яка складається з усіх вершин G , суміжних з u . Потужність множини $N(u)$ дорівнює степені вершини u . Граф називають r -регулярним, якщо множини суміжності для кожної його вершини мають однакову потужність, рівну r . Граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$ називають бірегулярним, якщо вершини множини V_i мають однаковий степінь r_i , де $i=1, 2$, $r_1 \neq r_2$.

Під реберною розміткою графу $G = (V, E)$ розуміємо бієктивне відображення $\varphi: E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, що породжує на множині вершин V вагову функцію $w_\varphi(u) = \sum_{v \in N(u)} \varphi(u, v)$ для кожної вершини $u \in V$. Ваги всіх вершин G належать множині, яку називатимемо множиною ваг і позначатимемо W_φ . Потужність W_φ дорівнює потужності множини V , тобто W_φ може бути мультимножиною. Якщо ваги всіх вершин G різні, то φ називають антиміагічною (або антиміагічною реберною) розміткою, а граф G — антиміагічним.

Н. Хартсфілд і Г. Рінгель допустили, що кожний зв'язний граф, відмінний від K_2 , є антиміагічним. У цілому ця гіпотеза залишається відкритою, але існує багато результатів для окремих випадків графів [18].

Розглянемо вершинну розмітку графу $G = (V, E)$, яка є бієктивним відображенням $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, що породжує на множині вершин вагову функцію

$w_f(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$ для кожної вершини $u \in V$. Якщо всі ваги вершин утворюють арифметичну прогресію з першим членом a і різницею d , де a, d — фіксовані невід’ємні цілі числа, $a \geq 1, d \geq 0$, то f називають (a, d) -дистанційною антимагічною розміткою графу G . Граф, для якого можлива така розмітка, називають (a, d) -дистанційним антимагічним. Множину ваг усіх вершин антимагічного графу $G = (V, E)$ позначатимемо W_f , тобто $W_f = \{a, a + d, \dots, a + (p-1)d\}$.

Метою цієї статті є пошук способів побудови реберної і (a, d) -дистанційної розміток антимагічного типу для регулярних та бірегулярних графів із використанням відомих класів комбінаторних конфігурацій.

КЛАСИ РОЗМІТОК ГРАФУ. ВІДОКРЕМЛЮВАЛЬНІ СИСТЕМИ ТА МНОЖИНА МАГІЧНИХ ПРЯМОКУТНИКІВ

Під комбінаторною конфігурацією $\psi : X \rightarrow Y$ розуміють відображення ψ деякої скінченної множини X елементів довільної природи в скінченну абстрактну результівну множину Y певної структури за умови виконання заданого набору обмежень Λ [2, 12, 13]. Допустимо, що X складається з елементів графу $G = (V, E)$, тобто $X = V$ або $X = E$, або $X = V \cup E$. Кожне призначення елементам графу чисел з деякої множини відповідно до заданих правил визначає комбінаторну конфігурацію. Сукупність таких конфігурацій у загальному вигляді називатимемо класами розміток графу. Зауважимо, що у цьому разі $\Lambda \neq \emptyset$.

Сформуємо комбінаторні конфігурації залежно від X . Нехай $X = E$ і кожному ребру графу $G = (V, E)$ відповідає єдине число з множини $\{1, 2, \dots, q\}$, тобто $X = E = \{1, 2, \dots, q\}$. До Λ включаємо таку властивість вагової функції $w_\varphi(u) = \sum_{v \in N(u)} \varphi(u, v)$, заданої на множині вершин V : $w_\varphi : V \rightarrow W_\varphi$ — бієкція, де W_φ — множина ваг вершин, а також враховуємо те, що відображення φ є бієктивним. Тоді кожна комбінаторна конфігурація $\psi : X \rightarrow Y$ з набором обмежень Λ задає переставлення чисел $1, 2, \dots, q$, що визначає антимагічну розмітку графу $G = (V, E)$. Клас таких конфігурацій назвемо множиною антимагічних розміток G .

Аналогічно можна визначити клас комбінаторних конфігурацій, що складається з множини (a, d) -дистанційних антимагічних розміток графу G . Для цього вважатимемо $X = V = \{1, 2, \dots, p\}$, а Y є переставленням чисел $1, 2, \dots, p$, що задає (a, d) -дистанційну антимагічну розмітку G . Властивості цієї розмітки визначають сукупність обмежень Λ .

Поставлені в цій статті задачі розглядатимемо як задачі дослідження нових класів конфігурацій за допомогою відомих. Для цього використаємо два види комбінаторних схем. До першого належать відокремлювальні системи, запроваджені у 1961 р. А. Реньї [19] для розв’язання деяких задач теорії інформації, а до другого — множини магічних прямокутників, введені у 2013 р. Д. Фрончеком [16].

Нехай $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ — сукупність підмножин множини $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Відокремлювальною системою (або SS) на $[n]$ вважають таку множину M , яка задовольняє умови: для будь-яких різних елементів $a, b \in [n]$ існує така підмножина $M_i \in M$, що $a \in M_i, b \notin M_i$ або $a \notin M_i, b \in M_i$. Множини M_i ($i = 1, 2, \dots, m$) зазвичай називають блоками, а їхні елементи — точками SS .

Нагадаємо, що під різницею множин A і B розуміють множину $A - B$, що складається тільки з тих елементів A , які не належать B .

У 1969 р. Т. Діксон описав повністю відокремлювальні системи [20]. Він назвав M повністю відокремлювальною системою на $[n]$ (або $(n)CSS$), якщо для будь-якої пари різних елементів $a, b \in [n]$ існують такі підмножини $M_i, M_j \in M$, що $a \in M_i - M_j$ і $b \in M_j - M_i$.

Нехай s, k — натуральні числа і $M \in (n)CSS$. Якщо $s \leq |M_i| \leq k$ для всіх $M_i \in M$, то M називають $(n, s, k)CSS$. Якщо $|M_i| = k$ для всіх $M_i \in M$, то M називають $(n, k)CSS$. Для довільних фіксованих натуральних чисел n, s, k визначають числа $R(n)$, $R(n, s, k)$ і $R(n, k) : R(n) = \min \{|M| : M \in (n)CSS\}$; $R(n, s, k) = \min \{|M| : M \in (n, s, k)CSS\}$; $R(n, k) = \min \{|M| : M \in (n, k)CSS\}$. Крім цього, системи $(n)CSS$ або $(n, s, k)CSS$, або $(n, k)CSS$ вважають мінімальними для $|M| = R(n)$, $|M| = R(n, s, k)$ і $|M| = R(n, k)$ відповідно.

Я. Робертс запропонував метод побудови мінімальних $(n, k)CSS$ [21]. Окремий випадок цього методу є інструментом для вивчення антимігічної розмітки графу. Тому наведемо спосіб, за яким знаходять $R \times k$ -матрицю $C = (c_{ij})$ для $(n, k)CSS$, де $R = R(n, k) = 2n/k$, $k \geq 2$, $n \geq C_{k+1}^2$, і $2n : k$.

Спочатку будують $R \times k$ -матрицю $C = (c_{ij})$ з $c_{ij} = 0$. Далі допустимо, що $t = 1$. Два елементи c_{ij} матриці C замінюють числом t . Вибираємо їх за правилом

$$\min_j \min_i \{c_{ij} : c_{ij} = 0\}, \min_i \min_j \{c_{ij} : c_{ij} = 0\}.$$

Значення t збільшуємо на одиницю і аналогічно визначаємо нульові елементи в матриці C , де замість нуля вставляємо число $t+1$. Процес повторюємо, доки не отримаємо $t = n+1$. У побудованій $R \times k$ -матриці C кожен рядок утворює підмножину $[n]$ і R рядків із C є блоками $(n, k)CSS$. Для зручності таку $R \times k$ -матрицю C назвемо матрицею Робертса.

Побудову $R \times k$ -матриці, яку позначатимемо C^* , за наведеним вище способом можна починати з найбільшого елемента $t = n$. Далі змінюємо t на $t-1$, доки не виконається рівність $t = 0$. Назвемо C^* оберненою матрицею Робертса.

Нагадаємо, що магічним прямокутником розміру $k \times n$ називають $k \times n$ -матрицю $MR(k, n) = (a_{ij})$, елементами якої є числа $1, 2, \dots, kn$. Кожне з них входить до складу матриці один раз як елемент матриці, всі суми елементів рядків дорівнюють сталій ρ , всі суми елементів стовпців — сталій σ , де

$$\rho = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \frac{1}{2} n(kn+1) \text{ для всіх } i,$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^k a_{ij} = \frac{1}{2} k(kn+1) \text{ для всіх } j.$$

Визначення поняття магічного прямокутника належить Т. Хармуту, який показав, що цей прямокутник існує тоді і тільки тоді, коли $k, n > 1$, $kn > 4$ і $k \equiv n \pmod{2}$. Т. Б'єр, Г. Роджерс і А. Кляйншмідт опублікували сучасні доведення результатів Т. Хармута в [22, 23]. Подальші узагальнення зумовили визначення поняття багатовимірного магічного прямокутника. Під n -вимірним магічним прямокутником $nMR(a_1, a_2, \dots, a_n)$ розуміють $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ -матрицю з елементами із множини $\{1, 2, \dots, a_1 a_2 \dots a_n\}$. Кожен з них входить до складу матриці один раз, при цьому всі суми в k -напрямі дорівнюють σ_k [24]. Для знаходження розміток корисним виявився тільки 3-вимірний випадок.

Д. Фрончек навів більш слабке узагальнення магічних прямокутників, а саме множину магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$, що є сім'єю з t матриць розміру $k \times n$ з елементами r_{ij}^l множини $P = \{1, 2, \dots, knt\}$, де $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq t$. Кожне з чисел множини P спостерігається тільки один раз в $MRC(k, n; t)$, всі суми елементів рядків у кожній матриці дорівнюють сталій $\rho = n(knt+1)/2$, а всі суми еле-

ментів стовпців — сталій $\sigma = k(knt + 1)/2$. Наприклад, 3-вимірний магічний прямокутник $3-MR(a_1, a_2, a_3)$ зумовлює існування деякої множини магічних прямокутників $MRC(a_i, a_j; a_k)$, оскільки поділ $3-MR(a_1, a_2, a_3)$ на окремі шари в будь-якому напрямі дає цю множину магічних прямокутників для довільного переставлення $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Виходячи з цього, необхідна умова існування $MRC(a_1, a_2; a_3)$ містить ті значення a_1, a_2, a_3 , що описані в такій теоремі.

Теорема 1 [16]. Якщо $a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod{2}$, $a_1 \geq 2$ і $a_2 \geq 4$, то $MRC(a_1, a_2; a_3)$ існує для кожного a_3 .

Використаємо поняття конфігурації для опису повністю відокремлювальних систем і множини магічних прямокутників.

Розглянемо множину $X = [n]$. Нехай результативною множиною Y для комбінаторної конфігурації $\psi : X \rightarrow Y$ є впорядкована підмножина з k різних чисел множини X . Отже, функція ψ ін'єктивна. Процес побудови $\psi : X \rightarrow Y$ зведемо до вибору k чисел із заданих n за правилом: для будь-якої пари різних елементів $i, j \in [n]$ існують такі конфігурації $\psi(i)$ і $\psi(j)$, що $i \in \psi(i) - \psi(j)$ і $j \in \psi(j) - \psi(i)$, де під різницею значень функції розуміємо різницю відповідних множин. У результаті отримаємо $\Lambda \neq \emptyset$. Знайдені за цією схемою класи комбінаторних конфігурацій визначають $(n, k)CSS$.

Для визначення наступного типу конфігурацій допустимо, що множина X складається з t матриць розміру $k \times n$, елементами яких є різні числа з множини $\{1, 2, \dots, knt\}$, де $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq t$. Комбінаторна конфігурація $\psi : X \rightarrow Y$ є множиною магічних прямокутників $Y = MRC(k, n; t)$, якщо вона задовольняє правила перетворення початкових матриць з X . Для цього вимагаємо, щоб для всіх матриць з X суми всіх елементів кожного рядка дорівнювали сталій ρ , а суми всіх елементів кожного стовпця — сталій σ . Очевидно, що ψ — бієкція і $\Lambda \neq \emptyset$. Розрізнення $(n, k)CSS$, так само як і $MRC(k, n; t)$, виконується за допомогою властивостей цих класів конфігурацій.

CSS СИСТЕМИ І АНТИМАГІЧНА РОЗМІТКА

Дослідимо взаємозв'язок між повністю відокремлювальними системами та антимагічною розміткою графу.

Мінімальну $(n)CSS$ (далі просто $(n)CSS$) вважають 2-елементною, якщо кожен елемент із $[n]$ належить двом різним блокам. Мінімальні $(n, k)CSS$, визначені за матрицями Робертса C і C^* , є 2-елементними, оскільки кожен елемент із $[n]$ повторюється двічі в різних рядках кожної матриці.

Нехай $M = \{M_1, M_2, \dots, M_p\}$ є 2-елементною мінімальною $(q, r)CSS$ з $p = 2q/r$, яку отримано з $p \times r$ -матриці Робертса $C = (c_{ij})$. Використаємо її для побудови r -регулярного графу $G = (V, E)$ порядку p і розміру q . Кожному елементу $M_i \in M$, тобто блоку $(q, r)CSS$, поставимо у відповідність вершину $v_i \in V$, де $i = 1, 2, \dots, p$. Якщо для блоків M_i і M_s $(q, r)CSS$ існує спільний елемент, то вершини v_i і v_s вважатимемо суміжними в G . Отже, кожен елемент блока $(q, r)CSS$ задає ребро G . Ребра ототожнюємо з їхніми мітками. Елементи M_i , тобто елементи i -го рядка матриці C , є мітками ребер, інцидентних вершині v_i . Отриманий граф G є r -регулярним з реберною розміткою, яку позначимо φ . Між множиною ребер і множиною чисел $\{1, 2, \dots, q\}$ встановлюється взаємно однозначна відповідність.

Згідно з методом побудови матриці Робертса для будь-якого i ($i=1, 2, \dots, p-1$) та $1 \leq j \leq r$ для кожного елемента i -го та $(i+1)$ -го рядків матриці C виконується одна з умов: $c_{ij} < c_{i+1j}$ або $c_{ij} = c_{i+1j}$. При цьому рівність може справджуватися тільки для однієї пари елементів вказаних рядків. Таким чином, $\sum_{j=1}^r c_{ij} < \sum_{j=1}^r c_{i+1j}$, тобто всі $\sum_{j=1}^r c_{ij}$ попарно різні, а значить, і ваги всіх вершин графу G різні. Умова антимігчності виконується. Отже, φ є антимігчною реберною розміткою графу G .

Кожній $p \times r$ -матриці Робертса для (q, r) CSS відповідає антимігчний r -регулярний граф порядку $p = 2q/r$ і розміру q . Неважко показати, що обернене до цього твердження також справедливе.

Спосіб знаходження антимігчного r -регулярного графу G порядку p і розміру $q = \lfloor \frac{pr}{2} \rfloor$ проілюстровано на прикладі.

Приклад 1. Побудувати антимігчний 3-регулярний граф G порядку 8 і розміру 12.

1. Визначимо матрицю Робертса C для $(12, 3)$ CSS. Вона матиме вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 5 & 9 & 11 \\ 6 & 10 & 12 \\ 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

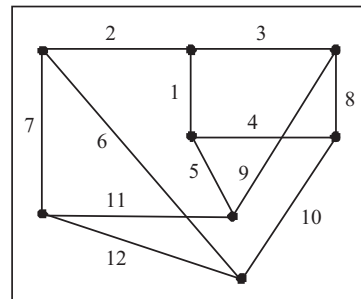


Рис. 1. Антимігчна розмітка графу G на основі матриці C

Блоками $(12, 3)$ CSS є рядки C . Побудуємо G , використавши блоки $(12, 3)$ CSS як вершини графу, а елементи цих блоків — як ребра. Граф G є 3-регулярним, порядку 8 і розміру 12. Матриця C дає змогу визначити реберну розмітку G , що є антимігчною (рис. 1).

2. Визначимо матрицю C^* для $(12, 3)$ CSS:

$$C^* = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 12 & 9 & 8 \\ 11 & 7 & 6 \\ 10 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

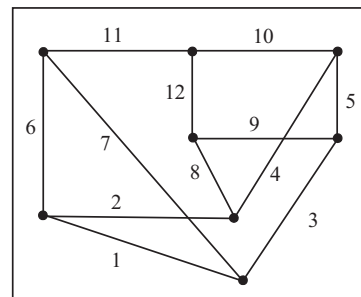


Рис. 2. Антимігчна розмітка графу G на основі матриці C^*

Зрозуміло, що за допомогою C^* отримаємо той самий 3-регулярний граф G порядку 8 і розміру 12, який було побудовано першим способом, якщо не враховувати нумерацію ребер. Але антимігчна розмітка цього графу (рис. 2) не збігається з наведеною на рис. 1.

Зауважимо, що ізоморфізм CSS не поширюється на розмічені графи.

Постає питання: чи можна застосовувати CSS для формування нових класів антимігчних графів? Сформулюємо теорему, що відповідає на це питання для окремого випадку CSS.

Теорема 2. Кожній (q) CSS з $r+1$ блоками розміру r і $r-1$ блоками розміру $r+1$ відповідає антиміагічний бірегулярний граф порядку $2r$ і розміру q , якщо r непарне.

Доведення. Нехай (q) CSS містить $r+1$ блок розміру r і $r-1$ блок розміру $r+1$. Якщо $q = \frac{(r+1)(2r-1)}{2}$, то r повинно бути непарним.

Побудуємо матрицю $L = (l_{ij})$ розміру $2r \times (r+1)$, де $i=1, 2, \dots, 2r, j=1, 2, \dots, r+1$. Будемо вважати, що всі елементи L дорівнюють нулю. Наведемо спосіб, за допомогою якого заповнюємо L , замінюючи її нульові елементи числами від 1 до q так, що кожне з них спостерігається у складі матриці двічі:

1) будуємо матрицю $L = (l_{ij})$ розміру $2r \times (r+1)$ з $l_{ij} = 0$;

2) знаходимо $l_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{для } i=1, \\ i-1 & \text{для } 2 \leq i \leq r+1, \end{cases} \quad l_{1j} = j-1 \text{ для } 3 \leq j \leq r+1$;

3) допустимо, що $t = r+1$;

4) замінюємо два нульові елементи l_{ij} матриці L числом t , вибираємо їх за правилом

$$\min_j \min_i \{l_{ij} : l_{ij} = 0\}, \quad \min_i \min_j \{l_{ij} : l_{ij} = 0\},$$

при цьому вилучаємо з розгляду елементи $l_{i1} = 0$ для $1 \leq i \leq r+1$;

5) значення t збільшуємо на одиницю і застосовуємо правило кроку 4 для заміни двох наступних нульових елементів матриці L числом $t+1$;

6) повторюємо крок 5, доки не виконається рівність $t = q+1$.

Матрицю L побудовано. Вона матимемо вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ 0 & 1 & r+1 & r+2 & \dots & 2r-1 \\ 0 & 2 & 2r & 2r+1 & \dots & 3r-2 \\ 0 & 3 & 3r-1 & 3r & \dots & 4r-3 \\ 0 & 4 & 3r-1 & 4r-2 & \dots & 5r-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r & 4r-5 & 6r-10 & \dots & 7r-13 \\ r+1 & 2r & 4r-4 & 6r-9 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2r-1 & 3r-2 & 5r-6 & 7r-11 & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Тій частині L , для якої $l_{ij} \neq 0$, відповідає 2-елементна (q) CSS. Сума елементів кожного i -го рядка матриці L менша, ніж сума елементів її $(i+1)$ -го рядка, де $i=1, 2, \dots, 2r$. Поставимо у відповідність кожному блоку (q) CSS вершину графу G . Вершини v_i і v_s є суміжними в G , якщо i -й та s -й блоки мають спільний елемент, наприклад x . Утвореному ребру $v_i v_s$ ставимо у відповідність число x . У такий спосіб будуємо реберну розмітку G , при цьому мітками ребер є ненульові елементи L . Усі реберні мітки G різні.

Для будь-яких i ($i=1, 2, \dots, 2r$), j ($1 \leq j \leq r+1$) і кожного ненульового елемента i -го та $(i+1)$ -го рядків матриці L виконується одна з умов: $l_{ij} < l_{i+1j}$ або $l_{ij} = l_{i+1j}$. При цьому рівність може справджуватися тільки для однієї пари елементів вказаних рядків. Усі $\sum_{j=1}^{r+1} l_{ij}$ попарно різні, а значить, і ваги всіх вершин графу G різні. Отже, G — антиміагічний бірегулярний граф порядку $2r$ і розміру q .

Теорему доведено.

Далі наведемо теорему, обернену до теореми 2.

Теорема 3. Кожному бірегулярному антимагічному графу $G = (V_1 \cup V_2, E)$ порядку $2r$ і розміру q , у якого $|V_1| = r+1$, $|V_2| = r-1$ і всі вершини множини V_1 мають степінь r , а V_2 — степінь $r-1$, відповідає 2-елементна (q) CSS.

Доведення. Розглянемо бірегулярний антимагічний граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$ порядку $2r$ і розміру q з $|V_1| = r+1$, $|V_2| = r-1$, у якого всі вершини множини V_1 мають степінь r , а V_2 — степінь $r-1$. Нехай $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{r+1}\}$, $V_2 = \{x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{2r}\}$ і M_i — множина міток усіх ребер, інцидентних вершині x_i , де $i=1, 2, \dots, 2r$. Поставимо у відповідність кожній вершині x_i графу G множину M_i . Побудуємо множину $M = \{M_1, M_2, \dots, M_{2r}\}$. Кожен елемент з $[q] = \{1, 2, \dots, q\}$ належить тільки двом різним множинам з M . Множина M містить $r+1$ множину потужності r і $r-1$ множину потужності $r+1$. Для M виконуються умови, які дають змогу вважати її 2-елементною (q) CSS.

Теорему доведено.

Проілюструємо на прикладі процес побудови бірегулярного графу на основі результатів, одержаних у доведенні теореми 2.

Приклад 2. Побудувати антимагічний граф G , відповідний до (10) CSS, з чотирма блоками розміру 3 і двома блоками розміру 4.

Для знаходження (10) CSS достатньо визначити матрицю L . Вона матимемо вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

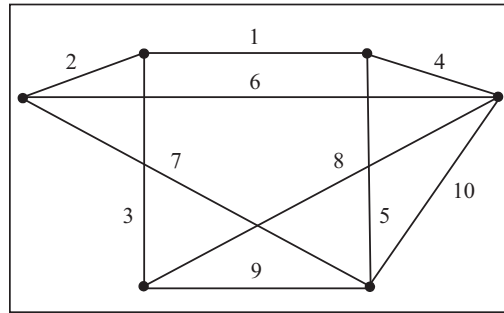


Рис. 3. Антимагічний граф G , відповідний (10) CSS

Побудуємо граф G з L , як описано в доведенні теореми 2, використавши різні ненульові елементи L як реберні мітки (рис. 3). Вага будь-якої вершини G дорівнює сумі елементів відповідного рядка L . Суми всіх рядків L різні, тому G є антимагічним графом.

КОНСТРУКЦІЇ З МАГІЧНИХ ПРЯМОКУТНИКІВ У ВИЗНАЧЕННІ ДИСТАНЦІЙНОЇ АНТИМАГІЧНОЇ РОЗМІТКИ

Для визначення (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки графу $t(K_k \times K_n)$, який є диз'юнктивним об'єднанням t графів $K_k \times K_n$, задіємо множину магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$. Аналогічний підхід застосовано в [25]. Це дає змогу довести справедливість теореми.

Теорема 4. Граф $t(K_k \times K_n) \in (((k+n)(knt+1) - 4knt)/2, 2)$ -дистанційним антимагічним, якщо $k \equiv n \equiv 0 \pmod{2}$ і $k \geq 2, n \geq 4$.

Доведення. Граф $t(K_k \times K_n)$ містить t компонент, кожна з яких ізоморфна $K_k \times K_n$. Позначатимемо u_{ij}^l вершини l -ї компоненти $t(K_k \times K_n)$, де $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq t$, а V — множину вершин $t(K_k \times K_n)$. Розглянемо множину

магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$, яка складається з t прямокутників розміру $k \times n$, а r_{ij}^l є їхніми елементами.

Задамо вершинну розмітку f графу $t(K_k \times K_n)$ так: $f(u_{ij}^l) = r_{ij}^l$. Оскільки значення r_{ij}^l різні і належать множині $\{1, 2, \dots, knt\}$, функція f є бієкцією з V на $\{1, 2, \dots, knt\}$. Згідно з теоремою 1 f існує для кожного t за умови, що $k \equiv n \equiv 0 \pmod{2}$ і $k \geq 2, n \geq 4$. Обчислимо ваги вершин $t(K_k \times K_n)$: $w_f(u_{ij}^l) = \rho + \sigma - 2f(u_{ij}^l)$ або $w_f(u_{ij}^l) = \rho + \sigma - 2r_{ij}^l$, де ρ — сума елементів у кожному рядку, а σ — сума елементів у кожному стовпці для кожного прямокутника з $MRC(k, n; t)$. Множина ваг утворює арифметичну прогресію з першим членом $a = \rho + \sigma - 2knt$ і різницею $d = 2$. Врахуємо, що $\rho + \sigma = \frac{(k+n)(knt+1)}{2}$. Умови антимагічності для f виконуються, тому $f \in ((k+n)(knt+1) - 4knt) / 2, 2$ -дистанційною антимагічною розміткою графу $t(K_k \times K_n)$.

Теорему доведено.

Наведемо спосіб побудови $MRC(2, 4; t)$ для $t \geq 3$. Нехай $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2$ та $l = 1, 2, \dots, t$. Елементи r_{ij}^l з l -ї матриці розміру 2×4 задаємо так:

$$r_{i1}^l = \begin{cases} l & \text{для } i=1, \\ 8t-l+1 & \text{для } i=2, \end{cases} \quad r_{i2}^l = \begin{cases} 4t-l+1 & \text{для } i=1, \\ 4t+l & \text{для } i=2, \end{cases}$$

$$r_{i3}^l = \begin{cases} 7t-l+1 & \text{для } i=1, \\ t+l & \text{для } i=2, \end{cases} \quad r_{i4}^l = \begin{cases} 5t+l & \text{для } i=1, \\ 3t-l+1 & \text{для } i=2. \end{cases}$$

Значення $\rho = 16t + 2$ і $\sigma = 8t + 1$ стали для кожного рядка і стовпця кожної з t матриць множини магічних прямокутників $MRC(2, 4; t)$ відповідно.

Знайдемо множину магічних прямокутників $MRC(2, 4; 3)$ у вигляді сім'ї з трьох 2×4 матриць відповідно до наведеного способу

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 21 & 16 \\ 24 & 13 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 11 & 20 & 17 \\ 23 & 14 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 19 & 18 \\ 22 & 15 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо граф $3(K_2 \times K_4)$. Здійснимо розмітку його вершин, як запропоновано в доведенні теореми 4 (рис. 4). Вона буде $(27, 2)$ -дистанційною антимагічною.

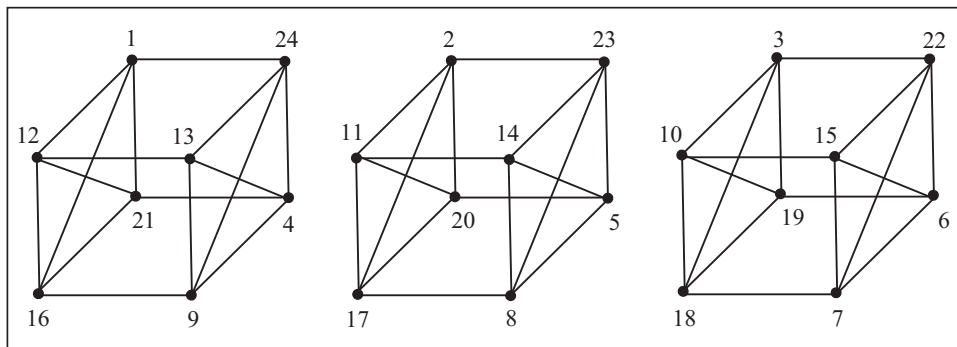


Рис. 4. $(27, 2)$ -дистанційна антимагічна розмітка графу $3(K_2 \times K_4)$

ВИСНОВКИ

На основі поняття комбінаторної конфігурації формалізовано поняття антимагічної розмітки графу. Це дало змогу звести задачу пошуку таких розміток до задачі дослідження невідомої конфігурації за рахунок відомих комбінаторних об'єктів, а саме відокремлювальних систем і множин магічних прямокутників. За допомогою запропонованого підходу отримано нові класи графів з розмітками антимагічного типу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Colbourn C., Dinitz J. Handbook of combinatorial designs. Ed. by Colbourn Ch.J., Dinitz J.H. 2nd ed. Discrete Mathematics and Its Applications. New York: Taylor Francis Group, 2007. 1016 p.
2. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. Москва: Наука, 1977. 320 с.
3. Hartshorne R. Publication history of von Staudt's *Geometrie der Lage*. *Archive for History of Exact Sciences*. 2008. Vol. 62, N 3. P. 297–299.
4. Gropp H. Configurations and graphs. *Discrete Mathematics*. 1993. Vol. 111. P. 269–276.
5. Gropp H. Configurations and graphs — II. *Discrete Mathematics*. 1997. Vol. 164. P. 155–163.
6. Bokowski J., Sturmfels B. Computational synthetic geometry. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 168 p.
7. Baer R. Nets and groups. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1939. Vol. 46. P. 110–141.
8. Baer R. Nets and groups. II. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1940. Vol. 47. P. 435–439.
9. Камерон П., ван Линт Дж. Теория графов. Теория кодирования и блок-схемы. Москва: Наука, 1980. 140 с.
10. Ushio K. G-designs and related designs. *Discrete Mathematics*. 1993. Vol. 116. P. 299–311.
11. Донец Г.А. Графовий підхід до розв'язання задач комбінаторного розпізнавання. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 6. С. 44–53.
12. Berge C. Principes de combinatoire. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
13. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации: современное состояние и перспективы. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 3. С. 30–47.
14. Rylandsa L., Phanalasy O., Ryanb J., Miller M. Construction for antimagic generalized web graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 2011. Vol. 8, N 2. P. 141–149.
15. Hartsfield N., Ringel G. Supermagic and antimagic graphs. *J. Recreat. Math*. 1989. Vol. 21, N 2. P. 107–115.
16. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 2013. Vol. 10, N 2. P. 119–127.
17. Arumugam S., Kamatchi N. On (a, d) -distance antimagic graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2012. Vol. 54. P. 279–287.
18. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. Twenty-second ed. 2019. DS6: Dec 15. 535 p.
19. Renyi A. On random generating elements of a finite boolean algebra. *Acta Scientiarum Mathematicarum*. 1961. Vol. 22, N 1–2. P. 75–81.
20. Dickson T.J. On a problem concerning separating systems of a finite set. *Journal of Combinatorial Theory*. 1969. Vol. 7. P. 191–196.
21. Roberts I.T. Extremal problems and designs on finite sets. Ph.D. Thesis. Bentley (Perth), Australia: Curtin Univ. of Technology, 1999. 176 p.
22. Bier T., Rogers G. Balanced magic rectangles. *European Journal of Combinatorics*. 1993. Vol. 14. P. 285–299.

23. Bier T., Kleinschmidt A. Centrally symmetric and magic rectangles. *Discrete Mathematics*. 1997. Vol. 176. P. 29–42.
24. Hagedorn T. On the existence of magic n -dimensional rectangles. *Discrete Mathematics*. 1999. Vol. 207. P. 53–63.
25. Froncek D. A note on incomplete regular tournaments with handicap two of order $n \equiv 8 \pmod{16}$. *Opuscula Mathematica*. 2017. Vol. 37, N 4. P. 557–566.

Надійшла до редакції 28.10.2020

М.Ф. Семенюта

КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В ОПРЕДЕЛЕНИИ АНТИМАГИЧЕСКИХ РАЗМЕТОК ГРАФОВ

Аннотация. Формализовано определение разметки графа в терминах комбинаторных конфигураций. Исследована связь реберных и вершинных (a, d) -дистанционных антимagicеских разметок с такими известными конфигурациями, как разделяющие системы и множества магических прямоугольников. Получено решение задачи построения этих разметок для отдельных типов графов и определенных значений a, d .

Ключевые слова: комбинаторная конфигурация, разделяющая система, множество магических прямоугольников, регулярный граф, бирегулярный граф, антимagicеская разметка, (a, d) -дистанционная антимagicеская разметка.

M.F. Semeniuta

COMBINATORIAL CONFIGURATIONS IN DETERMINATION OF ANTIMAGIC LABELINGS OF GRAPHS

Abstract. We have formalized the definition of graph labeling in terms of combinatorial configurations. We have investigated the connection between edge and vertex (a, d) -distance antimagic labelings with such well-known configurations as separating systems and magic rectangle set. We have obtained a solution to the problem of construction of indicated labelings for some types of graphs and certain values a, d .

Keywords: combinatorial configuration, separating system, magic rectangle set, regular graph, bi-regular graph, antimagic labeling, (a, d) -distance antimagic labeling.

Семенюта Марина Фролівна,

кандидатка фіз.-мат. наук, доцентка, завідувачка кафедри Льотної академії Національного авіаційного університету, Кропивницький, e-mail: marina_semenyuta@ukr.net.