НОВІ ЗАСОБИ
КІБЕРНЕТИКИ, ІНФОРМАТИКИ,
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ТА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

С.Л. КРЫВЫЙ, В.Н. ОПАНАСЕНКО, С.Б. ЗАВЬЯЛОВ

УДК 516.813

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ И ОТНОШЕНИЯМИ В АВТОМАТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Аннотация. Рассматриваются логические операции над нечеткими множествами и отношениями в автоматной интерпретации средствами логических сетей с возможностью адаптации. Приведены примеры синтеза сетей с помощью рассмотренных автоматов на основе структур выражений для заданных нечетких множеств и отношений.

Ключевые слова: нечеткие множества, отношения, логические операции.

ВВЕДЕНИЕ

Адаптация аппаратных средств к реализации операций разбиения векторов с целыми координатами (см. [1, 2]) обусловливает возможность реализации операций над нечеткими множествами и отношениями. Предлагаемый в настоящей статье подход к выполнению указанных операций известен как «технология реконфигурируемого компьютинга» [3], и его воплощение в реальные проекты стало возможным благодаря появлению программируемых интегральных схем [4–6]. В частности, в работах [7, 8] рассматривался метод решения задачи адаптации аппаратных средств вместе с формализованным обоснованием соответствующих алгоритмов на основе адаптивных логических сетей (АЛС), ориентированных на реализацию алгоритмов разбиения множества векторов с целыми координатами. С использованием алгоритмов такого разбиения в настоящей работе на основе автоматного подхода предлагаются алгоритмы выполнения логических операций над нечеткими множествами (НМ) и нечеткими отношениями (НО).

1. ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ И НЕЧЕТКИМИ ОТНОШЕНИЯМИ. ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

Операции над нечеткими множествами и нечеткими отношениями подразделяются на логические и алгебраические. К логическим относятся операции включения, равенства, объединения, пересечения, дополнения, разности и дизъюнктивной суммы для нечетких множеств. Вычисление значений этих операций осуществляется с помощью функции принадлежности $\mu : X \to [0,1] = M$ [9–11].

Пусть $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ — функции принадлежности элемента x к множествам A и B соответственно. Операции включения $A \subseteq B$ и равенства $A = B$ для нечетких множеств имеют булевы значения, т.е. результатом их вычислений есть значение 0 или 1. Это следует из определения операций

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, B \ \ \mu_A(x) \le \mu_B(x); \ \ A = B \Leftrightarrow \forall x \in A, B \ \ \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Операция объединения $A \bigcup B$ двух нечетких множеств определяет наименьшее нечеткое множество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Операция пересечения $A \bigcap B$ двух нечетких множеств определяет наибольшее нечеткое множество, содержащееся одновременно и в A, и в B, с функцией принадлежности $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Операция дополнения $\overline{A}$ определяет нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Операция разности $A - B = A \cap \overline{B}$ двух нечетких множеств выражается через введенные операции пересечения и дополнения и определяется функцией принадлежности $\mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$.

Операция дизъюнктивной суммы $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ двух нечетких множеств выражается через введенные операции разности и объединения и определяется функцией принадлежности $\max(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)), \min(\mu_B(x), 1 - \mu_A(x)))$. В связи с тем, что операции минимума и максимума, а также отношения $<, >, \leq$ и $\neq$, как было показано в [2, 3], вычисляются с помощью конечных автоматов, то далее описывается автоматная интерпретация реализации логических операций. Имеется некоторая особенность реализации логических операций над нечеткими множествами в их автоматной интерпретации. Как следует из определений, операции объединения ($A \cup B$), пересечения ($A \cap B$), дополнения ($\overline{A}$), разности ($A - B = A \cap \overline{B}$) и дизъюнктивной суммы ($A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$) определяют в результате нечеткие множества, а операции включения и равенства определяют булевы значения.

2. АВТОМАТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Рассмотрим графы переходов и выходов автоматов Мили $A_=$, $A_\subseteq$, $A_{\min}$, $A_{\max}$, $A_\cap$, $A_\cup$ и A_-, где $A_=$ — автомат, вычисляющий равенство двух НМ (рис. 1);

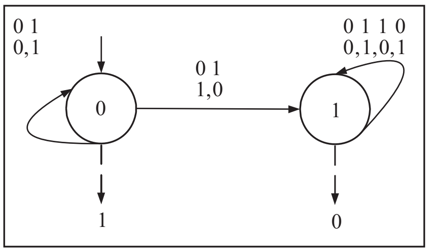

Рис. 1. Автомат $A_=$

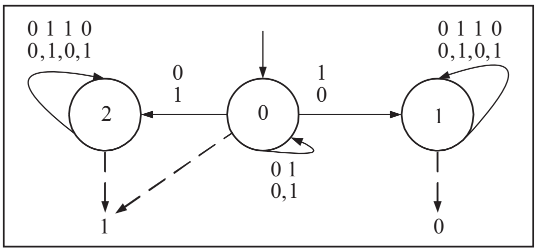

Рис. 2. Автомат $A_\subseteq$

$A_\subseteq$ вычисляет включение двух НМ (рис. 2); $A_{\min}$, $A_{\max}$ — автоматы, вычисляющие соответственно минимальное и максимальное из двух чисел; $A_\cap$, $A_\cup$ — автоматы, вычисляющие операции пересечения и объединения. При этом автоматы $A_{\min}$ и $A_\cap$ (рис. 3), а также автоматы $A_{\max}$ и $A_\cup$ очевидно совпадают (рис. 4). Автомат A_- (рис. 5) вычисляет разность двух чисел. С помощью автоматов строятся сети, вычисляющие значения логических операций над НМ. Значения функции принадлежности представляются двоичными словами $p = x_1 x_2 \ldots x_k$, $q = y_1 y_2 \ldots y_k$, на которых вводится линейный лексикографический

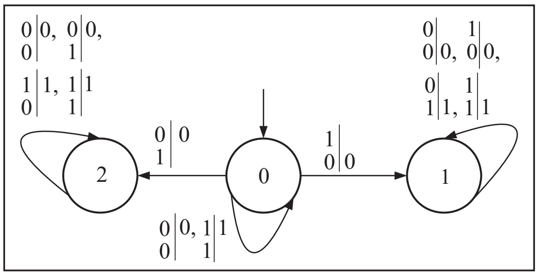

Рис. 3. Автоматы $A_\cap$, $A_{\min}$

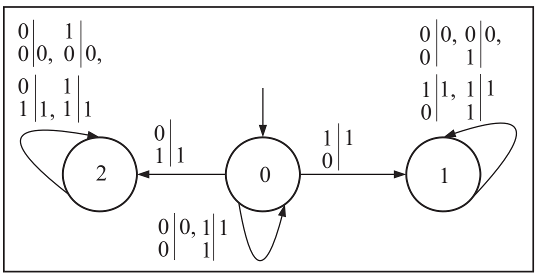

Рис. 4. Автоматы $A_\cup$, $A_{\max}$

порядок: $p \le q \Leftrightarrow \forall i\ x_i < y_i \wedge \forall j < i x_j = y_j$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Этот порядок переносится на разряды. На вход автоматов $A_{=}$, $A_{\subseteq}$, $A_{\min}$, $A_{\max}$, $A_{\cap}$, $A_{\cup}$ входные слова подаются старшими разрядами, а на вход автомата A_{-} — младшими.

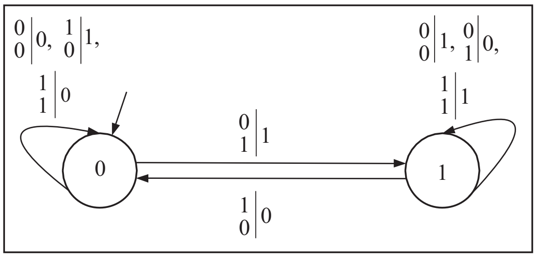

Рис. 5. Автомат A_{-} вычитания двоичных чисел x, y, где $x \ge y$

Определение 1. Сетью автоматов называется n-ка $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$, состоящая из автоматов $\mathrm{A}_i = (A_i, X_i, Y_i, f_i, g_i, a_0^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Состоянием сети A называется n-ка состояний $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Состояние сети $(a_1, \ldots, a_n)$ называется начальным, если $a_i = a_0^i$; n-ка $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется действием в сети A, результатом которого является переход из состояния $(a_1, \ldots, a_n)$ в состояние $(b_1, \ldots, b_n)$ так, что $(b_1, \ldots, b_n) = (f_1(a_1, x_1), \ldots, f_n(a_n, x_n))$, генерируя при этом переходе выходные значения $(y_1 = g_1(a_1, x_1), \ldots, y_n = g_n(a_n, x_n))$, $y_i \in Y_i$.

Сеть назовем однородной, если все ее автоматы одного типа.

Прежде чем описывать сети, реализующие операции, уточним представление значений функции принадлежности $\mu(x)$ двоичными словами.

Далее без ограничения общности будем считать, что значение функции принадлежности имеет не более одной значащей десятичной цифры. Это дает возможность представлять значения функции двоичными числами разрядности 4 для аргументов и значений функции принадлежности нечетких множеств, полученных в результате выполнения операций с разрядностью 8. Например, значения функций $\mu_A(x_1) = 0{,}1$, $\mu_A(x_2) = 0{,}2$, $\mu_A(x_3) = 0{,}9$, $\mu_A(x_4) = 1$ будут иметь такое представление двоичными словами:

$$\mu_A^{/}(x_1) = 0001 = p_1 \text{ (число 0,1)}, \ \mu_A^{/}(x_2) = 0010 = p_2 \text{ (число 0,2)},$$

$$\mu_A^{/}(x_3) = 1001 = p_3 \text{ (число 0,9)}, \ \mu_A^{/}(x_4) = 1010 = p_4 \text{ (число 1)}.$$

Введем еще одно уточнение: все перечисленные операции выполняются над множествами-аргументами с одинаковыми составляющими, т.е. НМ и НО должны иметь одни и те же составляющие x_j. Это легко выполнить с помощью такого «выравнивания» длины: множества-аргументы дополняются составляющими $0 \mid x_{j1}, \ldots, 0 \mid x_{jk}$ для тех $j_i = 1, \ldots, k$, которые их не имеют. Таким образом, составляющие обоих аргументов операций над НМ и НО будут иметь одни и те же элементы. Пусть аргументы A и B логических операций имеют вид

$$A = \{p_1 \mid x_1 + p_2 \mid x_2 + p_3 \mid x_3 + p_4 \mid x_4\}, \ B = \{q_1 \mid x_1 + q_2 \mid x_2 + q_3 \mid x_3 + q_4 \mid x_4\}.$$

Тогда сеть, вычисляющая значение операции включения, состоит из автоматов типа $A_{\min}$ (в данном случае из четырех автоматов). Вычисление операций $A \subseteq B$ и $A = B$ такой сетью происходит следующим образом: если сеть останавливается в состоянии, составляющие которого 0 и 2, то $A \subseteq B$; если состоят из 0 и 1, то $B \subseteq A$; а если состоят только из нулей, то $A = B$.

Вычисление операции дополнения $\overline{A}$ множества A выполняется сетью автоматов типа A_{-}. Состоянию сети, в котором она остановилась, соответствуют выходные слова p_1, p_2, p_3, p_4, являющиеся двоичными представлениями значений

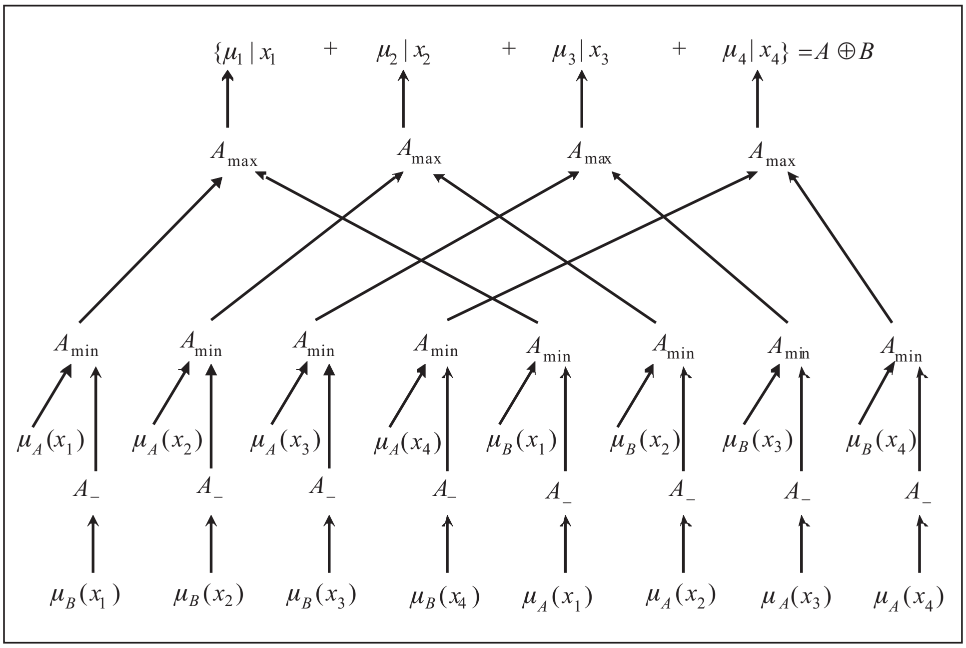

Рис. 6. Схема вычисления операции $A \oplus B$ для НМ

функции принадлежности $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ множества $\overline{A}$. В этой сети первый аргумент всегда является константой 1 (представляется двоичным словом 1010).

Аналогичным образом вычисляются значения операций $A \bigcup B$ и $A \bigcap B$. Например, если сеть из автоматов типа $A_{\cap}$ останавливается в состоянии (1, 0, 2, 2), то множество

$$A \bigcap B = \{\mu_B(x_1) \mid x_1 + \mu_B(x_2) \mid x_2 + \mu_A(x_3) \mid x_3 + \mu_A(x_4) \mid x_4\};$$

если сеть из автоматов типа $A_{\cup}$ останавливается в состоянии (1, 0, 2, 2), то множество

$$A \cup B = \{\mu_A(x_1) | x_1 + \mu_B(x_2) | x_2 + \mu_B(x_3) | x_3 + \mu_B(x_4) | x_4\}.$$

Для вычисления разности $A - B$ нечетких множеств необходима композиция сетей для вычисления минимумов и дополнения. Вначале строится дополнение множества $\overline{B}$ с помощью сети из автоматов типа A_{-}, а затем по значениям функции принадлежности множеств A и $\overline{B}$ строится функция принадлежности множества $A - B$. Аналогичным способом вычисляется функция принадлежности множества $A \oplus B$: вначале вычисляются множества $A - B$ и $B - A$ описанным выше способом, а затем сетью из автоматов типа $A_{\max}$ находят составляющие множества $A \oplus B$. Схематически такие вычисления приведены на рис. 6.

Рассмотрим пример синтеза сети, вычисляющей значения операции логического типа.

Пример 1. Проверить истинность включения $(A \bigcup B) \bigcap (C - D) = (A \bigcup B) \bigcap \bigcap (C \bigcap \overline{D}) \subseteq A \bigcap C$ для нечетких множеств A, B, C, D вида

$$A = \{0{,}2 \mid x_1 + 0{,}5 \mid x_2 + 0{,}4 \mid x_3\};\; B = \{0{,}4 \mid x_1 + 0{,}6 \mid x_2 + 0{,}1 \mid x_3\};$$

$$C = \{0{,}1 \mid x_1 + 0 \mid x_2 + 1 \mid x_3\};\; D = \{0{,}7 \mid x_1 + 1 \mid x_2 + 0{,}7 \mid x_3\}.$$

Решение. Исходя из структуры алгебраического выражения, синтезируем неоднородную сеть (рис. 7), состоящую из однородных сетей автоматов, которые реализуют соответствующие операции. Двоичные представления значений функций принадлежности множеств $A, B,\ C$ и D имеют вид

$$A = \{\underset{a_1}{0010} \,|\, x_1 + \underset{a_2}{0101} \,|\, x_2 + \underset{a_3}{0100} \,|\, x_3\};\ B = \{\underset{b_1}{0100} \,|\, x_1 + \underset{b_2}{0110} \,|\, x_2 + \underset{b_3}{0001} \,|\, x_3\};$$

$$C = \{\underset{c_1}{0001} \,|\, x_1 + \underset{c_2}{0000} \,|\, x_2 + \underset{c_3}{1010} \,|\, x_3\};\ D = \{\underset{d_1}{0111} \,|\, x_1 + \underset{d_2}{1010} \,|\, x_2 + \underset{d_3}{0111} \,|\, x_3\}.$$

Процесс вычисления значений функций принадлежности сетью иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{array}{lllllll}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & & \\
 & 1010 & 1010 & 1010 & \leftarrow & \text{значение } 1 & \\
D \ \rightarrow & \underline{0111} & \underline{1010} & \underline{0111} & & & \\
 & 0011 & 0000 & 0011 & \leftarrow & \overline{D} & \leftarrow A_{-} \\
C \ \rightarrow & \underline{0001} & \underline{0000} & \underline{1010} & & & \\
 & 0001 & 0000 & 0011 & \leftarrow & C \bigcap \overline{D} & \leftarrow A_{\bigcap} \\
A \ \rightarrow & 0010 & 0101 & 0100 & & & \\
B \ \rightarrow & \underline{0100} & \underline{0110} & \underline{0001} & & & \\
 & 0100 & 0110 & 0100 & \leftarrow & A \bigcup B & \leftarrow A_{\bigcup} \\
C \bigcap \overline{D} \ \rightarrow & 0001 & 0000 & 0011 & & & \\
A \bigcup B \ \rightarrow & 0100 & \underline{0110} & \underline{0100} & & & \\
 & \underline{0001} & 0000 & 0011 & \leftarrow & (A \bigcup B) \bigcap (C \bigcap \overline{D}) & \leftarrow A_{\bigcap} \\
A \ \rightarrow & 0010 & 0101 & 0100 & & & \\
C \ \rightarrow & \underline{0001} & \underline{0000} & \underline{1010} & & & \\
 & 0001 & 0000 & 0100 & \leftarrow & A \bigcap C & \leftarrow A_{\bigcap} \\
 & \underline{0001} & \underline{0000} & \underline{0100} & \leftarrow & A \bigcap C \supseteq & \\
 & 0001 & 0000 & 0011 & & (A \bigcup B) \bigcap (C \bigcap \overline{D}) & \leftarrow A_{\subseteq} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 1 & \lambda_3 = 1 & \leftarrow & \text{результат} &
\end{array}$$

Поскольку $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \lambda_3 = 1$, то включение истинно.

Конец примера.

Из примера 1 следует, что синтезированная сеть не является однородной, хотя составляющие ее подсети однородны. Таким образом, задача синтеза сети, реализующей логические операции для нечетких множеств, состоит в построении неоднородных сетей из однородных подсетей.

3. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Рассмотрим логические операции над НО. Пусть $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ — декартово произведение универсальных множеств и $M = [0, 1]$ — множество, в котором принимают свои значения функции принадлежности множеств $E_1, \ldots, E_n$.

Нечетким n-арным отношением R называется нечеткое подмножество $R \subseteq E$, функции принадлежности которого принимают свои значения в множестве $M = [0, 1]$. Если $n = 2$, то R — бинарное нечеткое отношение между элементами множеств $X = E_1$ и $Y = E_2$ с функцией принадлежности $\mu_R : X \times Y \to M$, т.е. каждой паре $(x,\ y) \in X \times Y$ функция принадлежности ставит в соответствие величину $\mu_R(x,\ y) \in [0, 1]$.

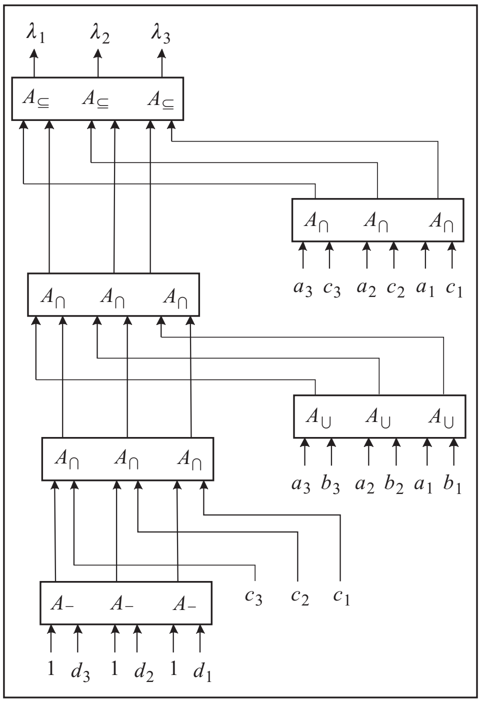

Рис. 7. Конфигурация сети

Нечеткие отношения, как правило, задаются в виде таблиц.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и $M = [0, 1]$. Нечеткое отношение $R \in X \times Y$ задается табл. 1, в которой на пересечении строки x_i и столбца y_j находится значение функции принадлежности $\mu_R(x_i, y_j)$.

Конец примера.

Т а б л и ц а 1. Отношение R

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

Объединение $R_1 \bigcup R_2$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y),$$

где символ $\vee$ означает операцию max.

Пересечение $R_1 \bigcap R_2$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y),$$

где символ $\wedge$ означает операцию min.

Дополнение отношения R (обозначение $\overline{R}$) определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y).$$

Дизъюнктивная сумма $R_1 \oplus R_2$ задается соотношением

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (R_2 \cap \overline{R_1}).$$

Определим отношение, ближайшее к нечеткому. Пусть R — нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$. Отношение $\underline{R}$, ближайшее к нечеткому отношению, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_R(x, y) < 0{,}5; \\ 1, & \text{если } \mu_R(x, y) > 0{,}5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$$

Произведение (композиция) нечетких отношений $R_1 * R_2$, где $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 * R_2}(x, z) = \bigvee_y (\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)).$$

Иногда такое произведение называют max-min-композицией отношений R_1 и R_2.

Пример 3. Пусть отношения R_1 и R_2 заданы табл. 2 и табл. 3.

Вычислим отношение, ближайшее к нечеткому отношению $R_1 * R_2$.

Решение. Вначале выполним операции над НО. Вычисление композиции $R_1 * R_2$ отношений R_1 и R_2, исходя из определения операции композиции НО, приводит к таким значениям:

$$\mu_{R_1 * R_2}(x_1, z_1) = \max(\min(0{,}1; 0{,}1),\ \min(0{,}7; 0{,}3),\ \min(0{,}4; 0{,}1)) =$$
$$= \max(0{,}1; 0{,}3; 0{,}1) = 0{,}3,$$

Таблица 2. Отношение R_1

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

Таблица 3. Отношение R_2

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,1	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

$$\mu_{R_1 * R_2}(x_1, z_2) = \max(\min(0{,}1;\, 0),\ \min(0{,}7;\, 0{,}6),\ \min(0{,}4;\, 1)) =$$
$$= \max(0;\, 0{,}6;\, 0{,}4) = 0{,}6,$$
$$\mu_{R_1 * R_2}(x_1, z_3) = \max(\min(0{,}1;\, 1),\ \min(0{,}7;\, 0),\ \min(0{,}4;\, 0)) =$$
$$= \max(0{,}1;\, 0;\, 0) = 0{,}1,$$
$$\mu_{R_1 * R_2}(x_1, z_4) = \max(\min(0{,}1;\, 0{,}2),\ \min(0{,}7;\, 0{,}9),\ \min(0{,}4;\, 0{,}5)) =$$
$$= \max(0{,}1;\, 0{,}7;\, 0{,}4) = 0{,}7.$$

Аналогичным образом вычисляются остальные элементы отношения $R_1 * R_2$, которые приведены в табл. 4. По этой таблице находим отношение $\underline{R_1 * R_2}$, ближайшее к $R_1 * R_2$, значения элементов которого приведены в табл. 5.

Таблица 4. Отношение $R_1 * R_2$

$R_1 * R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

Таблица 5. Отношение $\underline{R_1 * R_2}$

$\underline{R_1 * R_2}$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0	1	0	1
x_2	1	1	1	1

Чтобы синтезировать сеть, вычисляющую $\underline{R_1 * R_2}$, введем НО

$$R = \{(x_1, z_1) \mid 0{,}5;\ (x_1, z_2) \mid 0{,}5;\ (x_1, z_3) \mid 0{,}5;\ (x_1, z_4) \mid 0{,}5;\ (x_2, z_1) \mid 0{,}5;$$
$$(x_2, z_2) \mid 0{,}5;\ (x_2, z_3) \mid 0{,}5;\ (x_2, z_4) \mid 0{,}5\}.$$

По этому НО, применяя автомат $A_{\subseteq}$, вычисляем требуемое отношение. Отметим, что если значения, соответствующие 0,5, не удовлетворяют эксперта, то он может их изменять по своему усмотрению.

Синтез сети из автоматов выполняется по структуре выражения $\underline{R_1 * R_2} = R \subseteq R_1 * R_2$. Фрагмент сети для вычисления значения (x_1, z_1) отношения $R_1 * R_2$ показан на рис. 8.

При вычислении значений выражений, включающих НО, применяются тождества в целях оптимизации выражений. Например, тождественные соотношения

$$(R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3) = R_1 \cap (R_2 \cup R_3),$$
$$(R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3) = R_1 \cup (R_2 \cap R_3);$$
$$R_1 * (R_2 * R_3) = (R_1 * R_2) * R_3 = R_1 * R_2 * R_3,$$
$$(R_3 * R_2) \cup (R_3 * R_1) = R_3 * (R_2 \cup R_1)$$

позволяют уменьшить число выполняемых операций и тем самым упростить структуру сети.

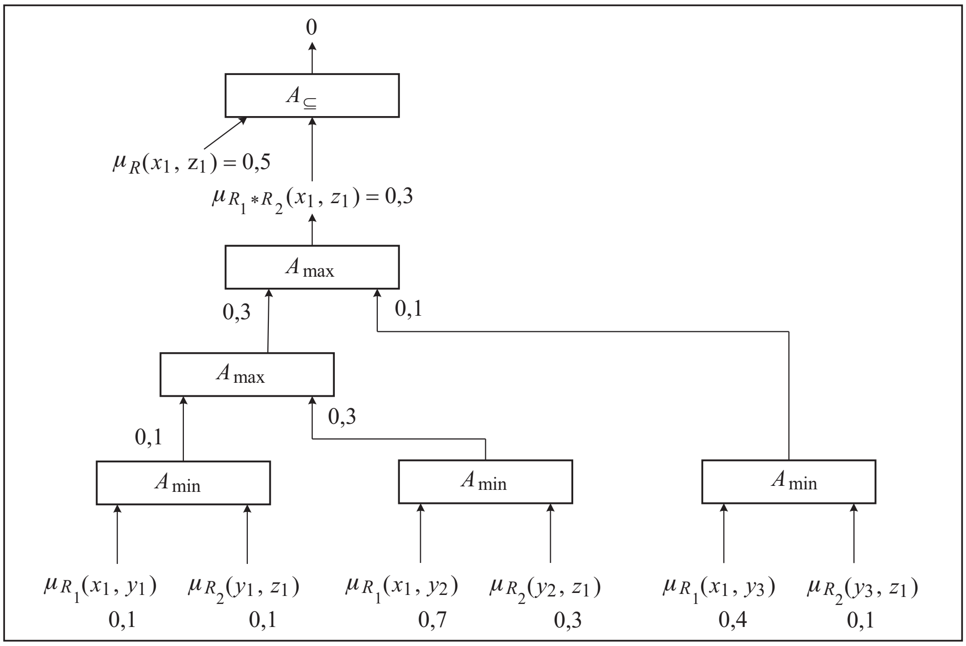

Рис. 8. Фрагмент сети для вычисления значений (x_1, z_1) отношения $\underline{R_1 * R_2}$ из примера 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрена автоматная интерпретация логических операций над нечеткими множествами и нечеткими отношениями, а также описана реализация этих операций с помощью соответствующих однородных сетей из автоматов с возможностью адаптации. Если выражение задано, то по его структуре синтезируется адаптивная логическая сеть, которая вычисляет значение этого выражения. При этом использовались автоматы и сети из автоматов следующих типов: $A_{\min}$, $A_{\max}$, $A_{\subseteq}$, A_{-}, $A_{=}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kryvyi S.L., Opanasenko V.M., Zavyalov S.B. Partitioning of a set of vectors with integer coordinates by means of the logical hardware. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 3. P. 462–473. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00154-3.
2. Kryvyi S.L., Opanasenko V.M. Partitioning a set of vectors with nonnegative integer coordinates using logical hardware. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 310–319. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0033-0.
3. Palagin A.V., Opanasenko V.M., Kryvyi S.L. Resource and energy optimization oriented development of FPGA-based adaptive logical networks for classification problem. In: *Green IT Engineering: Components, Networks and Systems Implementation.* Kharchenko V., Kondratenko Y., Kacprzyk J. (Eds.). Cham: Springer, 2017. Vol. 105. P. 195–218. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55595-9_10.
4. Opanasenko V.N., Kryvyi S.L. Synthesis of neural-like networks on the basis of conversion of cyclic Hamming codes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 4. P. 627–635. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9965-z.
5. Drozd O., Kharchenko V., Rucinski A., Kochanski T., Garbos R., Maevsky D. Development of models in resilient computing. *Proc. of 10th IEEE International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT'2019).* Leeds, UK, June 5–7, 2019. P. 2–7.

6. Kondratenko Y.P., Sidenko Ie.V. Decision-making based on fuzzy estimation of quality level for cargo delivery. In: *Recent Developments and New Directions in Soft Computing. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Zadeh L.A. et al. (Eds.). Springer International Publishing, 2014. P. 331–344.
7. Opanasenko V., Kryvyi S. Synthesis of multilevel structures with multiple outputs. *CEUR Workshop Proceeding of 10th International Conference of Programming, UkrPROG 2016*. Kyiv, Ukraine. 2016. Vol. 1631, Code 122904. P. 32–37.
8. Palagin A., Opanasenko V. The implementation of extended arithmetics on FPGA-based structures. *Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS 2017)*. Bucharest, Romania, 2017. Vol. 2. P. 1014–1019. DOI: 10.1109/IDAACS.2017.8095239.
9. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. Москва: Радио и связь, 1989. 304 с.
10. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8, Iss. 3. P. 338–353.
11. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях. *Вопросы анализа и процедуры принятия решений.* Москва: Мир, 1976. С. 172–215.

Надійшла до редакції 12.03.2020

С.Л. Кривий, В.М. Опанасенко, С.Б. Зав'ялов

ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НЕЧІТКИМИ МНОЖИНАМИ І ВІДНОШЕННЯМИ В АВТОМАТНІЙ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

Анотація. Розглянуто логічні операції над нечіткими множинами і відношеннями в автоматній інтерпретації засобами логікових мереж зі здатністю адаптації. Наведено приклади синтезу мереж за допомогою розглянутих автоматів на основі структур виразів для заданих нечітких множин і відношень.

Ключові слова: нечіткі множини, відносини, логічні операції.

S.L. Kryvyi, V.M. Opanasenko, S.B. Zavyalov

LOGICAL OPERATIONS ON FUZZY SETS AND RELATIONS THROUGH AUTOMATIC INTERPRETATION

Abstract. Logical operations on fuzzy sets and relations are considered in the automatic interpretation by means of logical networks with the possibility of adaptation. Examples of the synthesis of networks using the considered automata based on expression structures for the given fuzzy sets and relations are given.

Keywords: fuzzy sets, relations, logical operations.

Крывый Сергей Лукьянович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: sl.krivoi@gmail.com.

Опанасенко Владимир Николаевич,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: opanasenkoincyb@gmail.com.

Завьялов Станислав Борисович,
кандидат техн. наук, директор ООО «Радионикс», Киев, e-mail: radionix13@gmail.com.