

**ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ВИДА $M|M|N$ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ
МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Аннотация. Рассмотрена математическая модель повторного обслуживания заявок в виде системы массового обслуживания с N обслуживающими приборами, мгновенной и отсроченной обратными связями и орбитом. Считается, что объем орбита для заявок, требующих повторного обслуживания, является бесконечным. Входящий поток пуассоновский. Для нахождения совместного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и числа заявок в орбите использован метод асимптотического анализа. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания, мгновенная обратная связь, отсроченная обратная связь, орбит, метод асимптотического анализа.

ВВЕДЕНИЕ

В системах массового обслуживания (СМО) обратная связь осуществляется с помощью повторного обслуживания. Качество работы таких СМО оценивается интенсивностью заявок, которые повторно обращаются для обслуживания, при этом повторное обслуживание может произойти по различным причинам. Так, например, если первичное обслуживание заявки не было полным или оно не удовлетворяло требованиям клиента, то она иногда возвращается для повторного обслуживания. Классическими примерами подобных систем являются коммуникационные сети, в которых искаженные данные повторно передаются адресату. Повторное обращение может быть и после качественного обслуживания, когда клиент заново обращается к данной системе.

Повторное обслуживание бывает двух типов: мгновенное и отсроченное. В случае мгновенной обратной связи после завершения обслуживания заявка согласно схеме Бернулли либо сразу поступает на повторное обслуживание, либо уходит из системы. В случае отсроченной обратной связи после завершения обслуживания заявка также согласно схеме Бернулли либо уходит в орбит для повторения обслуживания через определенное положительное (случайное) время, либо покидает систему. Такие схемы называются обратными связями типа Бернулли.

Первыми публикациями, посвященными изучению систем с обратной связью обоих типов, являются классические работы Такача [1, 2]. В них методом производящих функций изучены двумерные марковские модели одноканальных СМО с неограниченной очередью и бесконечным объемом орбита (для модели с отсроченной обратной связью).

После публикации этих работ Такача модели СМО с обратной связью некоторое время не привлекали внимания исследователей. В последние три десятилетия они интенсивно исследуются различными авторами, при этом зачастую модели СМО без орбита и с орбитом изучаются раздельно. Так, в [1, 3–10] изучены модели систем с мгновенной обратной связью, а в [2, 11–21] исследованы модели с отсроченной обратной связью. Вместе с тем в [22–25] изучены модели СМО с обратными связями обоих типов, в которых для расчета стационарного распределения соответствующих многомерных цепей Маркова (ЦМ) разработаны иерархические алгоритмы фазового укрупнения (в [22] дан обзор публикаций до 2015 г.).

© А.А. Назаров, А.З. Меликов, Е.А. Павлова, С.Г. Алиева, Л.А. Пономаренко, 2021

Математическими моделями СМО с обратной связью, как правило, являются многомерные ЦМ, и поэтому основная задача исследования таких систем — нахождение их стационарных вероятностей состояний. Для моделей умеренной размерности для этого можно использовать известные программные средства, основанные на решении балансовых уравнений [26, 27]. Другими подходами являются использования матрично-геометрического [28] и спектрального [29] методов, а также их различных модификаций. Отметим, что применение матрично-геометрического метода чревато вычислительными проблемами, связанными с плохой обусловленностью матриц большой размерности, используемых в различных этапах алгоритма, а при применении спектрального метода требуются вычисления собственных чисел и собственных векторов (левых и правых) матриц больших размерностей, что представляет нетривиальную вычислительную проблему.

Исходя из изложенного, в настоящей работе для изучения СМО с обратными связями обоих типов используется метод асимптотического анализа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания с N обслуживающими устройствами и обратной связью (рис. 1). Входящий поток является пуассоновским с параметром λ .

В момент поступления заявки в систему она занимает свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром μ . Если в момент поступления заявки свободных приборов нет, она немедленно уходит в орбит, где осуществляет задержку в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ .

В момент завершения обслуживания заявка покидает систему с вероятностью r_0 ; отправляется на повторное обслуживание, осуществляя мгновенную обратную связь, с вероятностью r_1 ; уходит в орбит, осуществляя отложенную обратную связь, с вероятностью r_2 , где она остается в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ , после чего требует повторного обслуживания. Если в момент поступления повторной заявки из орбита имеется свободный прибор, то она занимает его в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с тем же параметром μ . Иными словами, первичные (поступающие извне) и повторные заявки (поступающие из орбита) являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки в приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки из орбита все приборы заняты, то она остается в орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что допускается многократное повторение запросов для обслуживания, т.е. не имеется ограничения на число повторения обслуживания.

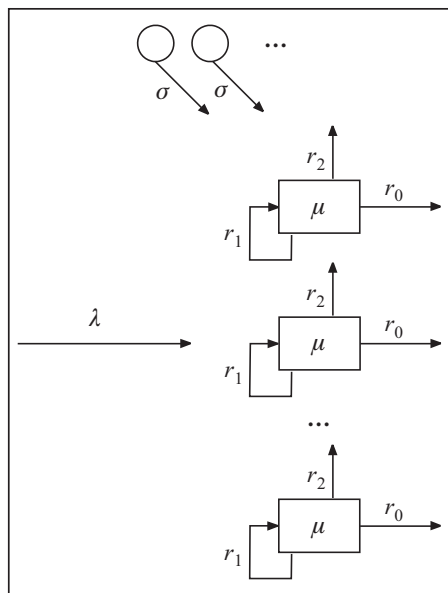


Рис. 1. Система вида $M|M|N$ с обратной связью

Если в момент поступления повторной заявки из орбита имеется свободный прибор, то она занимает его в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с тем же параметром μ . Иными словами, первичные (поступающие извне) и повторные заявки (поступающие из орбита) являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки в приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки из орбита все приборы заняты, то она остается в орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что допускается многократное повторение запросов для обслуживания, т.е. не имеется ограничения на число повторения обслуживания.

Обозначим $n(t)$ число занятых приборов в системе в момент времени t , $n = 0, \dots, N$, $i(t)$ — число заявок в орбите в момент времени t .

Ставится задача получения двумерного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и числа заявок в орбите.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{n(t), i(t)\}$. При выполнении неравенства

$$\lambda \leq r_0 \mu N$$

в системе существует стационарный режим и для стационарного распределения вероятностей $P\{n(t) = n, i(t) = i\} = P(n, i)$ случайного процесса $\{n(t), i(t)\}$ запишем систему уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} & -(\lambda + (1 - r_1)n\mu + i\sigma)P(n, i) + \lambda P(n-1, i) + (i+1)\sigma P(n-1, i+1) + \\ & + (n+1)r_0\mu P(n+1, i) + (n+1)r_2\mu P(n+1, i-1) = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ & -(\lambda + (1 - r_1)N\mu)P(N, i) + \lambda P(N-1, i) + \\ & + \lambda P(N, i-1) + (i+1)\sigma P(N-1, i+1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(n, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(n, i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Тогда можем записать систему (1)

$$\begin{aligned} & -(\lambda + (1 - r_1)n\mu)H(n, u) + \lambda H(n-1, u) + j\sigma \frac{\partial H(n, u)}{\partial u} + \\ & + (n+1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})H(n+1, u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(n-1, u)}{\partial u} = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ & -(\lambda(e^{ju} - 1) + (1 - r_1)N\mu)H(N, u) + \lambda H(N-1, u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(N-1, u)}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим вектор-строки

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u) &= \{H(0, u), H(1, u), \dots, H(N, u)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} &= \left\{ \frac{\partial H(0, u)}{\partial u}, \frac{\partial H(1, u)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H(N, u)}{\partial u} \right\} \end{aligned}$$

и запишем (2) с учетом введенных обозначений

$$\mathbf{H}(u)[\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}] + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} [\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1] = 0,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \mu r_0 & -(\lambda + \mu(r_0 + r_2)) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -(\lambda + N\mu(r_0 + r_2)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N\mu r_2 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим матричное уравнение на единичный вектор-столбец \mathbf{e} и с учетом $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e} = 0$ и $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{e} = 0$ получим

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{V}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0.$$

Таким образом, матричная система (2) и скалярное уравнение примут вид

$$\mathbf{H}(u)[\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}] + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} [\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1] = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{V}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0.$$

Будем искать решение задачи (3) методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявки в орбите, т.е. $\sigma \rightarrow 0$.

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}(w, \varepsilon). \quad (4)$$

С учетом замен (4) запишем (3)

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon)[\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}] + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} [\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1] = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon)\mathbf{V}\mathbf{e} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0.$$

Решив систему (5) при условии $\sigma \rightarrow 0$, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. В предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \{ e^{jw\sigma i(t)} \} = e^{jw\kappa}, \quad (6)$$

где значением параметра κ является положительный корень $x = \kappa$ скалярного уравнения

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e} = 0, \quad (7)$$

а компоненты $R(n)$ вектора \mathbf{R} определяются равенствами

$$R(n) = \frac{\lambda + x}{n\mu(r_0 + r_2)} R(n-1) = \left(\frac{\lambda + x}{\mu(r_0 + r_2)} \right)^n \frac{1}{n!} R(0), \quad (8)$$

$$R(0) = 1 / \sum_{n=0}^N \left(\frac{\lambda + x}{\mu(r_0 + r_2)} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Здесь вектор-строка $\mathbf{R} = \{R(0), R(1), \dots, R(N)\}$ — распределение вероятностей числа занятых приборов в системе, а значение величины x определено равенством (7).

Доказательство. Рассмотрим первое равенство в системе (5) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначим $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}(w)$ и получим

$$\mathbf{F}(w)[\mathbf{A} + \mathbf{B}] + j \frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w} [\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение $\mathbf{F}(w)$ системы (9) в виде

$$\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{jwx}, \quad (10)$$

тогда получим систему

$$\mathbf{R}[\mathbf{A} + \mathbf{B}] + x[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{e} = 1.$$

Запишем первое равенство системы (11) в скалярной форме

$$(\lambda + x)R(n-1) - [\lambda + x + n\mu(r_0 + r_2)]R(n) + (n+1)\mu(r_0 + r_2)R(n+1) = 0.$$

Обозначим $(\lambda + x)R(n-1) - n\mu(r_0 + r_2)R(n) = z_{n-1}$, тогда $z_{n-1} - z_n = 0$.

В результате получим равенства

$$R(n) = \frac{\lambda + x}{n\mu(r_0 + r_2)} R(n-1) = \left(\frac{\lambda + x}{\mu(r_0 + r_2)} \right)^n \frac{1}{n!} R(0),$$

$$R(0) = 1 / \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda + x}{\mu(r_0 + r_2)} \right)^n \frac{1}{n!},$$

совпадающие с (8). Из этих выражений следует, что для любых положительных значений x , распределение вероятностей $R(n)$ дискретное эрланговское с параметром $\gamma = \frac{\lambda + x}{\mu(r_0 + r_2)}$.

Поскольку $\mathbf{F}(w)\mathbf{e} = e^{jwx}$, найдем значение $x = \kappa$ из (7). Рассмотрим второе равенство (5) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{F}(w)\mathbf{B}\mathbf{e} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0$$

и подставим решение $\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{jwx}$, тогда $\mathbf{R}[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} = 0$. Таким образом, значением параметра κ является решение скалярного уравнения, совпадающего с (7).

В стационарном режиме системы вида $M | M | N$ с обратной связью x принимает значение $x = \kappa$, которое является положительным корнем скалярного уравнения (7).

Из равенства (10) при $x = \kappa$ получим равенство

$$\mathbf{F}(w)\mathbf{e} = e^{jw\kappa},$$

совпадающее с (6). ■

Для более детального исследования системы с обратной связью в (3) выполним замену $\mathbf{H}(u) = \exp\left(j\frac{u}{\sigma}\kappa\right)\mathbf{H}^{(2)}(u)$, получим систему

$$\mathbf{H}^{(2)}(u)[\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1)] + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u} [\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1] = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}^{(2)}(u)(\mathbf{B}\mathbf{e} - \kappa e^{-ju}\mathbf{I}_0\mathbf{e}) + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0\mathbf{e} = 0.$$

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и выполнив в (12) замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}^{(2)}(u) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon), \quad (13)$$

можем записать

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)[\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1)] + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} [\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1] = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{B}\mathbf{e} - \kappa e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_0\mathbf{e}) + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0\mathbf{e} = 0.$$

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 2. Предельная характеристическая функция централизованного и нормированного числа заявок в орбите в рассматриваемой системе с обратной связью имеет вид

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \left\{ \exp \left(jw\sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{\kappa}{\sigma} \right) \right) \right\} = \Phi(w) = \exp \left(\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right),$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\kappa \mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e}}{\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e}}. \quad (15)$$

Здесь вектор-строки $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{g} определяются следующими системами уравнений соответственно:

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] = \mathbf{R}[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1], \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e} = 0;$$

$$\mathbf{g}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] = \kappa\mathbf{R}[\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}], \quad (17)$$

$$\mathbf{g}\mathbf{e} = 0.$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (14), используя разложение $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)[\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w\mathbf{I}_1)] + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} [\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi(w)(\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f}) + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

здесь $\Phi(w)$ — некоторая скалярная функция, которую определим далее.

Получаем

$$\begin{aligned} \Phi(w)(\mathbf{R} + j\varepsilon w\mathbf{f})[\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w\mathbf{I}_1)] + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} \mathbf{R}[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] = O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда с учетом (10) разделим последнее уравнение на $j\varepsilon w$ и, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_1) + \mathbf{f}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] + \frac{\partial \Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)} \mathbf{R}[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] = 0.$$

Из последней системы следует, что выражение $\frac{\partial \Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}$ не зависит от w ,

поэтому обозначим $\frac{\partial \Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)} = -\kappa_2$, т.е. можем записать

$$\mathbf{f}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] = \kappa_2 \mathbf{R}[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1] + \mathbf{R}(\kappa\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}). \quad (19)$$

Решение \mathbf{f} этой системы можно представить в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} + \mathbf{g} + \kappa_2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (20)$$

Подставим это разложение в (19), для векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{g} получим системы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] &= \mathbf{R}[\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1], \\ \mathbf{g}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] &= \kappa \mathbf{R}[\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}], \end{aligned}$$

совпадающие с (16) и (17).

В силу (20) векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{g} являются частными решениями неоднородных систем (16) и (17), поэтому они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые будем выбирать в виде $\boldsymbol{\varphi} \mathbf{e} = 0$ и $\mathbf{g} \mathbf{e} = 0$, тогда решения $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{g} систем (16) и (17), удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно.

Рассмотрим теперь второе уравнение (14) и подставим в него разложение (18), тогда с учетом (7) запишем

$$\kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e} + \frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{w \Phi(w)} \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{w \Phi(w)} = -\kappa_2$, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e} + \kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} - \kappa_2 \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0, \quad (21)$$

вектор \mathbf{f} в полученном равенстве запишем в виде (20). С учетом (8) и, преобразовывая (21), имеем равенство

$$\kappa_2 \mathbf{f} \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e} = \kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e},$$

откуда получаем выражение для κ_2 :

$$\kappa_2 = \frac{\kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}{\mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}},$$

которое совпадает с (15) в формулировке теоремы. ■

АСИМПТОТИЧЕСКИ ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Обозначим $G(x)$ функцию гауссовского распределения с параметрами $\frac{\kappa}{\sigma}$ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$.

Дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i) = (G(i+0.5) - G(i-0.5))(1 - G(-0.5))^{-1} \quad (22)$$

будем называть асимптотически гауссовской аппроксимацией распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа $i(t)$ заявок в орбите для рассматриваемой системы $M|M|N$ с обратной связью.

Здесь нетрудно показать, что условием существования стационарного режима (условием эргодичности) рассматриваемой системы является неравенство $\lambda \leq r_0 \mu N$, которое запишем в виде $\lambda = \rho r_0 \mu N$, $0 < \rho < 1$.

При любой аппроксимации, в том числе и для (22), принципиально важным является определение ее точности и области применения, т.е. области тех значений сетевых параметров загрузки ρ и параметра σ , значения которого в теоретических исследованиях являются бесконечно малыми ($\sigma \rightarrow 0$).

Точность аппроксимации будем определять расстоянием Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - P_1(n)) \right|, \quad (23)$$

где $P(i)$ — функция распределения вероятностей числа $i(t)$ заявок в орбите, полученная в результате численных методов.

Аналогично будем определять расстояния Колмогорова для распределения вероятностей числа занятых обслуживающих устройств в системе.

При $\mu = 1$, $r_0 = 0.5$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.2$ в табл. 1 и 2 указаны значения Δ из (23) для распределения вероятностей числа заявок в орбите и распределения вероятностей числа занятых приборов в системе соответственно при указанных значениях параметров ρ и σ .

Полагая, что аппроксимация $P_1(i)$ приемлема, если ее точность $\Delta < 0.05$, в табл. 1 и 2 жирным шрифтом выделяем такие ее значения, что определяют область значений параметров ρ и σ , при которых приемлема аппроксимация $P_1(i)$ из (22).

Из значений Δ , приведенных в табл. 1 и 2, можно сделать вывод, что точность аппроксимации монотонно увеличивается (Δ уменьшается) с уменьшением значений параметра σ . Это естественно в силу предельного условия $\sigma \rightarrow 0$.

Неочевидный вывод заключается в том, что точность аппроксимации уменьшается (Δ возрастает) с увеличением загрузки ρ в рассматриваемой системе с обратной связью.

Таблица 1. Расстояние Колмогорова для распределения вероятностей числа занятых приборов в системе

	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$
$\rho = 0.6$	0.017	0.011	0.006	0.003	0.002	$3.3 \cdot 10^{-4}$
$\rho = 0.7$	0.031	0.020	0.010	0.006	0.003	$6.1 \cdot 10^{-4}$
$\rho = 0.8$	0.055	0.034	0.016	0.009	0.005	$9.4 \cdot 10^{-4}$
$\rho = 0.9$	0.071	0.044	0.021	0.011	0.006	0.001

Таблица 2. Расстояние Колмогорова для распределения вероятностей числа заявок в орбите

	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$
$\rho = 0.6$	0.106	0.067	0.035	0.024	0.017	0.008
$\rho = 0.7$	0.087	0.052	0.041	0.035	0.024	0.010
$\rho = 0.8$	0.111	0.087	0.060	0.045	0.032	0.014
$\rho = 0.9$	0.177	0.136	0.094	0.069	0.049	0.022

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена система вида $M|M|N$ с обратной связью. В предельном условии большой задержки ($\sigma \rightarrow 0$) заявок в орбите, реализующих отложенную обратную связь, найдены распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и предельное гауссовское распределение вероятностей нормированного числа заявок в орбите. Предложена асимптотически гауссовская аппроксимация для дискретного распределения вероятностей числа заявок в орбите.

Показано, что в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ число занятых приборов и число заявок в орбите для рассматриваемой системы стохастически независимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takács L. A single-server queue with feedback. *Bell System Technical Journal*. 1963. Vol. 42. P. 505–519.
2. Takács L. A queuing model with feedback. *RAIRO — Operations Research — Recherche Opérationnelle*. 1977. Vol. 11, N 4. P. 345–354.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции. *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13, вып. 5. С. 88–92.

4. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями. *Автоматрия*. Т. 47, вып. 6. С. 51–58.
5. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queueing model $MAP|PH|1|N$ with feedback operating in a Markovian random environment. *Austrian Journal of Statistics*. 2005. Vol. 34, Iss. 2. P. 101–110.
6. Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C. The $M/G/1$ Bernoulli feedback queue with vacations. *Queueing Systems*. 1991. Vol. 9, Iss. 4. P. 353–363.
7. D'Avignon G.R., Disney R.L. Queues with instantaneous feedback. *Management Sciences*. 1997. Vol. 24, Iss. 2. P. 168–180.
8. Berg J.L., Boxma O.J. The $M/G/1$ queue with processor sharing and its relation to feedback queue. *Queueing Systems*. 1991. Vol. 9, Iss. 4. P. 365–402.
9. Hunter J.J. Sojourn time problems in feedback queue. *Queueing Systems*. 1989. Vol. 5, Iss. 1–3. P. 55–76.
10. Melikov A. Z., Zadiranova A., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. *Communications in Computer and Information Science*. 2016. Vol. 678. P. 231–240.
11. Pekoz E.A., Joglekar N. Poisson traffic flow in a general feedback. *Journal of Applied Probability*. 2002. Vol. 39, Iss. 3. P. 630–636.
12. Lee H.W., Seo D.W. Design of a production system with feedback buffer. *Queueing Systems*. 1997. Vol. 26, Iss. 1. P. 187–198.
13. Lee H.W., Ahn B.Y. Analysis of a production system with feedback buffer and general dispatching time. *Mathematical Problems in Engineering*. 2000. Vol. 5. P. 421–439.
14. Foley R.D., Disney R.L. Queues with delayed feedback. *Advances in Applied Probability*. 1983. Vol. 15, Iss. 1. P. 162–182.
15. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. $M/M/1$ retrial queueing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 4. P. 2379–2389.
16. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. $M/M/1$ retrial queueing system with loss and feedback under pre-emptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2010. Vol. 2. P. 27–34.
17. Bouchentouf A.A., Belarbi F. Performance evaluation of two Markovian retrial queueing model with balking and feedback. *Acta Univ. Sapientiae. Mathematica*. 2013. Vol. 5. P. 132–146.
18. Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W. The $M/M/c$ retrial queue with geometric loss and feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 1998. Vol. 36. P. 41–52.
19. Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V. On multiserver feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33. P. 2062–2083.
20. Do T.V. An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queueing capacity. *Applied Mathematical Modelling*. 2010. Vol. 34, Iss. 8. P. 2272–2278.
21. Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M. A feedback retrial queueing system with starting failures and single vacation. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 2007. Vol. 10, N 3. P. 183–192.
22. Melikov A., Ponomarenko L., Rustamov A. Methods for analysis of queueing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Information Technologies and Mathematical Modelling — Queueing Theory and Applications. ITMM 2015. Communications in Computer and Information Science*. Dudin A., Nazarov A., Yakupov R. (Eds). 2015. Vol 564. P. 185–199. https://doi.org/10.1007/978-3-319-25861-4_16.
23. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queueing system with instantaneous and delayed feedbacks. *Cybernetics and System Analysis*. 2016. Vol. 52, N 1. P. 58–70. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9800-y>.
24. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Hierarchical space merging algorithm for the analysis of open tandem queueing networks. *Cybernetics and System Analysis*. 2016. Vol. 52, N 6. P. 867–877. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9888-0>.
25. Melikov A., Aliyeva S. Refined approximate algorithm for steady-state probabilities of the large scale queueing systems with instantaneous and delayed feedback. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2019. Communications in Computer and Information Science*. Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (Eds.). 2019. Vol. 1109. P. 188–201. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33388-1_16.
26. Sztrik J., Efosinin D. Tool supported reliability analysis of finite-source retrial queues. *Automation and Remote Control*. 2010. Vol. 71. P. 1388–1393.

27. Bérczes T., Sztrik J., Tóth Á., Nazarov A. Performance modeling of finite-source retrial queueing systems with collisions and non-reliable server using MOSEL. *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science.* Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (Eds). 2017. Vol 700. P. 248–258. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66836-9_21.
28. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981. 332 p.
29. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: Application and comparison with the matrix-geometric method. *Performance Evaluation.* 1995. Vol. 23. P. 241–260.

Надійшла до редакції 14.02.2020

А.А. Назаров, А.З. Меліков, К.О. Павлова, С.Г. Алієва, Л.А. Пономаренко
ДОСЛІДЖЕННЯ СМО ВИДУ $M|M|N$ ІЗ ЗВОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ МЕТОДОМ
АСИМПТОТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Анотація. Розглянуто математичну модель повторного обслуговування заявок у вигляді системи масового обслуговування з N обслуговуваними приладами, миттєвим і відстроченим зворотними зв'язками та орбітою. Вважається, що розмір орбіти для заявок, що потребують повторного обслуговування, є нескінченним. Вхідний потік є пуассонівським. Для знаходження спільного розподілу ймовірностей кількості зайнятих приладів у системі і кількості заявок в орбіті використано метод асимптотичного аналізу. Наведено результати чисельного експерименту.

Ключові слова: багатоканальна система масового обслуговування, миттєвий зворотний зв'язок, відстрочений зворотний зв'язок, орбіта, метод асимптотичного аналізу.

A. Nazarov, A. Melikov, E. Pavlova, S. Aliyeva, L. Ponomarenko
METHOD OF ASYMPTOTIC ANALYSIS OF AN $M|M|N$ QUEUEING SYSTEM
WITH FEEDBACK

Abstract. In this paper, we consider a mathematical model for re-servicing customers in the form of a queueing system with N servers, instant and delayed feedback, and an orbit. It is believed that the orbit size for customers requiring re-service is infinite. The input flow is Poisson. To find the joint probability distribution of the number of occupied servers in the system and the number of customers in orbit, the asymptotic analysis method is used. The results of a numerical experiment are presented.

Keywords: multichannel queueing system, instant feedback, delayed feedback, orbit, asymptotic analysis method.

Назаров Анатолий Андреевич,
 доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Национального исследовательского Томского государственного университета, Россия, e-mail: nazarov.tsu@gmail.com.

Меликов Агаси Зарбали оглы,
 чл.-кор. НАН Азербайджана, доктор техн. наук, профессор, заведующий лабораторией Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, e-mail: agassi.melikov@gmail.com.

Павлова Екатерина Алексеевна,
 аспирантка, ассистентка кафедры Национального исследовательского Томского государственного университета, Россия, e-mail: pavlovakatya_2010@mail.ru.

Алиева Севиндж Гамзага кызы,
 кандидат техн. наук, доцент кафедры Бакинского государственного университета, Азербайджан.

Пonomarenko Леонид Анатольевич,
 доктор техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАН и МОН Украины, Киев, e-mail: laponomarenko@ukr.net.