УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

МЕРЫ РИСКА В ВИДЕ ИНФИМАЛЬНОЙ КОНВОЛЮЦИИ[1]

Аннотация. Изучены свойства мер риска, построенных в виде инфимальной конволюции. Описано двойственное представление таких мер, их субдифференциал, условия экстремума, представление для оптимизации и использования в ограничениях. Результаты исследования демонстрируются на примерах известных мер риска такой конструкции. Это позволяет систематизировать известные результаты и облегчить потенциальный поиск новых вариантов мер риска.

Ключевые слова: инфимальная конволюция, выпуклая мера риска, когерентная мера риска, conditional value-at-risk, двойственное представление, субдифференциал, ожидаемая полезность, детерминированный эквивалент.

ВВЕДЕНИЕ

Инфимальной конволюцией двух выпуклых функций в [1] названа конструкция

$$f(x)\,\square\, g(x) = \inf_{y\in X}\ \{f(y)+g(x-y)\}, \tag{1}$$

которая ныне успешно используется для построения мер риска.

Например, в [2] в качестве критерия для максимизации в стохастическом программировании рассматривался так называемый «оптимизируемый эквивалент определенности» (Optimized Certainty Equivalent, OCE):

$$S_u(X) = \sup_{\eta\in R}\{\eta + Eu(X-\eta)\},$$

где $u(\cdot)$ — некоторая функция полезности. Этот критерий, взятый со знаком «–» для задачи минимизации, описывается конструкцией (1).

В работах [3, 4] для финансового потока X введена мера риска Conditional Value-at-Risk (CVaR):

$$CVaR_\alpha(X) = \inf_{\eta\in R}\left\{\eta + \frac{1}{1-\alpha}E(-X-\eta)_+\right\}.$$

Она описывает среднее значение α-хвоста наибольших потерь финансового потока X, поэтому его величина учитывается со знаком «–».

Если в конструкции в качестве величины X сразу рассматривать случайные потери, то она используется без знака «–»:

$$CVaR_\alpha(X) = \inf_{\eta\in R}\left\{\eta + \frac{1}{1-\alpha}E(X-\eta)_+\right\}. \tag{2}$$

В настоящее время эта мера также известна как Expected Shortfall [5], Tail VaR [6] и Averaged VaR [7]. Она имеет теоретически полезные свойства и относится к широко известному классу когерентных мер риска (КМР), для которого в [8] предложен ряд аксиоматических свойств. В [9] понятие КМР при отказе от требования положительной однородности обобщено до понятия выпуклой меры риска.

---

[1] Работа частично поддержана грантом CPEA-LT-2016/10003 Норвежского агентства по международному сотрудничеству и повышению качества высшего образования (the Norwegian Agency for International Cooperation and Quality Enhancement in Higher Education (Diku)).

В [10] конструкция (2) модифицирована заменой компоненты $E(X-\eta)_+$ компонентой $\|(X-\eta)_+\|$. При этом она сохранила свойства КМР.

В работах [11, 12] составляющая $E(X-\eta)_+$ в конструкции (2) заменена компонентами с детерминированным эквивалентом $-u^{-1}Eu(X-\eta)$. При выборе некоторых функций полезности $u(\cdot)$ такие конструкции — соответственно выпуклая и когерентная меры риска.

Таким образом, меры риска в виде инфимальной конволюции можно строить как по случайным величинам (с.в.) потерь (подобно CVaR), так и по ее ожидаемой полезности (детерминированному эквиваленту). Это позволяет объединить в такой конструкции подходы, применяемые в условиях неопределенности для финансовых и экономических приложений. В первом случае решение оценивается по соотношению вознаграждение–риск, во втором — по ожидаемой полезности.

В настоящей работе изучаются свойства компонент $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ для инфимальной конволюции вида

$$\rho(X)=\inf_{\eta\in R}\{\varphi(\eta)+\psi(X-\eta)\}, \qquad (3)$$

которые позволяют придать ей постулируемые свойства меры риска. Для таких конструкций рассматривается двойственное представление, субдифференциал, условия экстремума, а также возможности минимизации и применения в ограничениях. Результаты изучения демонстрируются на примере известных мер риска. Это позволяет систематизировать результаты для мер риска с данной конструкцией и облегчить потенциальный поиск их новых вариантов.

СВОЙСТВА ИНФИМАЛЬНОЙ КОНВОЛЮЦИИ КАК МЕРЫ РИСКА

Введем предварительные обозначения. Пусть (Ω,Σ,P) — некоторое вероятностное пространство, $\mathbf{X}$ — линейное пространство Σ-измеримых функций $X:\Omega\to R$, называемых с.в.

В качестве $\mathbf{X}$ будем рассматривать измеримые пространства $L_p(\Omega,\Sigma,P)$, $p\in[1,+\infty)$. Как известно, для них двойственными пространствами $\mathbf{X}^*$ есть $L_q(\Omega,\Sigma,P)$, $q\in(1,+\infty]$, при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, а действие линейного функционала $\zeta\in L_q(\Omega,\Sigma,P)$ на элемент пространства $X\in L_p(\Omega,\Sigma,P)$ имеет вид

$$\langle\zeta,X\rangle=\int_\Omega X(\omega)\zeta(\omega)dP(\omega).$$

Говорят, что функция $f:\mathbf{X}\to\overline{R}=\{R\cup\pm\infty\}$ собственная, если $\forall x\in\mathbf{X}$ $f(x)>-\infty$ и $\operatorname{dom} f=\{x: f(x)<+\infty\}\neq\varnothing$, где $\operatorname{dom} f$ называют областью определения функции f.

Отметим, что функция $f(\cdot)$ называется выпуклой, если $f(\lambda x_1+(1-\lambda x_2))\le$ $\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ для $0\le\lambda\le1$ и полунепрерывной снизу (пн.сн.), если $f(x)\le\liminf_{y\to x} f(y)$.

Относительной (полной) внутренностью множества M называется множество точек $\operatorname{ri} M$ ($\operatorname{int} M$), которые входят в M вместе с некоторой окрестностью в его аффинной оболочке (полной окрестностью).

Субдифференциалом выпуклой собственной и пн.сн. функции $f(\cdot)$ в точке x_0 называется следующее выпуклое и слабо* замкнутое множество линейных функционалов:

$$\partial f(x_0)=\{\zeta:\langle\zeta,x-x_0\rangle\le f(x)-f(x_0)\ \ \forall x\in\mathbf{X}\}.$$

Рассмотрим в качестве меры риска конструкцию вида (3), где составляющие ее функции $\varphi: R \to \overline{R}, \psi: \mathbf{X} \to \overline{R}$ собственные, выпуклые и пн.сн. Тогда выпуклость $\rho(\cdot)$ сразу следует из конструкции (3).

Утверждение 1. Функция $\rho(\cdot)$ выпуклая.

Доказательство. Действительно, рассмотрим для некоторых $X_1, X_2 \in \mathbf{X}$ и $\lambda \in (0,1)$ выпуклую комбинацию $\lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2)$.

Выберем произвольное, но фиксированное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения $\rho(\cdot)$ в виде (3) существуют такие $\eta_{X_1}, \eta_{X_2} \in R$, что

$$\rho(X_1) \geq \varphi(\eta_{X_1}) + \psi(X - \eta_{X_1}) - \varepsilon, \; \rho(X_2) \geq \varphi(\eta_{X_2}) + \psi(X - \eta_{X_2}) - \varepsilon.$$

Тогда

$$\lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2) \geq$$

$$\lambda(\varphi(\eta_{X_1}) + \psi(X_1 - \eta_{X_1})) + (1-\lambda)(\varphi(\eta_{X_2}) + \psi(X_2 - \eta_{X_2})) - \varepsilon \geq$$

$$\geq \lambda\varphi(\eta_{X_1}) + (1-\lambda)\varphi(\eta_{X_2}) + \lambda\psi(X_1 - \eta_{X_1}) + (1-\lambda)\psi(X_2 - \eta_{X_2}) - \varepsilon \geq$$

$$\geq \varphi(\lambda\eta_{X_1} + (1-\lambda)\eta_{X_2}) + \psi(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 - (\lambda\eta_{X_1} + (1-\lambda)\eta_{X_2})) - \varepsilon \geq$$

$$\geq \rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это неравенство подтверждает выпуклость $\rho(\cdot)$.

Приведем аксиоматические свойства меры риска $\rho: \mathbf{X} \to \overline{R}$ из [8, 9]:

(A0) — полунепрерывность снизу, $\rho(X) \leq \liminf\limits_{Y \to X} f(Y)$;

(A1) — монотонность, $\rho(X) \leq \rho(Y)$, если $X \leq Y$ (по распределению);

(A2) — выпуклость, $\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2), 0 \leq \lambda \leq 1$;

(A3) — трансляционная инвариантность, $\rho(X + a) = \rho(X) + a, a \in R$;

(A4) — нормализация, $\rho(0) = 0$;

(A5) — положительная однородность, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \lambda \geq 0$.

Замечание 1. Аксиомы приведены для случая, когда с.в. X описывает величины, характеризуемые предпочтением «чем меньше — тем лучше» типа потери, стоимость и др. Если X описывает величину финансового потока («чем больше — тем лучше»), то прибавление к ней некоторой положительной величины (суммы денег) должно уменьшать риск потенциальных потерь. Для мер риска, определенных для таких с.в. X, две из приведенных аксиом соответственно модифицируются:

(A1a) — монотонность, $\rho(X) \leq \rho(Y)$, если $X \geq Y$ (по распределению);

(A3a) — трансляционная инвариантность, $\rho(X + a) = \rho(X) - a, a \in R$.

Отметим, что (A1a) означает антимонотонность в смысле (A1).

Замечание 2. Если уже имеется мера риска $\rho(\cdot)$, построенная по случайным потерям, то для оценки риска финансового потока X достаточно использовать $\rho(-X)$.

Функция $\rho: \mathbf{X} \to \overline{R}$ называется выпуклой мерой риска [9], если выполняются аксиомы (A0)–(A4). Если она к тому же положительно однородна (аксиома (A5)), то называется когерентной мерой риска [8].

Как отмечалось, конструкция $\rho(\cdot)$ гарантирует ее выпуклость. Рассмотрим свойства функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ из (3), которые позволяют $\rho(\cdot)$ иметь и другие нужные свойства меры. Начнем с монотонности.

Утверждение 2. Из монотонности $\psi(\cdot)$ следует монотонность $\rho(\cdot)$.

Доказательство. Если $X \geq Y$, то и $X - \eta \geq Y - \eta$, $\eta \in R$. Поэтому из монотонности $\psi(\cdot)$ следует $\psi(X - \eta) \geq \psi(Y - \eta)$. Тогда

$$\rho(X) = \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta) + \psi(X - \eta)\} \geq \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta) + \psi(Y - \eta)\} = \rho(Y).$$

Таким образом, если $X \geq Y$, то $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Утверждение 3. Из трансляционной инвариантности $\varphi(\cdot)$ следует инвариантность $\rho(\cdot)$.

Доказательство. Согласно конструкции (3)

$$\rho(X + a) = \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta) + \psi(X + a - \eta)\} = \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta - a + a) + \psi(X - (\eta - a))\} =$$
$$= \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta - a) + a + \psi(X - (\eta - a))\} = \rho(X) + a.$$

Замечание 3. Трансляционно инвариантная функция $\varphi(\cdot)$ имеет вид

$$\varphi(\eta) = \varphi(0) + \eta. \tag{4}$$

Действительно, $\varphi(\eta) = \varphi(0 + \eta) = \varphi(0) + \eta, \eta \in R$.

Утверждение 4. Из положительной однородности функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ следует положительная однородность $\rho(\cdot)$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим $\rho(\lambda X)$ для $\lambda > 0$:

$$\rho(\lambda X) = \inf_{\eta \in R} \{\varphi(\eta) + \psi(\lambda X - \eta)\} = \inf_{Y \in \mathbf{X}} \{\varphi(\lambda\eta / \lambda) + \psi(\lambda(X - \eta / \lambda))\} =$$

$$= \inf_{Y \in \mathbf{X}} \{\lambda\varphi(\eta / \lambda) + \lambda\psi(X - \eta / \lambda)\} = \lambda \inf_{Y \in \mathbf{X}} \{\varphi(\eta / \lambda) + \psi(X - \eta / \lambda)\} = \lambda\rho(X).$$

Замечание 4. Из положительной однородности и трансляционной инвариантности $\varphi(\cdot)$ следует, что $\varphi(\eta) = \eta$.

Рассмотрим свойство пн.сн. для функции $\rho(\cdot)$. Как известно [1], инфимальная конволюция может не быть пн.сн. и собственной, даже если таковыми являются функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$. Для этого потребуется дополнительное условие.

Согласно следствию 9.2.2 [1, с.76] $\rho(\cdot)$ — собственная и инфимум в (3) достигается в конечной точке, если выполнено следующее условие для рецессивных функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$:

$$(\varphi 0^{+})(-\xi) + (\psi 0^{+})(\xi) > 0 \ \ \forall \xi \in R, \xi \neq 0. \tag{5}$$

Использовав теорему 8.5 [1, с. 66], запишем условие (5) в более привычных обозначениях

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\varphi(\eta - \lambda\xi) - \varphi(\eta) + \psi(X - \eta + \lambda\xi) - \psi(X - \eta)}{\lambda} > 0 \ \ \forall \xi \in R, \xi \neq 0.$$

Поскольку значение рецессивных функций определяется так: $\forall \eta \in \operatorname{dom} \varphi$ и $\forall (X - \eta) \in \operatorname{dom} \psi$, то

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\varphi(\eta - \lambda\xi) - \varphi(\eta) + \psi(X - \eta + \lambda\xi) - \psi(X - \eta)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\varphi(-\lambda\xi) - \varphi(0) + \psi(\lambda\xi) - \psi(0)}{\lambda}.$$

Поэтому (5) эквивалентно условию

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\psi(\lambda\xi) - \psi(0)}{\lambda} > \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\varphi(0) - \varphi(-\lambda\xi)}{\lambda} \ \ \forall \xi \in R, \xi \neq 0. \tag{6}$$

Для пн.сн., выпуклых и собственных функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ данное условие обеспечивает собственность выпуклой монотонной функции $\rho(\cdot)$. Если при этом $\psi(\cdot)$ монотонна, то и $\rho(\cdot)$ монотонна. Тогда в соответствии с теоремой 7.79 [13, с. 404] функция $\rho(\cdot)$ пн.сн. и субдифференцируема на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\rho)$. Следовательно, на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\rho)$

$$\liminf_{X \to X_0} \rho(X) \geq \rho(X_0). \tag{7}$$

Отметим, что на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\rho)$ гарантируется не только свойство (7) для функции $\rho(\cdot)$, но и ее непрерывность.

Если при этом $\varphi(\cdot)$ трансляционно инвариантна, она имеет вид (4). Следовательно, условие (6) сводится к

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\psi(\lambda\xi) - \psi(0)}{\lambda} > \xi \quad \forall \xi \in R, \xi \neq 0. \tag{8}$$

Если функция $\psi(\cdot)$ положительно однородна, то получим

$$\psi(\xi) > \xi \quad \forall \xi \in R, \xi \neq 0. \tag{9}$$

Отметим, что это условие уже рассматривалось в [10].

Если $\psi(\cdot)$ не положительно однородна, используем ее выпуклость

$$\frac{1}{\lambda}\psi(\lambda\xi) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\psi(0) \geq \psi(\xi) \text{ или } \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda\xi) \geq \psi(\xi) - \frac{\lambda - 1}{\lambda}\psi(0).$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{\psi(\lambda\xi) - \psi(0)}{\lambda}\right) \geq \lim_{\lambda \to +\infty}(\psi(\xi) - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right)\psi(0)) = \psi(\xi) - \psi(0).$$

Следовательно, условие (8) выполняется, если $\psi(\xi) - \psi(0) > \xi$.

Таким образом, для выполнения (8) достаточно условия

$$\psi(\xi) > \xi + \psi(0) \quad \forall \xi \in R, \xi \neq 0. \tag{10}$$

При $\psi(0) = 0$ условие (10) сводится к (9), которое гарантирует выполнение (5), даже если $\psi(\cdot)$ не положительно однородна. Сформулируем это в виде утверждения.

Утверждение 5. Если функция $\varphi(\cdot)$ трансляционно инвариантна и $\psi(0) = 0$, то условие (9) гарантирует выполнение (5).

Перейдем теперь к свойству нормализации для $\rho(\cdot)$. Рассмотрим следующее условие, обозначенное (C1) (Condition):

$$\psi(\eta) + \varphi(-\eta) \geq 0, \eta \in R, \text{ но } \forall \varepsilon > 0\, \exists \eta_\varepsilon \in R: \psi(\eta_\varepsilon) + \varphi(-\eta_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{C1}$$

Утверждение 6. Если для функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ выполняется условие (C1), то $\rho(\cdot)$ нормализована, т.е. $\rho(0) = 0$.

Доказательство сразу следует из конструкции (3).

Рассмотрим свойства $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, которые позволяют гарантировать выполнение условия (C1).

Как упоминалось ранее, при выполнении (5) инфимум в (3) достигается, тогда условие (C1) имеет более простой вид

$$\psi(\eta) + \varphi(-\eta) \geq 0, \eta \in R, \text{ но } \exists \eta_0 : \psi(\eta_0) + \varphi(-\eta_0) = 0. \tag{11}$$

Если при этом $\varphi(\cdot)$ трансляционно инвариантна, то в силу (4) условие (11) приобретает вид

$$\psi(\eta) \geq -\varphi(0) + \eta, \eta \in R, \text{ но } \exists \eta_0 : \psi(\eta_0) = -\varphi(0) + \eta_0. \tag{12}$$

Если к тому же $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ положительно однородны, то, как нетрудно показать, $\varphi(0)=0, \psi(0)=0$. В этом случае условие (10) приобретает вид (9), а это в сочетании с $\varphi(0)=\psi(0)=0$ влечет выполнение (12). Ведь тогда $\psi(\eta)>\eta=$ $=-\varphi(-\eta)$, $\eta\neq 0$, а для $\eta_0=0$ справедливо равенство $\psi(0)=\varphi(0)=0$.

Таким образом, условие (9) в сочетании с $\psi(0)=\varphi(0)=0$ и трансляционной инвариантностью $\varphi(\cdot)$ гарантирует выполнение условия (C1). В этом случае $\varphi(\eta)=\eta, \eta\in R$.

Сформулируем результаты приведенных рассуждений в виде следствий утверждения 6.

Следствие 1. Если $\varphi(\eta)=\eta, \psi(0)=0$ и выполнено условие (9), то $\rho(\cdot)$ нормализована.

Следствие 2. Если $\varphi(\eta)=\eta$, $\psi(\cdot)$ положительно однородна и выполнено условие (9), то $\rho(\cdot)$ нормализована.

Результаты из утверждений 1–6, следствий 1, 2 и условий пн.сн. для $\rho(\cdot)$ представим в форме следующей теоремы.

Теорема 1. Если $\varphi(\eta)=\eta$, а $\psi(\cdot)$ пн.сн., выпуклая, собственная, монотонная и $\psi(0)=0$, а также выполнено условие (9), то конструкция (3) определяет выпуклую меру риска $\rho(\cdot)$ на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\psi)$. Если к тому же функция $\psi(\cdot)$ положительно однородна, то $\rho(\cdot)$ является КМР.

Замечание 5. Свойства $\psi(\cdot)$ подобны свойствам меры риска $\rho(\cdot)$. Функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам меры, кроме трансляционной инвариантности, которая для $\rho(\cdot)$ обеспечивается конструкцией (3) при $\varphi(\eta)=\eta$. Вместо трансляционной инвариантности от $\psi(\cdot)$ требуется выполнение условия (9).

Рассмотрим случай, когда X — величина финансового потока. Тогда конструкцию (3) можно использовать для построения меры риска $\rho(X)$, когда X входит в ее конструкцию без знака «–» (см. замечания 1, 2). В этом случае монотонность и трансляционная инвариантность функций понимается в смысле аксиом (A1a) и (A3a).

Для такого случая утверждение теоремы 1 модифицируется следующим образом.

Теорема 1а. Если $\varphi(\eta)=-\eta$, а $\psi(\cdot)$ пн.сн., выпуклая, собственная, монотонная в смысле (A1a) и $\psi(0)=0$, а также выполняется условие (9), то конструкция (3) определяет выпуклую меру риска $\rho(\cdot)$ на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\psi)$. Если к тому же функция $\psi(\cdot)$ положительно однородна, то $\rho(\cdot)$ является КМР.

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ МЕР РИСКА, ИХ МИНИМИЗАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В ОГРАНИЧЕНИЯХ

Двойственное представление и субдифференциал меры риска. Для выпуклой, собственной и пн.сн. функции $\rho:\mathbf{X}\to\overline{R}$ можно определить сопряженную функцию $\rho^*:\mathbf{X}^*\to\overline{R}$

$$\rho^*(\zeta)=\sup_{X\in\mathbf{X}}[\langle\zeta, X\rangle-\rho(X)]=\sup_{X\in\operatorname{dom}\rho}[\langle\zeta, X\rangle-\rho(X)]\quad\forall\zeta\in\mathbf{X}^*.$$

Как известно [13], если $\rho(\cdot)$ выпуклая, собственная и пн.сн., то ее сопряженная $\rho^*(\cdot)$ также имеет эти свойства.

Рассмотрим сопряженную с $\rho^*(\cdot)$ функцию $\rho^{**}:\mathbf{X}^{**}\to\overline{R}$:

$$\rho^{**}(X)=\sup_{\zeta\in\mathbf{X}^*}[\langle\zeta, X\rangle-\rho^*(\zeta)]=\sup_{\zeta\in\operatorname{dom}\rho^*}[\langle\zeta, X\rangle-\rho^*(\zeta)].$$

В соответствии с теоремой Фенхеля–Моро [13, теорема 7.71, с. 401], если $\rho : \mathbf{X} \to \bar{R}$ выпуклая, собственная и пн.сн., то $\rho^{**} = \rho$, поэтому $\rho(\cdot)$ представляется посредством $\rho^*(\cdot)$ как

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathbf{X}^*} [\langle \zeta, X \rangle - \rho^*(\zeta)] = \sup_{\zeta \in \operatorname{dom} \rho^*} [\langle \zeta, X \rangle - \rho^*(\zeta)]. \tag{13}$$

Такое описание меры риска $\rho(\cdot)$ называется ее двойственным представлением.

Замечание 6. Данное представление справедливо для рефлексивных пространств $L_p(\Omega, \Sigma, P_0)$, $p \in (1, +\infty)$. Для пары пространств: $L_\infty(\Omega, \Sigma, P_0)$, $L_1(\Omega, \Sigma, P_0)$ первое пространство рассматривается со слабой топологией, второе — со слабо* топологией [13].

Заметим, что функцию $\varphi(\eta), \eta \in R$, можно трактовать как сужение на R функции $\tilde{\varphi} : \mathbf{X} \to \bar{R}$:

$$\tilde{\varphi}(X) = \begin{cases} \varphi(X), \; X \in R, \\ +\infty, \quad X \in \mathbf{X} \setminus R, \end{cases} \tag{14}$$

чья сопряженная функция $\tilde{\varphi}^*(\cdot)$ имеет вид

$$\tilde{\varphi}^*(\zeta) = \sup_{X \in \mathbf{X}} [\langle \zeta, X \rangle - \tilde{\varphi}(X)] = \sup_{\eta \in R} [\langle \zeta, \eta \rangle - \varphi(\eta)].$$

Пусть $\rho(\cdot)$ определяется соотношением (3) и выполняется условие (6), которое гарантирует ее собственность. Опишем ее сопряженную функцию

$$\rho^*(\zeta) = \sup_{X \in \mathbf{X}} [\langle \zeta, X \rangle - \rho(X)] = \sup_{X \in \mathbf{X}} [\langle \zeta, X \rangle - \inf_{\eta \in R} (\varphi(\eta) + \psi(X - \eta))] =$$

$$= \sup_{(X - \eta) \in \mathbf{X}, \eta \in R} [\langle \zeta, X - \eta \rangle - \psi(X - \eta) + \langle \zeta, \eta \rangle - \varphi(\eta)] =$$

$$= \sup_{X \in \mathbf{X}} [\langle \zeta, X \rangle - \psi(X)] + \sup_{\eta \in R} [\langle \zeta, \eta \rangle - \varphi(\eta)] =$$

$$= \sup_{X \in \mathbf{X}} [\langle \zeta, X \rangle - \psi(X)] + \sup_{X \in R} [\langle \zeta, X \rangle - \tilde{\varphi}(\zeta)] = \psi^*(\zeta) + \tilde{\varphi}^*(\zeta).$$

Следовательно, в соответствии с (13)

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathbf{X}^*} [\langle \zeta, X \rangle - (\tilde{\varphi}^*(\zeta) + \psi^*(\zeta))]. \tag{15}$$

Рассмотрим выпуклую меру риска, построенную с помощью конструкции (3). При условиях теоремы 1 функция $\varphi(\cdot)$ имеет вид $\varphi(\eta) = \eta$. Как нетрудно видеть, тогда для функции $\tilde{\varphi}$ из (14)

$$\tilde{\varphi}^*(\zeta) = \sup_{\eta \in R} [\langle \zeta, \eta \rangle - \eta] = \begin{cases} +\infty, \langle \zeta, 1 \rangle \neq 1, \\ 0, \quad \langle \zeta, 1 \rangle = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{dom} \tilde{\varphi}^* = \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}$ и из (15) получим

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \operatorname{dom} \psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}} [\langle \zeta, X \rangle - \psi^*(\zeta)]. \tag{16}$$

Таким образом, мера риска из конструкции (3) при условиях теоремы 1 определяется в виде (16).

Утверждение 7. Из монотонности $\psi(\cdot)$ следует, что $\operatorname{dom}\psi^* \subset \{\zeta : \zeta(\omega) \geq 0 \; a.s.\}$.

Действительно, пусть для некоторого $\zeta \in \mathbf{X}^*$ $\exists \Delta \in \Sigma : P(\Delta) > 0$, что $\zeta(\omega) < 0$ $\forall \omega \in \Delta$. Рассмотрим измеримую функцию

$$X_\Delta(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in \Delta, \\ 0, \omega \notin \Delta, \end{cases}$$

тогда $\langle \zeta, X_\Delta \rangle < 0$. Выберем $X \in \operatorname{dom}\psi$ и рассмотрим $X_t = X - tX_\Delta$. Как нетрудно видеть, для $t \geq 0$ $X \geq X_t$. Тогда из монотонности $\psi(\cdot)$ следует, что $\psi(X) \geq \psi(X_t)$, поэтому

$$\psi^*(\zeta) \geq \sup_{t \in R_+} [\langle \zeta, X_t \rangle - \psi(X_t)] \geq \sup_{t \in R_+} [\langle \zeta, X \rangle - t\langle \zeta, X_\Delta \rangle - \psi(X)] = +\infty .$$

Следовательно, $\zeta \notin \operatorname{dom}\psi^*$, что и доказывает утверждение.

Замечание 7. Из утверждения 7 и ограничения $\{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}$ следует, что супремум в (16) ищется на множестве функций вероятностных плотностей из $\operatorname{dom}\psi^*$.

Если к тому же функция $\psi(\cdot)$ из (3) положительно однородна, то ψ^* — индикаторная функция множества $\operatorname{dom}\psi^*$. Следовательно,

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}} \langle \zeta, X \rangle. \tag{17}$$

Теперь можем вычислить субдифференциал $\partial\rho(\cdot)$. В соответствии с утверждением 7.73 [13, с. 402], если выпуклая пн.сн. мера $\rho(\cdot)$ конечна в точке X, то

$$\partial\rho(X) = \arg\max_{\zeta \in \operatorname{dom}\rho^*} [\langle \zeta, X \rangle - \rho^*(X)].$$

Учитывая (16), имеем

$$\partial\rho(X) = \arg\max_{\zeta \in \operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}} [\langle \zeta, X \rangle - \psi^*(X)]. \tag{18}$$

В случае положительной однородности $\psi(\cdot)$ такая формула сводится к

$$\partial\rho(X) = \arg\max_{\zeta \in \operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}} \langle \zeta, X \rangle . \tag{19}$$

Если X — величина финансового потока, которая входит в меру риска без знака «–», то модифицируются не только две аксиомы и теорема 1, но и ее двойственное представление. В соответствии с теоремой 1а тогда $\varphi(\eta) = -\eta$ и

$$\tilde{\varphi}^*(\zeta) = \sup_{\eta \in R} [\langle \zeta, \eta \rangle + \eta] = \begin{cases} +\infty, & \langle \zeta, 1 \rangle \neq -1, \\ 0, & \langle \zeta, 1 \rangle = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{dom}\tilde{\varphi}^* = \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = -1\}$ и

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = -1\}} [\langle \zeta, X \rangle - \psi^*(\zeta)]. \tag{20}$$

Если к тому же функция $\psi(\cdot)$ положительно однородна, то

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = -1\}} \langle \zeta, X \rangle . \tag{21}$$

Если $\rho(X)$ — конечная величина, то

$$\partial\rho(X) = \underset{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*\cap\{\zeta:\langle\zeta,X\rangle=-1\}}{\arg\max} \langle\zeta, X\rangle.$$

А из антимонотонности $\psi(\cdot)$ аналогично утверждению 7 следует, что $\operatorname{dom}\psi^* \subset \{\zeta:\zeta(\omega)\le 0\ a.s.\}$.

Сравним теперь $\partial\rho(\cdot)$ из (18) с описанием $\partial\psi(\cdot)$ в виде

$$\partial\psi(X) = \underset{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*}{\arg\max}\,[\langle\zeta, X\rangle - \psi^*(X)].$$

Изучим взаимосвязь этих субдифференциалов, предварительно изложив некоторые необходимые факты.

Субдифференциал сопряженной функции $f^*(\cdot)$ в точке ζ_0 есть множество в исходном (рефлексивном) пространстве

$$\partial f^*(\zeta_0) = \{\langle x, \zeta-\zeta_0\rangle \le f^*(\zeta) - f^*(\zeta_0)\ \ \forall\zeta\in\mathbf{X}^*\}.$$

Как известно из теоремы Фенхеля–Моро [13, теорема 7.71, с. 401], для выпуклых, собственных и пн.сн. функций $f(\cdot)$ имеет место соотношение $f^{**}=f$. Поэтому справедлива следующая цепочка эквивалентностей:

$$\zeta\in\partial f(x) \Leftrightarrow f(x)+f^*(\zeta)=\langle\zeta,x\rangle \Leftrightarrow f^{**}(x)+f^*(\zeta)=\langle\zeta,x\rangle \Leftrightarrow x\in\partial f^*(\zeta).$$

Следовательно,

$$\zeta\in\partial f(x_0) \Leftrightarrow x_0\in\partial f^*(\zeta). \tag{22}$$

Для точек $X_0\in R\subset\mathbf{X}$ рассмотрим субдифференциал функции $\tilde\varphi(\cdot)$:

$$\partial\tilde\varphi(X_0) = \{\zeta\in\mathbf{X}^*: \langle\zeta, X - X_0\rangle \le \tilde\varphi(X) - \tilde\varphi(X_0)\ \forall X\in\mathbf{X}\}.$$

Как нетрудно видеть, в силу определения функции $\tilde\varphi(\cdot)$ из (14)

$$\partial\tilde\varphi(\eta_0) = \{\zeta\in\mathbf{X}^*: \langle\zeta, \eta-\eta_0\rangle = \alpha(\eta-\eta_0),\ \alpha\in\partial\varphi(\eta_0)\},$$

т.е. это множество линейных функционалов из $\mathbf{X}^*$, действие которых на прямой совпадает с действием элементов из множества $\partial\varphi(\eta_0)$.

Опишем связь между $\partial\rho(\cdot)$ и $\partial\psi(\cdot)$.

Теорема 2. При условии (6) для субдифференциала $\rho(\cdot)$ из конструкции (3) справедливо включение

$$\partial\rho(X_0) \supset \bigcup_{\eta\in R}\{\partial\psi(X_0-\eta)\cap\partial\tilde\varphi(\eta)\}.$$

Если при этом $\operatorname{int}\operatorname{dom}\psi^*\cap\operatorname{dom}\tilde\varphi^*\ne\varnothing$, то имеет место равенство

$$\partial\rho(X_0) = \bigcup_{\eta\in R}\{\partial\psi(X_0-\eta)\cap\partial\tilde\varphi(\eta)\}.$$

Доказательство. При условии (6) $\rho(\cdot)$ будет собственной. Рассмотрим разность

$$\rho(X)-\rho(X_0) = \inf_{\eta\in R}\{\varphi(\eta)+\psi(X-\eta)\} - \inf_{\eta\in R}\{\varphi(\eta)+\psi(X_0-\eta)\} \ge$$

$$\ge \varphi(\eta_X)+\psi(X-\eta_X)-\varphi(\eta)-\psi(X_0-\eta)\ \ \forall\eta\in R,$$

$$\forall\eta_X\in\underset{\eta\in R}{\arg\min}\{\varphi(\eta)+\psi(X-\eta)\}.$$

Следовательно, $\forall \eta \in R$, если $\zeta \in \partial\psi(X_0 - \eta) \cap \partial\widetilde{\varphi}(\eta)$, то

$$\rho(X) - \rho(X_0) \ge \varphi(\eta_X) - \varphi(\eta) + \psi(X - \eta_X) - \psi(X_0 - \eta) \ge$$
$$\ge \langle \zeta, \eta_X - \eta \rangle + \langle \zeta, X - X_0 \rangle - \langle \zeta, \eta_X - \eta \rangle = \langle \zeta, X - X_0 \rangle.$$

В силу определения $\partial\rho(X_0)$ это означает, что $\forall \eta \in R$ $\partial\psi(X_0 - \eta) \cap$ $\cap \partial\widetilde{\varphi}(\eta) \subset \partial\rho(X_0)$, т.е.

$$\bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \partial\widetilde{\varphi}(\eta)\} \subset \partial\rho(X_0).$$

Покажем теперь при дополнительных условиях обратное включение. Условие (6) гарантирует собственность конструкции (3), поэтому в соответствии с (22) и (15)

$$\partial\rho(X_0) = \{\zeta : X_0 \in \partial\rho^*(\zeta)\} = \{\zeta : X_0 \in \partial(\widetilde{\varphi}^* + \psi^*)(\zeta)\}.$$

По условиям теоремы $\operatorname{int}\operatorname{dom}\psi^* \cap \operatorname{dom}\widetilde{\varphi}^* \ne \varnothing$, поэтому согласно теореме Моро–Рокафеллара [13, теорема 7.4, с. 338] $\partial(\widetilde{\varphi}^* + \psi^*) = \partial\widetilde{\varphi}^* + \partial\psi^*$. Следовательно,

$$\partial\rho(X_0) = \{\zeta : X_0 \in \partial\widetilde{\varphi}^*(\zeta) + \partial\psi^*(\zeta)\} = \{\zeta \,/\, \exists \eta : \eta \in \partial\widetilde{\varphi}^*(\zeta), (X_0 - \eta) \in \partial\psi^*(\zeta)\}.$$

Функции $\widetilde{\varphi}^*, \psi^*$ выпуклые, собственные и пн. сн., тогда в силу (22)

$$\exists \eta : \eta \in \partial\widetilde{\varphi}^*(\zeta), (X_0 - \eta) \in \partial\psi^*(\zeta) \Leftrightarrow \exists \eta : \zeta \in \partial\widetilde{\varphi}(\eta), \zeta \in \partial\psi(X_0 - \eta).$$

Следовательно, $\forall \zeta \in \partial\rho(X_0) \exists \eta : \zeta \in \partial\widetilde{\varphi}(\eta) \cap \partial\psi(X_0 - \eta)$, т.е. включение

$$\partial\rho(X_0) \subset \bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \partial\widetilde{\varphi}(\eta)\}.$$

Учитывая ранее доказанное обратное включение, окончательно имеем

$$\partial\rho(X_0) = \bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \partial\widetilde{\varphi}(\eta)\},$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Теперь можем описать субдифференциал для выпуклой (когерентной) меры риска из конструкции (3) при условиях теоремы 1. С учетом $\varphi(\eta) = \eta$ и $\partial\widetilde{\varphi}(\eta) = \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}$ сформулируем следующее следствие теоремы 2.

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 1 для выпуклой меры риска $\rho(\cdot)$ из (3), то имеет место следующее включение:

$$\partial\rho(X_0) \supset \bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}\}.$$

Если при этом $\operatorname{int}\operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\} \ne \varnothing$, то справедливо равенство

$$\partial\rho(X_0) = \bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = 1\}\}.$$

Рассмотрим случай, когда X — величина финансового потока, входящая в конструкцию (3) без знака «–». Тогда следствие модифицируется следующим образом.

Следствие 1а. Если выполняются условия теоремы 1а для выпуклой меры риска $\rho(\cdot)$ из (3), то имеет место следующее включение:

$$\partial\rho(X_0) \supset \bigcup_{\eta \in R} \{\partial\psi(X_0 - \eta) \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1 \rangle = -1\}\}.$$

Если при этом $\operatorname{int}\operatorname{dom}\psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1\rangle = -1\} \neq \varnothing$, то справедливо равенство

$$\partial\rho(X_0) = \bigcup_{\eta\in R}\{\partial\psi(X_0-\eta)\cap\{\zeta : \langle\zeta, 1\rangle = -1\}\}.$$

Минимизация и применение меры риска в ограничениях. Рассмотрим минимизацию меры риска $\rho(\cdot)$ на некотором множестве $C \subset \mathbf{X}$. Обозначим $\Phi(X,\eta) = \eta + \psi(X-\eta)$, тогда имеем

$$\rho(X) = \inf_{\eta\in R}\Phi(X,\eta) \text{ и } \inf_{X\in C}\rho(X) = \inf_{X\in C}\inf_{\eta\in R}\Phi(X,\eta).$$

Если условие (8) обеспечивает достижение минимума по η, то

$$\inf_{X\in C}\rho(X) = \inf_{X\in C}\min_{\eta\in R}(\eta+\psi(X-\eta)).$$

Если при этом инфимум достигается, то $\inf\limits_{X\in C}\rho(X) = \min\limits_{X\in C}\rho(X)$. Тогда

$$\min_{X\in C}\rho(X) = \min_{X\in C}\min_{\eta\in R}[\eta+\psi(X-\eta)] = \min_{(X,\eta)\in C\times R}\Phi(X,\eta), \tag{23}$$

где $\Phi(X,\eta)$ — выпуклая функция по обоим аргументам. Ее выпуклость доказывается аналогично тому, как это сделано далее для композитной функции. Если множество C выпуклое, то минимизация $\rho(\cdot)$ сводится к решению выпуклой задачи из правой части (23).

Композитная функция и условия экстремума. Пусть с.в. X зависит от переменной $x\in R^n$ в виде $X(\omega) = f(x,\omega)$, $x\in R^n$, где $f(x,\omega)$ — выпуклая и непрерывная по x функция. Учитывая пн.сн. $\rho(\cdot)$ на $\operatorname{int}(\operatorname{dom}\rho)$ и непрерывность $f(x,\omega)$ по x, нетрудно показать пн.сн. по x так называемой композитной функции $\rho(f(x,\cdot))$.

Рассмотрим теперь функцию $F(x,\eta) = \eta+\psi(f(x,\cdot)-\eta)$. Покажем, что она выпукла по обеим переменным.

Действительно, из выпуклости по x функции $f(x,\omega)$, а также выпуклости и монотонности функции $\psi(\cdot)$ нетрудно записать следующую цепочку соотношений:

$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda\eta_1+(1-\lambda)\eta_2) =$$

$$= \lambda\eta_1+(1-\lambda)\eta_2+\psi(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\cdot)-\lambda\eta_1-(1-\lambda)\eta_2) \le$$

$$\le \lambda\eta_1+(1-\lambda)\eta_2+\psi(\lambda f(x_1,\cdot)+(1-\lambda)f(x_2,\cdot)-\lambda\eta_1-(1-\lambda)\eta_2) \le$$

$$\le \lambda(\eta_1+\psi(f(x_1,\cdot)-\eta_1))+(1-\lambda)(\eta_2+\psi(f(x_2,\cdot)-\eta_2)) \le$$

$$\le \lambda F(x_1,\eta_1)+(1-\lambda)F(x_2,\eta_2).$$

Замечание 8. Из выпуклости $F(x,\eta)$ по обеим переменным следует выпуклость функции $\theta(x) = \rho(f(x,\cdot))$.

Поэтому выпуклая, собственная и пн.сн. функция $\theta(x) = \rho(f(x,\cdot))$ достигает минимума на выпуклом замкнутом и ограниченном множестве $M\subset R^n$ и

$$\min_{x\in M}\rho(f(x,\cdot)) = \min_{x\in M}\min_{\eta\in R}(\eta+\psi(f(x,\cdot)-\eta)) = \min_{x\in M,\,\eta\in R}F(x,\eta). \tag{24}$$

Это означает, что согласно (24) такая минимизация сводится к поиску минимума выпуклой функции $F(x,\eta) = \eta+\psi(f(x,\cdot)-\eta)$ на выпуклом замкнутом множестве $M\times R$, т.е. к задаче выпуклого программирования.

Обозначим $z = (x,\eta)$, $g(z,\omega) = f(x,\omega)-\eta$. Покажем, что эта функция выпукла по z:

$$g(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2,\omega)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\omega)-\lambda\eta_1-(1-\lambda)\eta_2\le$$
$$\le\lambda(f(x_1,\omega)-\eta_1)+(1-\lambda)(f(x_2,\omega)-\eta_2)=\lambda g(z_1,\omega)+(1-\lambda)g(z_2,\omega).$$

Рассмотрим субдифференциал функции $F(z)$, где $z=(x,\eta)$, $z\in M\times R$. Поскольку $F(x,\eta)=\eta+\psi(g(z,\cdot))$, то

$$\partial F(z)=\{z^*=(x^*,\alpha+1):(x^*,\alpha)\in\partial\psi(g(z,\cdot))\},\qquad(25)$$

где $\psi(g(z,\cdot))$ — композитная функция. Функция $\psi(\cdot)$ монотонна и выпукла, $g(z,\cdot)$ выпукла по z, поэтому в соответствии с [13, теорема 6.11, с. 268]

$$\partial\psi(g(z_0,\cdot))=\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\zeta\in\partial\psi(g(z_0,\cdot))}\int_\Omega\partial g_\omega(z_0)\zeta(\omega)dP(\omega)\right),\qquad(26)$$

где cl — слабо* замыкание множества.

Следовательно, $\partial F(z_0)$ описывается в виде (25), (26), где $z=(x,\eta)$, $g(z,\omega)=f(x,\omega)-\eta$. Поэтому, переходя к исходным обозначениям, получаем

$$\partial F(x_0,\eta_0)=$$
$$=\left\{(x^*,\alpha+1):(x^*,\alpha)\in\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\zeta\in\partial\psi(f(x_0,\cdot)-\eta_0)}\int_\Omega\partial(f_\omega(x_0)-\eta_0)\zeta(\omega)dP(\omega)\right)\right\}.\qquad(27)$$

Поскольку рассматривается выпуклая оптимизационная задача $\min\{F(z):z\in M\times R\}$ в конечномерных пространствах, используем результаты выпуклого анализа. Отметим, что $\mathrm{ri}\,C$ обозначает относительную внутренность множества C.

Если $\mathrm{ri}(M\times R)\cap\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\,F\ne\varnothing$ и F непрерывна в точке $z_0\in\mathrm{dom}\,F$, то необходимым и достаточным условием минимума $F(z)$ в z_0 есть $\partial F(z_0)\cap$ $\cap(\mathrm{con}(M\times R-z_0))^*\ne\varnothing$ [1, теорема 27.4, с. 270], где $(\cdot)^*$ обозначает двойственный конус для $\mathrm{con}(M\times R-z_0)$.

Учитывая $F(x,\eta)=\eta+\psi(f(x,\cdot)-\eta)$, $z_0=(x_0,\eta_0)$ и формулу (27), окончательно получаем такое условие минимума в виде

$$\exists(x^*,\alpha)\in(\mathrm{con}(M\times R-(x_0,\eta_0)))^*,$$

что $(x^*,\alpha-1)\in\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\zeta\in\partial\psi(f(x_0,\cdot)-\eta_0)}\int_\Omega\partial(f_\omega(x_0)-\eta_0)\zeta(\omega)dP(\omega)\right).$

Использование в ограничениях. Рассмотрим ограничение сверху на меру риска $\rho(X)\le\gamma$ на множестве $X\in C$. Как нетрудно видеть, при условиях (23) его можно представить в эквивалентном виде

$$\rho(X)\le\gamma,\ X\in C\Leftrightarrow\forall X\in C\ \exists\eta\in R:\eta+\psi(X-\eta)\le\gamma.$$

Для композитной функции ограничение подобного вида также представимо в эквивалентном виде

$$\rho(f(x,\cdot))\le\gamma,\ x\in M\Leftrightarrow\forall x\in M\ \exists\eta\in R:\eta+\psi(f(x,\cdot)-\eta)\le\gamma.$$

Такое условие сложно учесть при вычислениях, поэтому воспользуемся соответствующим двойственным представлением меры риска. Для выпуклой меры риска согласно (16)

$$\rho(X)\le\gamma,\ X\in C\Leftrightarrow\langle\zeta,X\rangle-\psi^*(\zeta)\le\gamma,\ \zeta\in(\mathrm{dom}\,\psi^*\cap\{\zeta:\langle\zeta,1\rangle=1\}),\ X\in C.$$

Для композитной функции подобное ограничение описывается в виде

$$\rho(f(x,\cdot)) \le \gamma, x \in M \Leftrightarrow \langle \zeta, f(x,\cdot)\rangle - \psi^*(\zeta) \le \gamma, \zeta \in (\mathrm{dom}\ \psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1\rangle = 1\}), x \in M.$$

В случае, когда X — величина финансового потока, входящая в конструкцию (3) без знака «–», такие ограничения соответственно имеют вид

$$\rho(X) \le \gamma, X \in C \Leftrightarrow \langle \zeta, X\rangle - \psi^*(\zeta) \le \gamma, \zeta \in (\mathrm{dom}\ \psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1\rangle = -1\}), X \in C,$$

$$\rho(f(x,\cdot)) \le \gamma, x \in M \Leftrightarrow \langle \zeta, f(x,\cdot)\rangle - \psi^*(\zeta) \le \gamma,$$

$$\zeta \in (\mathrm{dom}\ \psi^* \cap \{\zeta \colon \langle \zeta, 1\rangle = -1\}),\ x \in M.$$

Как упоминалось ранее, если $\rho(\cdot)$ есть КМР, то $\psi^*(\cdot)$ — индикаторная функция множества $\mathrm{dom}\ \psi^*$, следовательно, в левой части полученных неравенств нет компоненты $\psi^*(\zeta)$.

Таким образом, соотношения (23) и (24) можно использовать для поиска минимума функций $\rho(\cdot)$ и $\rho(f(\cdot))$, а представленные соотношения с функцией $\psi^*(\cdot)$ — для учета ограничений сверху на них. Это позволяет применять в подобных задачах стандартные средства выпуклого программирования.

ПРИМЕРЫ МЕР РИСКА С КОНСТРУКЦИЕЙ ИНФИМАЛЬНОЙ КОНВОЛЮЦИИ

Приведем примеры известных мер риска с конструкцией (3).

Пример 1. Вначале рассмотрим $CVaR_\alpha(\cdot)$, представленную в виде (2). Несложно проверить, что все условия теоремы 1 для функции $\psi(X) = \frac{1}{1-\alpha} E(X)_+$ выполнены. В частности, условие (9): $\frac{1}{1-\alpha} E(\eta)_+ > \eta \ \ \forall \eta \in R, \eta \ne 0$.

Эта мера описывается в виде (17)

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathrm{dom}\ \psi^* \cap \{\zeta : \langle \zeta, 1\rangle = 1\}} \langle \zeta, X\rangle,$$

где

$$\psi^*(\zeta) = \sup_X [\langle \zeta, X\rangle - \psi(X)] = \sup_X \left[\langle \zeta, X\rangle - \frac{1}{1-\alpha}\langle \mathbf{1}, X_+\rangle\right] =$$

$$= \sup_X \left[\langle \zeta - \frac{1}{1-\alpha}, X_+\rangle - \langle \zeta, X_-\rangle\right],$$

здесь $\mathbf{1} \in \mathbf{X}^*$ — линейный функционал, действующий как $\zeta(\omega) = 1 \ \forall \omega \in \Omega$, т.е. $\langle \mathbf{1}, X\rangle = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$.

Аналогично доказательству утверждения 7 можно показать: если для некоторого $\zeta \in \mathbf{X}^*$ $\exists \Delta \in \Sigma \colon P(\Delta) > 0$ и $\forall \omega \in \Delta\ \zeta(\omega) < 0$ или $\forall \omega \in \Delta\ \zeta(\omega) > \frac{1}{1-\alpha}$, то $\psi^*(\zeta) = +\infty$.

Следовательно, $\mathrm{dom}\ \psi^* = \left\{0 \le \zeta(\cdot) \le \frac{1}{1-\alpha}\ a.s.\right\}$. Учитывая дополнительное ограничение из (17), окончательно получаем

$$CVaR_\alpha(X) = \sup_\zeta \left[\langle \zeta, X\rangle : 0 \le \zeta \le \frac{1}{1-\alpha}\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega) dP(\omega) = 1\right].$$

Соответственно субдифференциал в точке X ее конечного значения описывается в виде (19) как

$$\partial CVaR_\alpha(X) = \arg\max_{\zeta} \left\{ \langle \zeta, X\rangle : 0 \le \zeta \le \frac{1}{1-\alpha}\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega) dP(\omega) = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \zeta \in \mathbf{X}^* : \int_\Omega \zeta(\omega) dP(\omega) = 1, \quad \begin{array}{l} \zeta(\omega) = 0, \text{ если } X(\omega) < VaR_\alpha(X), \\ \zeta(\omega) \in [0, 1/(1-\alpha)], \text{ если } X(\omega) = VaR_\alpha(X), \\ \zeta(\omega) = 1/(1-\alpha), \text{ если } X(\omega) > VaR_\alpha(X), \end{array} \right.$$

где $VaR_\alpha(X) = \inf\{z \in R : F_X(z) \ge \alpha\}$, а $F_X(\cdot)$ — функция распределения с.в. X.

Такое представление субдифференциала хорошо известно (см. например, [13, с. 273]).

Пример 2. Рассмотрим теперь оптимизируемый эквивалент определенности из [2]:

$$-S_u(X) = \inf_{\eta \in R}\{-\eta - Eu(X-\eta)\} = \inf_{\eta \in R}\{\varphi(\eta) + \psi(X-\eta)\}, \tag{28}$$

где $\varphi(\eta) = -\eta, \psi(X) = -Eu(X)$.

Поскольку в (28) с.в. X описывает величину финансового потока, то в соответствии с теоремой 1а $-S_u(X)$ является выпуклой мерой риска, если $\psi(\cdot)$ пн.сн., выпуклая, собственная, монотонная в смысле (A1a) и $\psi(0) = 0$, а также выполняется условие (6).

В силу обычных для функции полезности $u(\cdot)$ свойств монотонности и вогнутости проверке подлежат только $\psi(0) = 0$ и условие (6).

Первое условие означает, что $u(0) = 0$, а условие (6) имеет вид

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\psi(\lambda\xi) - \psi(0)}{\lambda} > -\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\varphi(-\lambda\xi) - \varphi(0)}{\lambda} \quad \forall \xi \in R, \xi \ne 0,$$

или в силу того, что $\psi(0) = \varphi(0) = 0$ и $\varphi(\eta) = -\eta$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-Eu(\lambda\xi)}{\lambda} > -\xi \quad \forall \xi \in R, \xi \ne 0.$$

Воспользовавшись выпуклостью функции $-Eu(\cdot)$, нетрудно (аналогично неравенству (10)) получить достаточные условия для выполнения (6)

$$Eu(\xi) < \xi \quad \forall \xi \in R, \xi \ne 0. \tag{29}$$

Таким образом, чтобы функция $-S_u(X)$ из (28) была выпуклой мерой риска достаточно двух условий для функции полезности: $u(0) = 0$ и (29). Если при этом функция $u(\cdot)$ положительно однородна, то $-S_u(X)$ есть КМР. Например, такими функциями могут быть [14] $u_1(t) = b(1 - e^{-t/b}), 0 < b \le +\infty$, и кусочно-линейная функция

$$u_2(t) = \begin{cases} \gamma_2 t, & t \le 0, \\ \gamma_1 t, & t > 0, \end{cases} \quad \text{для } 0 \le \gamma_1 < 1 < \gamma_2.$$

Соотношение констант γ_1, γ_2 в $u_2(\cdot)$ сразу гарантирует выполнение условий (29). Нетрудно проверить, что функции $\psi_i(\cdot) = -Eu_i(\cdot), i = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 1а, причем $\psi_2(\cdot)$ положительно однородна. Поэтому $u_1(\cdot)$ с помощью соотношения (29) определяет выпуклую меру риска, а $u_2(\cdot)$ — КМР.

Рассмотрим теперь двойственное представление (20) для $-S_u(X)$:

$$-S_u(X)=\sup_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta):\zeta\le 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right].$$

Тогда

$$\psi^*(\zeta)=\sup_X\,[\langle\zeta, X\rangle+\langle\mathbf{1}, u(X)\rangle], \qquad (30)$$

где $\mathbf{1}\in\mathbf{X}^*$ — линейный функционал, действующий как $\zeta(\omega)=1\ \ \forall\omega\in\Omega$, т.е. $\langle\mathbf{1}, X\rangle=\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$,

$$-S_u(X)=\sup_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta):\int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right].$$

Соответственно субдифференциал в точке конечного значения этой функции описывается в виде (20) как

$$\partial(-S_u(X))=\operatorname*{arg\,max}_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*}\left\{\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta):\int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right\}.$$

Для кусочно-линейной функции полезности $u_2(t)=\begin{cases}\gamma_2 t,\ t\le 0,\\ \gamma_1 t,\ t>0,\end{cases}$ рассмотрим $\psi^*(\cdot)$ из (30). Тогда $\psi(X)=-Eu_2(X)=-\gamma_1 E(X_+)-\gamma_2 E(X_-)$ и

$$\psi^*(\zeta)=\sup_X\,[\langle\zeta, X\rangle+\gamma_1\langle\mathbf{1}, X_+\rangle+\gamma_2\langle\mathbf{1}, X_-\rangle]=\sup_X[\langle\zeta+\gamma_1\mathbf{1}, X_+\rangle+\langle\zeta+\gamma_2\mathbf{1}, X_-\rangle].$$

Аналогично доказательству для утверждения 7 можно показать, если для некоторого $\zeta\in\mathbf{X}^*\ \exists\Delta\in\Sigma: P(\Delta)>0$ и $\zeta(\omega)<-\gamma_2\ \ \forall\omega\in\Delta$ или $\zeta(\omega)>-\gamma_1\ \ \forall\omega\in\Delta$, то $\psi^*(\zeta)=+\infty$.

Следовательно, $\operatorname{dom}\psi^*=\{-\gamma_2\le\zeta(\cdot)\le-\gamma_1\ a.s.\}$. Учитывая положительную однородность функции $\psi(\cdot)=-Eu_2(\cdot)$, согласно (21) и (20) имеем

$$-S_u(X)=\sup_\zeta\left[\langle\zeta, X\rangle:-\gamma_2\le\zeta\le-\gamma_1\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right],$$

$$\partial(-S_u(X))=\operatorname*{arg\,max}_\zeta\left\{\langle\zeta, X\rangle:-\gamma_2\le\zeta\le-\gamma_1\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right\}=$$

$$=\left\{\zeta\in\mathbf{X}^*:\int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1,\ \begin{array}{ll}\zeta(\omega)=-\gamma_2, & \text{если } X(\omega)<\eta(X),\\ \zeta(\omega)\in[-\gamma_2,-\gamma_1], & \text{если } X(\omega)=\eta(X),\\ \zeta(\omega)=-\gamma_1, & \text{если } X(\omega)>\eta(X),\end{array}\right.$$

где $\eta(X)$ — значение аргумента в решении уравнения (29) при $\varphi(\eta)=-\eta$, $\psi(X)=-Eu_2(X)=-\gamma_1 E(X_+)-\gamma_2 E(X_-)$.

Замечание 9. Как отмечено в [14], если рассматривать в качестве аргумента X величину потерь, то мера $-S_{u_2}(\cdot)$ при $\gamma_1=0, \gamma_2=\dfrac{1}{1-\alpha}$ совпадает с $CVaR_\alpha(\cdot)$. Следовательно, $CVaR_\alpha(\cdot)$ является ее частным случаем.

Пример 3. Рассмотрим понятие КМР Высших моментов, изученное в [10]:

$$\rho(X)=\inf_{\eta\in R}\left\{\eta+\frac{1}{1-\alpha}\|(X-\eta)_+\|_p\right\}=\inf_{\eta\in R}\{\eta+\psi(X-\eta)\},$$

где $\psi(X)=\dfrac{1}{1-\alpha}\|(X)_+\|_p$ для $\alpha\in(0,1)$.

Нетрудно видеть, что условие (9) выполняется, поскольку

$$\psi(\eta)=\frac{1}{1-\alpha}\|(\eta)_+\|_p=\frac{1}{1-\alpha}|\eta|>\eta\quad\forall\eta\in R,\ \forall\alpha\in(0,1).$$

Так как $\psi(\cdot)$ выпуклая, монотонная и положительно однородная, то $\rho(X)$ есть КМР и описывается в виде (19)

$$\rho(X)=\sup_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^*\cap\{\zeta:\langle\zeta,1\rangle=1\}}\langle\zeta,X\rangle,$$

где

$$\psi^*(\zeta)=\sup_X\left[\langle\zeta,X\rangle-\frac{1}{1-\alpha}\|X_+\|_p\right]=\sup_X\left[\langle\zeta,X_+\rangle-\frac{1}{1-\alpha}\|X_+\|_p+\langle\zeta,X_-\rangle\right].$$

Аналогично примеру 1 можно показать, что $\operatorname{dom}\psi^*\subset\{\zeta(\cdot)\ge 0\ a.s.\}$. Кроме того,

$$\sup_{X_+}\left[\langle\zeta,X_+\rangle-\frac{1}{1-\alpha}\sup_{\|\zeta\|\le 1}\langle\zeta,X_+\rangle\right]=\begin{cases}0, & \|\zeta\|_q\le 1/(1-\alpha),\\ +\infty, & \|\zeta\|_q>1/(1-\alpha).\end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{dom}\psi^*=\{\zeta(\cdot)\ge 0\ a.s., \|\zeta\|_q\le 1\}$. С учетом положительной однородности функции $\psi(\cdot)$ меру $\rho(\cdot)$ согласно (17) можно описать как

$$\rho(X)=\sup_\zeta\left[\langle\zeta,X\rangle:\|\zeta\|_q\le 1,\zeta\ge 0\ a.s.,\int_\Omega\zeta(\omega)dP(\omega)=1\right],$$

а субдифференциал в точке ее конечного значения согласно (18) — как

$$\partial\rho(X)=\arg\max_\zeta\left\{\langle\zeta,X\rangle:\|\zeta\|_q\le 1,\zeta\ge 0\ a.s.,\int_\Omega\zeta(\omega)dP(\omega)=1\right\}.$$

Пример 4. Рассмотрим вариант построения меры риска с использованием детерминированного эквивалента из [11]

$$\rho(X)=\inf_{\eta\in R}\left\{\eta+\frac{1}{1-\alpha}\upsilon^{-1}E[\upsilon(X-\eta)]\right\}=\inf_{\eta\in R}\{\eta+\psi(X-\eta)\},\tag{31}$$

где $\psi(X)=\dfrac{1}{1-\alpha}\upsilon^{-1}E[\upsilon(X)]$ при $\alpha\in(0,1)$, а в качестве $\upsilon(\cdot)$ рассматривается одностороння нормированная функция «неполезности», строящаяся следующим образом. Положим $\upsilon_1(t)=-u(-t)+u(0)$, определим $\upsilon(t)=\begin{cases}\upsilon_1(t), & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

Следовательно, $\upsilon^{-1}(\alpha)=\sup\{t\in R:\upsilon(t)=a\}$.

Как показано в [11], такая $\upsilon(\cdot)$ гарантирует выполнение условия (9):

$$\psi(\eta)=\frac{1}{1-\alpha}\upsilon^{-1}\upsilon(\eta)=\frac{1}{1-\alpha}\upsilon^{-1}\upsilon((\eta)_{+})=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\sup\{t:\upsilon(t)=\upsilon((\eta)_{+})\}\geq\frac{1}{1-\alpha}(\eta)_{+}>\eta\,.$$

Монотонность $\psi(\cdot)$ очевидна. Для ее выпуклости функция $\upsilon(\cdot)$ должна быть строго выпуклой и трижды непрерывно дифференцируемой, а функция $\dfrac{\upsilon'(\cdot)}{\upsilon''(\cdot)}$ — строго выпуклой [2, теорема 1, с. 1450]. В качестве функции $\upsilon(\cdot)$ с указанными свойствами в [11] рассматривалась $\upsilon(\cdot)=-1+\lambda^{(t)_{+}}, \lambda>1$.

Тогда $\rho(\cdot)$ описывается своим двойственным представлением как

$$\rho(X)=\sup_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^{*}}\left[\langle\zeta,X\rangle-\psi^{*}(\zeta):\int_{\Omega}\zeta(\omega)dP(\omega)=1\right],$$

где $\psi^{*}(\zeta)=\sup\limits_{X}\left[\langle\zeta,X_{+}\rangle-\dfrac{1}{1-\alpha}\upsilon^{-1}E[\upsilon(X_{+})]+\langle\zeta,X_{-}\rangle\right]$. Поэтому аналогично примеру 1 $\operatorname{dom}\psi^{*}\subset\{\zeta(\cdot)\geq 0\ a.s.\}$.

Соответственно ее субдифференциал в точке конечного значения описывается в виде (18) как

$$\partial\rho(X)=\operatorname*{arg\,max}_{\zeta\in\operatorname{dom}\psi^{*}}\left\{\langle\zeta,X\rangle-\psi^{*}(\zeta):\zeta\geq 0\ a.s.,\int_{\Omega}\zeta(\omega)dP(\omega)=1\right\}.$$

Пример 5. Рассмотрим КМР в виде (3) из [12]:

$$\rho_{1}(X)=-\sup_{\eta\in R}\{-\beta\eta+\alpha u^{-1}Eu(X+\eta)\},\ 0<\alpha<\beta<1. \tag{32}$$

Здесь коэффициенты α,β имеют экономическую интерпретацию. Например, $\beta=1/(1+r_{0})$ — элемент дисконтирования, который приводит будущую чистую стоимость к текущей. Тогда $\rho_{1}(\cdot)$ — так называемая монетарная мера риска, для которой трансляционная инвариантность заменяется денежной в следующем смысле: (A3b) $\rho_{1}(X+a)=\rho_{1}(X)+\beta a, a\in R$.

Как нетрудно видеть,

$$\rho_{1}(X)=\inf_{\eta\in R}\{-(-\beta\eta)-\alpha u^{-1}Eu(X+\eta)\}=\inf_{\eta\in R}\{-\beta\eta-\alpha u^{-1}Eu(X-\eta)\}=$$

$$=\inf_{\eta\in R}\{\varphi(\eta)+\psi(X-\eta)\},$$

где $\varphi(\eta)=-\beta\eta, \psi(X)=-\gamma u^{-1}Eu(X)$.

Для сведения к конструкции (3) поделим эту функцию на β, тогда

$$\frac{1}{\beta}\rho_{1}(X)=\rho(X)=\inf_{\eta\in R}\{\varphi(\eta)+\psi(X-\eta)\},$$

где $\varphi(\eta)=-\eta, \psi(X)=-\dfrac{\alpha}{\beta}u^{-1}Eu(X)$.

Аналогично тому, как это делалось в примере 1, условие (9) можно свести к условию $u^{-1}Eu(\eta)<\dfrac{\beta}{\alpha}\eta$, которое при $0<\alpha<\beta$ всегда выполняется.

Как и в примере 4, монотонность $\psi(\cdot)$ очевидна, а для ее выпуклости функция $u(\cdot)$ должна быть строго вогнутой и трижды непрерывно дифференцируемой, а функция $\dfrac{u'(\cdot)}{u''(\cdot)}$ — строго вогнутой. Такой класс функций называется функциями с увеличивающимся относительным избеганием риска [15]. Следовательно, функции полезности $u(\cdot)$ из этого класса с помощью (32) определяют выпуклую меру риска. Тогда в точке X своего конечного значения $\rho_1(\cdot)$ из (32) описывается двойственным представлением как

$$\rho_1(X)=\frac{1}{\beta}\rho(X)=\frac{1}{\beta}\sup_{\zeta\in \operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta): \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right],$$

где $\psi^*(\zeta)=\sup\limits_X\left[\langle\zeta, X\rangle-\dfrac{\alpha}{\beta}u^{-1}Eu(X)\right]$.

Из антимонотонности функции $\psi(X)=-\dfrac{\alpha}{\beta}u^{-1}Eu(X)$ аналогично примеру 1 можно показать, что $\operatorname{dom}\psi^*\subset\{\zeta(\cdot)\le 0\ a.s.\}$. Поэтому

$$\rho_1(X)=\frac{1}{\beta}\sup_{\zeta\in \operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta): \zeta\le 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right].$$

Соответственно ее субдифференциал в такой точке X описывается в виде (20) как

$$\partial\rho_1(X)=\frac{1}{\beta}\operatorname*{arg\,max}_{\zeta\in \operatorname{dom}\psi^*}\left\{\langle\zeta, X\rangle-\psi^*(\zeta): \zeta\le 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right\}.$$

Если выбрать $u(\cdot)$ из класса функций полезности с постоянным относительным избеганием риска, то соответствующая функция $\psi(\cdot)$ оказывается положительно однородной. Действительно, тогда из [15, теорема 6, с. 135] следует, что при функциях из этого класса для аргумента λX премия за риск не зависит от λ, т.е.

$$\frac{E(\lambda X)}{\lambda}-\frac{u^{-1}Eu(\lambda X)}{\lambda}=E(X)-\frac{u^{-1}Eu(\lambda X)}{\lambda}=\text{const}\quad \forall\lambda>0.$$

Это означает, что функция $\psi(\cdot)=-\dfrac{\alpha}{\beta}u^{-1}Eu(\cdot)$ положительно однородна.

Поэтому функция полезности $u(\cdot)$ из этого класса с помощью (32) определяет КМР. Следовательно, такая мера риска в точке X ее конечного значения со своим субдифференциалом определяется как

$$\rho(X)=\frac{1}{\beta}\sup_{\zeta\in \operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle: \zeta\le 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right],$$

$$\partial\rho(X)=\frac{1}{\beta}\operatorname*{arg\,max}_{\zeta\in \operatorname{dom}\psi^*}\left[\langle\zeta, X\rangle: \zeta\le 0\ a.s., \int_\Omega \zeta(\omega)dP(\omega)=-1\right].$$

Отметим, что если теперь для некоторой выпуклой функции $f(x, \omega)$ на выпуклом замкнутом множестве $M \subset R^n$ необходимо минимизировать композитную функцию $\rho(f(x,\cdot))$ для мер риска из приведенных примеров, то нетрудно сформулировать соответствующие задачи выпуклой оптимизации, к которым сводится такая минимизация. В частности, это можно сделать для случая, когда с помощью композитной функции описываются задачи оптимизации портфеля (см., например, соответствующие постановки из [16, 17]).

В отличие от аппарата полиэдральных когерентных мер, эффективно работающего в условиях неопределенности для линейных задач (см. [18] и ссылки к ней), описанный математический аппарат предназначен для работы с более общими выпуклыми проблемами.

В заключение отметим работу [19] с описанием моделей катастрофических и террористических рисков, которые сведены к конечномерным проблемам стохастического программирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучаются меры риска, построенные в форме инфимальной конволюции (3) двух функций-компонент. Это позволяет использовать в качестве компонент такой конструкции функции, которые важны для учета риска, но не имеют свойств меры, например детерминированный эквивалент.

Изучено двойственное представление и субдифференциал подобных конструкций, описаны условия экстремума, а также возможности их оптимизации и использования в ограничениях. Оказывается, что для минимизации подобных мер риска удобно использовать их исходное описание, а для применения в ограничениях — двойственное представление. Это позволяет применять для задач оптимизации с их использованием стандартные средства выпуклого программирования.

В качестве примеров рассмотрен ряд известных мер риска с подобной конструкцией, которые изучаются в рамках предлагаемого подхода. Это позволяет систематизировать известные ранее результаты и облегчить потенциальный поиск новых вариантов мер риска. Отметим, такой поиск — процесс неформальный, поскольку новые меры должны не только иметь изученные в работе технические свойства, но и допускать содержательную интерпретацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rockafellar R.T. Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 p.
2. Ben-Tal A., Teboulle M. Expected utility, penalty functions and duality in stochastic nonlinear programming. *Management Science*. 1986. Vol. 32, N 11. P. 1445–1466.
3. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*. 2000. Vol. 2, N 3. P. 21–41.
4. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional upsilon alue-at-risk for general loss distribution. *J. Banking and Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471.
5. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall. *J. Banking and Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1487–1503.
6. Cherny A.S. Weighted V@R and its properties. *Finance and Stochastics*. 2006. Vol. 10, N 3. P. 367–393.
7. Föllmer H., Schied A. Stochastic finance: an introduction in discrete time, 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter, 2004. 459 p.
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999. Vol. 9, N 3. P. 203–228.

9. Föllmer H., Schied A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance Stochastics*. 2002. Vol. 6, N 4. P. 429–447.

10. Krokhmal P.A. Higher moment coherent risk measures. *Quantitative Finance*. 2007. Vol. 7, N 4. P. 373–387.

11. Vinel A., Krokhmal P.A. Certainty equivalent measures of risk. *Annals of Operations Research*. 2017. Vol. 249, N 1–2. P. 75–95.

12. Geissel S., Sass J., Seifried F.T. Optimal expected utility risk measures. *Statistics* & *Risk Modeling*. 2018. Vol. 35, N 1–2. P. 73–87.

13. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming. Modeling and theory. Philadelphia: SIAM, 2009. 436 p.

14. Ben-Tal A., Teboulle M. An old-new concept of convex risk measures: An optimized certainty equivalent. *Mathematical Finance*. 2007. Vol. 17, N 3. P. 449–476.

15. Pratt J.W. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*. 1964. Vol. 32, N 1–2. P. 122–136.

16. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolio on the reward-risk ratio. *Cybernetics and System Analysis*. 2014. Vol. 50, N 5. P. 724–740.

17. Kirilyuk V.S. Expected utility theory, optimal portfolios, and polyhedral coherent risk measures. *Cybernetics and System Analysis*. 2014. Vol. 50, N 6. P. 874–883.

18. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and robust optimization. *Cybernetics and System Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 999–1008.

19. Haivoronskyy O.O., Ermoliev Yu.M., Knopov P.S., Norkin V.I. Mathematical modeling of distributed catastrophic and terrorist risks. *Cybernetics and System Analysis*. 2015. Vol. 51, N 1. P. 85–95.

Надійшла до редакції 08.04.2020

В.С. Кирилюк

МІРИ РИЗИКУ У ВИГЛЯДІ ІНФІМАЛЬНОЇ КОНВОЛЮЦІЇ

Анотація. Вивчено властивості мір ризику, побудованих у вигляді інфімальної конволюції. Описано двоїсте представлення таких мір, їхній субдиференціал, умови екстремуму, представлення для оптимізації та використання в обмеженнях. Результати вивчення демонструються на прикладах відомих мір ризику такої конструкції. Це дає змогу систематизувати відомі результати і полегшити потенційний пошук нових варіантів мір ризику.

Ключові слова: інфімальна конволюція, опукла міра ризику, когерентна міра ризику, conditional value-at-risk, двоїсте представлення, субдиференціал, очікувана корисність, детермінований еквівалент.

V.S. Kirilyuk

RISK MEASURES IN THE FORM OF INFIMAL CONVOLUTION

Abstract. The properties of risk measures in the form of infimal convolution are studied. The dual representation of such measures, their subdifferential, extremum conditions, representation for optimization and use in constraints are described. The results of the study are demonstrated by examples of known risk measures of such construction. This allows systematization of the well-known results and facilitates a potential search for new variants of risk measures.

Keywords: infimal convolution, convex risk measure, coherent risk measure, conditional value-at-risk, dual representation, subdifferential, expected utility, deterministic equivalent.

Кирилюк Владимир Семенович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: vlad00@ukr.net.