

Олексій Комар

### Математичні статті «Правди Руської» та способи рахунку в Давній Русі

Перед дослідниками науки, освіти, архітектури, метрологічної та грошової систем Давньої Русі досить часто постає питання про можливість виконання давньоруським населенням тих чи інших математичних розрахунків, а також про їхні способи. Головним джерелом, яке ілюструє рівень математичних знань Русі, традиційно вважається твір XII ст. «Учення про числа» Кирика Новгородця, однак не менше увагу істориків математики притягують і статті з арифметичними обрахунками, включені у Карамзінську групу списків «Правди Руської»<sup>1</sup>. Б. В. Гніденко вважав, що ці статті не мали жодного практичного значення, а лише «задовольняли духовні потреби числолюбців»<sup>2</sup>. Натомість Б. О. Рибakov, погоджуючись, що ніякого господарчого, фіскального чи юридичного значення подібні статті не мали, висловив припущення, що вони є арифметичним задачником, учбовим посібником для набування навиків у господарчих розрахунках і у переведенні натури на гроші, приєднання якого до «Руської Правди» пояснюється необхідністю навчити майбутніх тиунів та волостелів не лише нормам права, а й прийомам підрахунку доходів господарства<sup>3</sup>. Найповніше ця ідея була розвинута далі у роботах Р. А. Симонова<sup>4</sup>.

Вивчення статей задачника істориками математики допомогло помітити у перших двох задачах наявність принципу геометричної прогресії у підрахунках приплоду овець та кіз, решта ж задач, де цей принцип не дотриманий, були оголошені помилковими<sup>5</sup>. У останніх співпадали лише дані обрахунку грошового еквіваленту приплоду, тому А. П. Юшкевич й зробив висновок, що авторам статей потрібно було лише вміти додавати, множити на 2, 6, 10

---

1 *Правда Русская*. М.; Л., 1940. С. 352–354; 377–380.

2 Гнеденко Б. В. *Очерки по истории математики в России*. М.; Л., 1946. С. 20.

3 Рыбаков Б. А. *Просвещение. Очерки истории русской культуры XIII–XV веков*. Ч. 2. М., 1970. С. 180.

4 Симонов Р. А. *Математическая мысль Древней Руси*. М., 1977. С. 53–58; Його ж. Учебные задачи для абака по пересчёту натуры на деньги Русской Правды. *Древности славян и Руси*. М., 1988. С. 279–285.

5 Гнеденко Б. В. *Очерки по истории*. С. 19–20; Юшкевич А. П. О некоторых статьях «Правды Русской». *Труды Института истории естествознания АН СССР*. Т. II. М.; Л., 1948. С. 564–566; Його ж. *История математики в России*. М., 1968. С. 16–17; Швецов К. И. Математика в «Русской Правде». *История отечественной математики*. К., 1966. С. 62.

й ділити на 50<sup>6</sup>. Абсолютна більшість задач таким чином виявилася забракованою разом з усім числовим матеріалом. Відзначивши цей парадокс, Р. А. Симонов, проте, не наважився піддати сумніву висновки математиків, акцентувавши увагу лише на факті вірності грошових обрахунків вартості природи у більшості «помилкових» задач. Дослідник припустив, що основною метою задачника саме й було навчання переведенню природи у грошовий еквівалент, для чого мав використовуватися спеціальний тип абаку<sup>7</sup>. Ця гіпотеза мала би сенс, якби не «помилкові» задачі 9–13, де обрахунки вартості збіжжя взагалі відсутні; суперечать їй і «правильні» задачі 1–2. Увесь числовий матеріал задачника, без сумніву, мав чіткий зміст, однак його правки та численні переписування у чорновому варіанті до етапу приєднання до тексту «Правди Руської» і стали основною причиною неточностей, які, як побачимо нижче, стосуються не тільки самих чисел, а й трактування умови задач.

«Задачник» зберігся до нашого часу в списках Оболенсько-Карамзінського та Музейського видів, основні з яких датуються другою половиною XV ст.<sup>8</sup> Їх протограф безумовно пізній, однак сам текст задачника на підставі використовуваної у ньому грошової системи (1 гривна = 20 ногат = 50 резан) має належати до давньоруського часу, що, очевидно, й стало однією з головних причин включення його до тексту «Правди Руської». Скепсис В. К. Кузакова щодо можливості «включення статей «підручника» для «числолюбців» у настільки офіційний документ»<sup>9</sup> в даному випадку не виправданий, оскільки автор протографу списків Оболенсько-Карамзінського та Музейського видів вже слабо уявляв собі реалії давньоруського часу і створював добре систематизовану компіляцію з різних списків «Правди Руської» з додаванням сюди нової інформації<sup>10</sup>. Лаконічні числові викладки псевдогосподарчого призначення цілком могли здатися редактору XV ст. нотатками статей з нормативно-правового феодального кодексу, тому вони і були додані до тексту «Правди Руської». Саме йому мають належати виділені кіновар'ю заголовки задач, якими автор надав їм схожості зі статтями «Правди», ним же, очевидно, була здійснена і літературна редакція тексту задачника. Наголосимо, створений не пізніше XII ст. задачник мав неодноразово переписуватися у чорновому варіанті, і тому на XV ст. він вже міг включати багато помилок; додали їх, як показують відмінності у числах між різними списками Карамзінської групи, і самі переписувачі XV ст.

Втім, останнім належать і деякі осмислені правки. Так, у списку Оболенського II у задачі 14 переписувач звернув увагу на невідповідність тексту, в якому

6 Юшкевич А. П. *История математики*. С. 17.

7 Симонов Р. А. *Математическая мысль*. С. 53; Його ж. *Учебные задачи для абака*. С. 280–285.

8 *Правда Русская*. С. 35–36; 345–346; 365–367.

9 Кузаков В. К. *Отечественная историография истории науки в России X–XVII вв.* М., 1991. С. 176.

10 *Правда Русская*. С. 38–41; 53–54.

число 3574 половники мало означати суму молоченого жита, вівса та ячменю, дорівнюючи насправді лише сумі двох останніх культур, тому в кінці він додав ремарку «опроче жита»; у частині ж списків Музейського виду у задачі 8 до помилкової вартості 256 роїв бджіл «100 гривень и 24 грив(ны)» переписувачем було додано «и 4 грив(ны)»<sup>11</sup>.

Проте, окрім неточностей у передачі чисел, збережений текст задачника містить ще одну проблему — неясність формулювання самих задач. Залишається неясним, які з текстів містять лише умову, а які й відповідь. Також цілком очевидно, що редактор, який додав задачник у вигляді статей до «Правди Руської», сприйнявши задачі лише як розрахунки прибутковості вотчини за 12 років, міг підправити умови багатьох з них, намагаючись звести їх до одного формату. Таким чином, перед нами стоїть завдання по можливості з'ясувати початкові умови задач та послідовність арифметичних дій, необхідних для їх вирішення.

Задача 1 дістала у редактора XV ст. заголовок «О овцах». За її умовою, спочатку потрібно було обрахувати кількість приплоду від стада з 22 овець за 12 років, з розрахунку, що кожен рік число овець подвоюється. Для отримання відповіді 90112 овець потрібно послідовно 12 разів подвоїти число 22, тобто насправді відповідь відповідає кількості приплоду овець на дванадцятий рік, оскільки сума усіх овець за 12 років мала б становити 180202 овець. Наступна дія задачі включала припущення, що разом з вівцями народилися і 90111 баранів, що у сумі дало число 180223. Якщо вівця коштує 6 ногат, а баран 10 резан, то сума дорівнює:  $90112 \times 6 : 20 + 90111 \times 10 : 50 = 27033$  грн. 12 ног. + 18022 грн. 10 рез. = 45055 грн. і  $(12 \times 2^? + 10)$  рез. = 45055 грн. 40 рез. У третій частині задачі пропонувалося подвоїти число стада:  $180223 \times 2 = 360446$ , після чого перерахувати на гривни загальну вартість шкур при ціні однієї шкури в резану:  $360446 \times 1 : 50 = 7208$  грн. 46 рез.

Наступна задача 2 «О козах» майже ідентична першій за умовою і числами, однак не містить сумарних чисел кількості уявного стада та його вартості, а також обрахунку вартості шкур.

Задача 3 «О свинях» за текстом нібито передбачає від 3 свиней за 12 років 73728 свиней приплоду. Однак подібну цифру при використанні геометричної прогресії зі знаменником 2 можна отримати лише двома способами. Перший, відзначений А. П. Юшкевичем<sup>12</sup>, передбачає початкову кількість свиней у 18 голів:  $18 \times 2^{12} = 73728$ . Другий дещо складніший, однак він, як побачимо нижче, більш вірогідний у нашому випадку. За цією умовою початкове стадо складається з 12 свиней. Кожна свиня має щороку народжувати 2 свині та одного «вепра», що дасть на 12-му році результат:  $12 \times 2^{12} + 12 \times 2^{12} : 2 = 49152 + 24576 = 73728$ . Причини, чому ми віддаємо перевагу саме цьому варіанту,

---

11 Там же. С. 354, 379.

12 Юшкевич А. П. О некоторых статьях. С. 566.

криються у числі вепрів, яке використане далі у цій же задачі — 49140. Перед нами не зіпсоване число, як припускав А. П. Юшкевич, а сума попередніх членів геометричної прогресії ( $12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1536 + 3072 + 6144 + 12288 + 24576$ ). Втім, і цей варіант не є беззаперечним, адже, як слідує з наступної частини задачі, при ціні у 6 ногат, 14743 грн. 40 рез. коштують не 49140 вепрів, а 49146, що також є сумою попередніх членів, однак іншої прогресії:  $6 \times 2^{13}$ . Останній варіант також дає результат 73728 свиней за умови розмноження за схемою 2 свині + 1 вепр, однак досягається він не на 12-му, а на 13-му році. У будь-якому випадку, числа 49140 та 49146 беззаперечно доводять припущення Р. А. Симонова про записування проміжних результатів математичних дій, очевидно, на воскових дощечках<sup>13</sup>. Привертає увагу ще одна особливість задачі 3 — у ній відсутня ціна однієї свині, натомість вказана їх загальна вартість — 36864 грн. Цілком можливо, що ціна просто втрачена при переписуваннях, однак не виключено, що в умову задачі якраз і входило з'ясування цього значення, що вимагало дії:  $36864 \times 20 : 73728 = 10$  ногат.

У задачі 4 «О назимых свиньях» умова ще більше зіпсована помилками. Можна погодитися з А. П. Юшкевичем, що замість приплоду 60144 свиней за 10 років від початкових 3, первісна умова могла передбачати приплід 6144 свині за 10 років від початкових 6. Однак можливий також і варіант:  $3 \times 2^{10} + 3 \times 2^{10} = 3072 + 3072 = 6144$ , який відбивав би співвідношення свиней і вепрів у кінцевому приплоді як 2 : 2. Менш вірогідний варіант з іншим схожим числом:  $15 \times 2^{12} = 61440$ . Вартість свиней визначена для числа 60144, що при ціні свині у половину гривни становила  $60144 \times ? = 60144 : 2 = 30072$  грн. Оскільки вартість вирахована вже для помилкового числа, на наш погляд, у оригінальному варіанті умови наводилася лише ціна свині. Остання дія задачі пропонувала, навпаки, з'ясувати ціну одного старого вепра з розрахунку, що 3 вепри коштують 45 резан:  $45 : 3 = 15$  рез.

У трьох наступних задачах (№ 5–7) мова також іде про приплід за 12, 10, 9 років, однак, як показав розгляд закладених у них чисел, жодної прогресії тут не спостерігається — основним завданням задачі було просто порахувати загальну суму вартості різних видів худоби.

Задача 5 «О кобылах» пропонує порахувати вартість приплоду від двох кобил за 12 років, який становить 32 кобили, 20 «третьячинь», 20 жеребців—«лонцин», а також 10 однорічних кобил та 10 жеребців. Вирішується прикладом:  $32 \times 3 \text{ грн.} + 20 \times 1 \text{ грн.} + 20 \times 30 \text{ рез.} + 10 \times 6 \text{ ног.} + 10 \times 6 \text{ ног.} = 96 + 20 + 600 : 50 + 60 : 20 + 60 : 20 = 96 + 20 + 12 + 3 + 3 = 134$  грн. Сума не збігається з вказаною у задачі 132 грн., незважаючи навіть на вказівку не враховувати 2 старі кобили (сума всіх врахованих коней становить 92). Оскільки основним змістом задачі явно було навчити обраховувати суму цін товарів, виражених у різних

13 Симонов Р. А. О вычислительной арифметике. *Естественнонаучные представления Древней Руси*. М., 1978. С. 72.

грошових одиницях (гривни, ногати, резани), помилкова відповідь, дописана кимось з редакторів, наочно ілюструє, що ця важлива процедура насправді була досить складною для давньоруського населення.

Задача 6 «О лоньских кобылицах» подібна до попередньої і не містить цін, що явно вказує на їх зв'язок. Сума вартості приплоду разом зі старою кобилою становить  $4 \times 3$  грн. +  $3 \times 1$  грн. +  $2 \times 30$  рез. +  $10 \times 6$  ног. = 12 грн. + 3 грн. + 60 рез. + 60 ног. = 19 грн. 10 рез. Ця ціна знову не збігається з відповіддю 22 грн., однак, оскільки в задачі згадується також старий жеребець, швидше за все, його ціна й є кінцевою точкою пошуку: 22 грн. — 19 грн. 10 рез. = 2 грн. 40 рез. = 56 ногат.

Задача 7 «О лоньской теліци» дещо змінює кількість худоби та ціни. Задача також ускладнена порівняно з попередньою тим, що тут не вказана ціна не лише старих биків, а й однорічних, причому важко сказати, чи є це наслідком втрати частини умови, чи осмисленим вчинком. Вартість худоби з вказаною ціною встановлюється просто:  $4 \times 2$  грн. +  $3 \times 1$  грн. +  $2 \times ?$  грн. +  $2 \times ?$  грн. = 13 грн. Різниця  $17 - 13 = 4$  грн. має становити вартість 3 старих та 5 однорічних биків, ціну яких можна з'ясувати виключно логічним шляхом. Із задач 5 та 6 випливає, що вартість старих жеребців була нижчою від вартості старих кобил, а вартість однорічних жеребців становила лише половину від «лоньських». Таким чином, слід орієнтуватися на ціни відповідно менше 2 грн. та близько 5 ног., з яких найбільш прийнятними в нашому випадку є 1 грн. за старого бика та 4 ног. за однорічного. Наступна частина задачі становить окремий предмет підрахунку — вартість 360 сирів та 30 глеків масла. За умовою, рішення:  $360 \times 1$  рез. +  $30 \times 10$  рез. = 13 грн. 10 рез., що не співпадає з відповіддю 14 грн. 20 рез. Швидше за все, в тексті невірно вказана ціна глека масла, яка має становити не 10, а 12 резан. Втім, за початковим задумом ця величина могла бути як раз предметом пошуку, невірну ж відповідь міг дописати хтось з багаточисленних редакторів задачника.

Задача 8 «О пчелахъ» також містить неточний цифровий матеріал. Умова задачі вимагала вирахування загальної кількості приплоду за 12 років від 2 роїв бджіл з розрахунку приплоду 1 рій на рік з наступним вирахуванням їх вартості. А. П. Юшкевич на вирішення цієї задачі механічно переніс умови перших задач задачника на геометричну прогресію, визначивши число 256 як  $2^8$ , тобто припустивши помилку переписувачів у терміні 12 років<sup>14</sup>. Однак ключовими є слова умови «и съ старыми пчелами». Задача насправді вирішується послідовним підрахунком приплоду за 12 років від кожної нової пари роїв:  $2 \times 12 + 2 \times 11 + 2 \times 10 + 2 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 + 2 \times 6 + 2 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 = 24 + 22 + 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 156$ . Перед нами сума членів зворотної арифметичної прогресії, отримати яку, як і у випадку з задачею 3, можна було лише записуючи всі проміжні результати підрахунку. У тексті

---

14 Юшкевич А. П. О некоторых статьях. С. 566.

задачника стоїть відповідь 256 роїв, яка є або дописаним помилковим розв'язком, або ж помилкою при переписуванні числа 156. Цікаво, що помилково в даній задачі була вирахована і вартість 256 роїв — 124 грн., замість:  $256 \times ? \text{ грн.} = 128 \text{ грн.}$  Як вже відзначалося вище, ця помилка виправлена лише у частині списків Музейського виду<sup>15</sup>.

Далі у задачнику розгашовані п'ять задач на вирахування прибутку за 12 років від надавання «в рость» збіжжя.

Задача 9 «О ржи» на вигляд найпростіша, оскільки з числа 1200 копиць за 12 років легко отримати річний прибуток:  $1200 : 12 = 100$  на два плуга і  $100 : 2 = 50$  копиць на один плуг. Втім, залишається незрозумілим спосіб перерахунку, за яким на рік з 16 кадей жита виходить процент у 100 копиць. Очевидно, тут втрачена або невірною передана частина умови.

Ясніша ця система у наступних задачах. Їх умова, на перший погляд, також виглядає незрозумілою, що є наслідком правки редактора XV ст., однак він залишив ремарку одного з давньоруських редакторів, яка є ключем. Не зрозумівши до кінця зміст задачі 14, редактор XV ст. присвоїв їй назву «О немолоченом жите». Насправді ж ремарка «А немолоченое жито метано на две копны 3-я, а молоченое жито метано на две 3-и половник на годъ»<sup>16</sup> відноситься до всіх попередніх задач про збіжжя, оскільки давньоруське «жито» вживалося як синонім до «зерно» і означало, фактично, сучасний термін «зернові»<sup>17</sup>. Для нас важлива вжита у реченні система підрахунку: «на два — третій». Мова йде про давньоруський запис дробів, в якому «третья» сприймалася не як третя частина від цілого, а навпаки, як «кожна третя»<sup>18</sup>. Розв'язку задач 10–13 ніхто з редакторів не дописав, однак один з них відзначив, що закладені в задачах 10 і 13 системи підрахунку «на 40 наступні 20» ( $20/60$ ) та «на 6–3» ( $3/9$ ) можуть бути зведеними до простішого дробу «на два — третій» ( $1/3$ ). Дріб «на 15–7» ( $7/22$ ) із задачі 11 насправді дорівнює  $1/3 - 1/66$ , а дріб «на 21–11» ( $11/32$ ) із задачі 12 рівний  $1/3 + 1/96$ , однак редактор вирішив, що цією різницею в даному випадку можна знехтувати.

У будь-якому випадку, не виникає сумніву, що задачі 10–13 вимагали уміння вести обчислення з дробами, причому, як побачимо далі, не лише уміння знаходити частку від числа, а й навпаки — при заданій пропорції від числа частки знаходити загальне число. Добре здійснювати подібні розрахунки потрібно було не лише лихварям, а й різного роду феодалним посадовцям, які, залежно від обставин, визначали розміри оброку у вигляді дробу або ж фіксованого числа, теж отриманого певними розрахунками.

15 *Правда Русская*. С. 379.

16 Там же. С. 379, 380.

17 Лукіша Г. Н. *Предметно-бытовая лексика древнерусского языка*. М., 1990. С. 114.

18 Кузаков В. К. *Очерки развития естественнонаучных и технических представлений на Руси в X–XVII вв.* М., 1976. С. 114.

Задача 10 «О немолоченой ржи», очевидно, пропонувала вирахувати річний прибуток і загальну суму, від якої він вирахований, виходячи з умови, що за 12 років цей прибуток становить 4660 копиць, а система підрахунку «на 40 копиць наступні 20». Розв'язок: 1)  $4660 : 20 \times (20+40) = 13980$  (або:  $4660 : 20 \times 40 + 4660 = 13980$ ); 2)  $13980 : 12 = 1165$ . З річної суми 1165 потрібно було за схемою 40–20 вирахувати прибуток: 3)  $1165 : 60 = 19$  (залишок 25); 4)  $19 \times 20 = 380$ . Перевірка: за 12 років це буде: 5)  $380 \times 12 = 4560$ . Однак залишається ще залишок в 25 копиць, який не прощається, а сумується за 12 років: 6)  $25 \times 12 = 300$ ; 7)  $300 : 60 \times 20 = 100$ . Фінальне число: 8)  $4560 + 100 = 4660$ . Як свідчить наведена нами цитата з задачі 14, давньоруський учень умів порівнювати дроби, тому в даній задачі він цілком міг полегшити собі розрахунки, звівши дріб «на 40–20» ( $20/60$ ) до вигляду «на 2 третя» ( $1/3$ ).

Подібного не дозволяє зробити наступна задача 11 «О полбе немолоченои», де в умові закладений дріб «на 15–7» (тобто  $7/22$ ) та прибуток за 12 років 1750. Дріб  $7/22$  можна звести до вигляду:  $1/3 - 1/66$ , однак ділення з цілими числами в нашому випадку все одно не виходить, тому вдамося до звичайного розв'язку: 1)  $1750 : 7 = 250$ ; 2)  $250 \times 15 = 3750$ ; 3)  $3750 + 1750 = 5500$ ; 4)  $5500 : 12 = 458$  (залишок 4); 5)  $458 : 22 = 20$  (залишок 18); 6)  $20 \times 7 = 140$ . Далі йшла перевірка: 7)  $140 \times 12 = 1680$ . Оскільки, як ми показали вище, всі проміжні результати записувалися на воскових дощечках, залишки завжди сумували також: 8)  $18 \times 12 + 4 = 220$ ; 9)  $220 : 22 \times 7 = 70$ ; 10)  $1680 + 70 = 1750$ . Перевірка була обов'язковою частиною математичних задач XVII–XVIII ст., тому сумування усіх отриманих в ході обчислень проміжних результатів та залишків обов'язково мало зійтися з вихідними числами.

Ще більше зростає складність задачі 12 «О молоченом овсе». Тут використано дріб «на 21–11» ( $11/32$ ) та число 2863, яке не кратне 11, а отже задача мала навчити ще й округлювати дроби. Як і у попередній задачі, операції з дробами тут мало ймовірні, оскільки при  $11/32 = 1/3 + 1/96$  цілих чисел при діленні також не виходить. Розв'язок: 1)  $2863 : 11 = 260$  (залишок 3); 2)  $260 \times 21 = 5460$ ; 3)  $5460 + 2863 = 8323$ ; 4)  $8323 : 12 = 693$  (залишок 7); 5)  $693 : 32 = 21$  (залишок 21); 6)  $21 \times 11 = 231$ . Перевірка: 7)  $242 \times 12 = 2772$ . Тепер потрібно зібрати суму залишків та вирахувати процент з них: 8)  $21 \times 12 = 252$ ; 9)  $252 + 7 = 259$ ; 10)  $259 : 32 = 8$  (залишок 3). Залишок  $3/32$  настільки малий, що нехтується. Далі: 11)  $8 \times 11 = 88$ ; 12)  $88 + 2772 = 2860$ , після чого до суми додається залишок 3 з дії 1: 13)  $2860 + 3 = 2863$ .

Задача 13 «О молоченом ячмени». Система обчислення: «на 6–3», число за 12 років — 711 половників. Дріб легко скорочується до вигляду «на 2–1», однак ми наведемо розв'язок для початкового варіанту: 1)  $711 : 3 \times 6 = 237 \times 6 = 1422$ ; 2)  $1422 + 711 = 2133$ ; 3)  $2133 : 12 = 177$  (залишок 9); 4)  $177 : 9 = 19$  (залишок 6); 5)  $19 \times 3 = 57$ . Перевірка: 6)  $57 \times 12 = 684$ ; 7)  $6 \times 12 + 9 = 72 + 9 = 81$ ; 8)  $81 : 9 \times 3 = 27$ ; 9)  $684 + 27 = 711$ .

Текст задачі 14, що нібито мала бути присвячена «немолоченому житгу», як відзначалося вище, редактор XV ст. не зміг зрозуміти вірно. Насправді даний абзац тексту є не задачею, а фінальним резюме одного з попередніх редакторів задачника, який просто підсумував всі отримані у задачах числа. Перша частина: сума немолочених «ржи и полбы», тобто: 1)  $1200 + 4660 + 1750 = 7610$  кошиць. Друга частина — підрахунок молоченого збіжжя: 2)  $2863 + 711 = 3574$  половники. Третя, найскладніша, — підсумок усіх отриманих в задачнику грошових сум: 3) 45055 грн. 40 рез. + 7208 грн. 46 рез. + 27033 грн. 30 рез. + 18022 грн. 10 рез. + 36864 грн. + 14743 грн. 40 рез. + 30072 грн. 45 рез. + 132 грн. + 22 грн. + 17 грн. + 14 грн. 20 рез. + 124 грн. = 179306 грн. 231 рез. = 179310 грн. 31 рез. Отримана нами сума не співпадає з відповіддю 179394 грн. 31 рез. Причина різниці в 84 грн. полягає в тому, що ми не врахували грошові суми ще з двох задач, розміщених редактором нижче: 60 грн. + 24 грн. = 84 грн.

Задачі 15 та 16 «О сене» та «О сиротьемъ вырядке» надто вибиваються з загального змісту своєю простотою. У задачі 15 усі арифметичні дії зводилися до розв'язку: 1)  $5 \times 12 = 60$ ; 2)  $60 \times 1$  грн. = 60 грн. Задача ж 16 мала розв'язок: 1)  $12 \times 1$  грн.  $\times 2 = 24$  грн. Також не знаходиться місця цим задачам у тексті задачника і за їх композицією. На наш погляд, задачі 15 та 16 просто належать іншому автору і були додані до задачника пізніше. У його ж попередньому варіанті саме «задача 14» завершувала текст загальним підсумком чисел. Додавання ще двох задач змінило загальну грошову суму, тому число 179310 грн. 31 рез. і було виправлене наступним редактором на 179394 грн. 31 рез. Зауважимо, що задача 14, у свою чергу, оперує лише числовими даними, представленими у тексті, включаючи усі помилкові результати, а отже, її не могло бути в оригіналі задачника. Також не зовсім зрозумілим є і включення до нього фактично ідентичної до задачі 1 задачі 2 «О козах». На наш погляд, остання є лише наслідуванням задачі 1, і у авторському оригіналі задачника її також не було.

Таким чином, перед нами завершений математичний твір невідомого давньоруського «числолюбця». Дату створення задачника визначає використана у ньому грошова система: 1 грн. = 20 ног. = 50 рез. За спостереженням В. Л. Яніна, обрахунок на резани при відсутності згадок у задачнику грошової одиниці «куна» зближує його з *Короткою редакцією* «Правди Руської»<sup>19</sup>. Девальвація куни та падіння її ціни до рівня резани вже в кінці XII ст. привело до ототожнення цих одиниць, причому термін «резана» майже повністю вийшов з ужитку. Ці обставини дозволяють датувати створення задачника часом до кінця XII ст. На наш погляд, початковий варіант задачника включав лише 12 задач (задачі №№ 1, 3–13), покликаних допомогти у навчанні складним обчисленням. Задачі 1–4 пропонували вправи на обчислення геометричної прогресії, а задача 8 —

19 Янин В. Л. *Денежно-весовые системы русского средневековья: домонгольский период*. М., 1956. С. 39–41.



арифметичної. Задачі 5–7 оперують товаром з різною ціною, вираженою в різних грошових одиницях, а найскладніші задачі 9–13 призначалися для навчання обрахункам з дробами. Первісний варіант тексту, очевидно, включав лише умови задач, відповіді ж на них поступово дописувалися різними редакторами, які проявляли інтерес до завдань і хотіли зберегти свої варіанти відповідей. Наступні редактори відшукували помилки у попередніх відповідях чи трактуваннях умови, виправляли їх, додавали відповіді, яких бракувало, і навіть дописували нові задачі (№№ 2, 15, 16) та підсумки чисел відповідей (№ 14). Оскільки автори задач 2 та 14 ще прекрасно знали ціну резани та ногати, додані ці фрагменти були не пізніше XIII ст., для задач же 15–16 дата приєднання до тексту ширша — XIII–XIV ст.

Як показують помилки у цілому ряді відповідей, не всі задачі виявилися простими для читачів. Найлегше вирішувалися завдання, пов'язані з обрахунком вартості товарів, а також задачі на геометричну прогресію, в яких використовувалося лише подвоєння. Натомість вже задача 8 на арифметичну прогресію викликала труднощі через «нестандартність» розв'язку порівняно з задачами 1–4, а задачі 10–13 взагалі залишилися без відповіді, оскільки операції обчислення дробів від цілого числа виявилися для читачів надто складними. Взагалі, можна зробити висновок, що дописувачам відповідей легко давалися дії додавання та множення, однак у них виникали проблеми з пошуком частини від цілого числа. Так, у задачі 4 ніхто так і не дописав ціни одного вепра при умові, що три коштують 45 резан; в задачі 6 не знайшли ціни старого жеребця, яка становила різницю між загальною сумою та отриманим в ході підрахунків числом; а в задачі 8 при визначенні ціни бджіл помилки припустились при елементарному діленні на 2. Доводиться погодитися з Р. А. Симоновим, що за середньовіччя діленням, дійсно, володіли небагато учнів<sup>20</sup>.

Для давньоруського часу задачник, безумовно, був своєрідною «вищою математикою», доступною лише обмеженому колу освічених осіб. Втім, нам важко погодитися з Б. В. Гніденком та А. П. Юшкевичем, що цей твір мав лише розважальне призначення. Задачі 1–4 та 8 усі завершуються перерахунком чисел в грошові одиниці; виключно грошовим обрахункам присвячені і задачі 5–7, задачі ж 9–13 надають необхідні навички розрахунків з дробами, незамінні при обчисленнях податків та боргових відсотків. При справді абсолютно нереальних даних господарчого характеру, задачник має цілком виразне практичне орієнтування своєї математичної частини, найімовірніше призначеної, як і припускав Б. О. Рибаків, у першу чергу для князівських урядників. Цей висновок дуже важливий, оскільки закладений в задачнику рівень математичних знань, за задумом, мав відповідати не рівню одиничних талановитих «числолюбців», як вважав Б. В. Гніденко, а загальному рівню освіченої верстви населення Русі. При цьому талант і виключний статус самого автора задачника не підлягають

---

20 Симонов Р. А. Учебные задачи для абака. С. 280.

сумніву; належним чином має бути оцінена і його спроба передати частину своїх знань іншим шляхом створення єдиного відомого давньоруського математичного твору дидактичного характеру.

Наведені нами розв'язки давньоруських задач не вирішують іншого важливого питання — про способи давньоруського рахунку. Можна лише стверджувати упевнено, що обмежень у можливостях додавання та віднімання чисел давньоруські математики явно не знали, також не викликали проблем операції подвоєння, множення і ділення на 10 та на 100. Використання в операціях множення і ділення також чисел 7, 11, 15, 21, 22, 50 однозначно заперечує тезу Р. А. Симонова про те, що всі дії давньоруської арифметики зводилися лише до найпростіших дій подвоєння та потроєння<sup>21</sup>. Втім, це не означає й того, що на Русі справді володіли методами множення та ділення великих чисел, адже простіше їх було просто додавати й віднімати, як це й досі роблять учні початкових класів, яким важко засвоїти таблицю множення.

Як ми з'ясували із задач 3 та 8, запис проміжних результатів арифметичних дій безумовно здійснювався, й записувалися ці числа, швидше за все, на воскових табличках. Однак як здійснювалися самі обрахунки? Яким чином можна було безпомилково виконати, наприклад, обчислення:  $90112 \times 6 : 20 + 90111 \times 10 : 50$ , якщо, як ми відзначали вище, труднощі викликали навіть ділення на 2? На думку Р. А. Симонова, В. К. Кузакова та Б. Я. Віленчика, такі обрахунки виконувалися за допомогою рахівного пристрою типу абака<sup>22</sup>. Зауважимо, факт використання давньоруським населенням абака на сьогодні все ще не може бути доведеним, насправді це не більше ніж вірогідна гіпотеза, яка лише дозволяє заповнити лакуну в наших знаннях.

Ще скептичніше слід поставитися до реконструкції давньоруського абака, запропонованої Р. А. Симоновим<sup>23</sup>. У пошуках «архаїчної» слов'янської форми абака дослідник, очевидно, орієнтувався на вигляд китайського суан-пана, внаслідок чого його вибір упав на описаний Я. Накциановичем «абаку» середини XVIII ст. руського та литовського населення Речі Посполитої. При цьому дослідник не звернув уваги на відзначений І. Г. Спаським факт, що в українців не існувало жодного аналога російській рахівниці, а натомість використовувався спільний для Речі Посполитої і всієї Західної Європи метод «рахунку на лініях»<sup>24</sup>. Саме в цьому методі й використовується ряд з шести лічильних

21 Симонов Р. А. *Математическая мысль*. С. 53–56; Його ж, О проблеме наглядно-инструментального счёта в Древней Руси. *Советская археология*. 1975. № 3. С. 92; Кузнецова В. С., Симонов Р. А. Об умножении на древнерусском абаке. *Естественнонаучные знания в Древней Руси*. М., 1980. С. 12–15.

22 Симонов Р. А. О проблеме наглядно-инструментального счёта. С. 82–93; Його ж. О вычислительной арифметике. С. 72; Його ж. Учебные задачи для абака. С. 280–285; Кузаков В. К. *Очерки развития*. С. 112; Його ж. *Отечественная историография*. С. 184–185; Вилецчик Б. Я. Новые доказательства существования русского архаического абака. *Советская археология*. 1984. № 3. С. 59–65.

23 Симонов Р. А. Учебные задачи для абака. С. 280–285.

жетонів-«лічбанів», перший з яких позначає п'ятірку, а решта — одиниці. У XVII ст. в Росії цей метод був описаний під виглядом «рахунку кістками», причому, як переконливо показав І. Г. Спаський, мова йде лише про переклад на російську мову західноєвропейського підручника<sup>25</sup>. На відміну від країн Західної Європи, де для такого підрахунку використовувалися спеціальні жетони або монети, які вийшли з обігу, в Росії користувалися сливовими або вишневими кісточками, що й відзначили іноземці<sup>26</sup>. На наш погляд, «рахунок кістками» в XVI–XVII ст. цілком міг замінити більш давній спосіб рахунку за допомогою кісточок, однак це не дає жодних підстав механічно переносити в давньоруський час і способи розрахунків з кісточками XVII–XVIII ст., як це беззастережно робить Р. А. Симонов<sup>27</sup>.

Грунтовне дослідження І. Г. Спаським проблеми походження російської рахівниці<sup>28</sup> привело дослідника до висновку, що жодних даних про використання в Росії п'ятирозрядних рахівних пристроїв немає. Найдавнішою формою рахівниці тут насправді є велика чотирирамна рахівниця з дев'ятьма кісточками в ряду, яка поступово еволюціонувала у напрямку спрощення до дворамної рахівниці з десятьма кісточками, а потім і до знайомої нам однорамної. Чотирирамна рахівниця вже на початку XVII ст. була архаїзмом, а отже, пік її використання має падати на XVI ст. Якщо давньоруський абак дійсно існував, то саме ця рахівниця, яка не має ні східних, ні західних аналогів, і має стати відправною точкою в його реконструкції.

Першим ідея замінити предмети при підрахунку їх дрібними символами, очевидно, мала прийти на думку торговцям крупним товаром. Початково на землі розкладалася вся сума символів предметів, які для зручності групувалися по 5 або по 10 штук; згодом виникла ідея використати ці ряди для побудови ієрархії чисел. Ідея абак проста і надзвичайно зручна; різні народи могли прийти до неї абсолютно самостійно, однак не слід забувати й те, що ще простіше її могли рознести по різних регіонах одні з найбільш зацікавлених користувачів абак — купці.

Важко сказати, яким шляхом абак міг з'явитися на Русі. Перший факт, на який слід звернути увагу — це розташування в ряду найдавнішої російської рахівниці дев'яти кісточок. Десята не була потрібна, оскільки замість неї просто відкладалася кісточка на ряд вище. Якщо такий же вигляд мав і давньоруський абак, то він явно був місцевим винаходом або ж оригінальною модифікацією абак, запозиченого від сусідів.

---

24 Спаський І. Г. Происхождение и история русских счётов. *Историко-математические исследования*. 1952. Вып. 5. С. 369–371.

25 Там же. С. 283–299.

26 Там же. С. 300.

27 Симонов Р. А. *Математическая мысль*. С. 53–58; Його ж. Учебные задачи для абак. С. 280–281.

28 Спаський І. Г. Происхождение и история. С. 301–371.

Що означали одразу чотири рами російської рахівниці XVI ст.? Очевидно, вони мали бути пристосованими під певну схему розрахунків, яка допускала одночасний підрахунок одразу чотирьох різних параметрів. Оскільки така конструкція робила рахівницю надзвичайно великою й незручною, закономірно припустити, що цей спосіб рахунку дістався рахівниці у спадок від давнього «рахунку кістками», в якому розкреслити нову рамку не складало великого труда. Підкреслимо, для «рахунку на лініях» чотирьох рам також могло вистачити у певних задачах, однак все ж більш імовірно, що це було пережитком архаїчної системи підрахунку, яку ми можемо спостерігати і в розглянутих вище давньоруських задачах.

Так, ділення на будь-яке число вимагало або знання таблиці множення, або ж дійсно наявності у абака мінімум двох-трьох рамок. У першій рамці відкладалося число, яке ділиться, а в другій на паралельних лініях відкладали проміжні числа обрахунків по кожній з ліній. Наприклад, при діленні 122 на 6 кісточка сотні з першої рамки переносилася на рівень десятків у другій; від 12 кісточок, які таким чином виявлялися на одній лінії, віднімалося двічі 6, і отримані дві кісточки десятків відкладали на лінії десятків у третій рамці. Після завершення операцій у першій частині лишався залишок 2; друга була порожня, а в третій знаходився результат 20. Після цього залишок виписувався на воскову дощечку, а результат перекладався у першу рамку, однак якщо писати не було на чому, для наступної дії розграфлювали ще одну або кілька рамок, що не становить проблеми, коли в запасі є достатня кількість місця та кісточок. Можна було, звичайно, обійтися і двома рамками, відмовившись від ділення, і просто багаторазово віднімати дільник, відкладаючи справа кількість дій, фінальна сума яких і буде результатом.

Також окремої рамки вимагав і «рахунок на гроші». Взагалі, однією з переваг абака вільної конфігурації, як справедливо відзначив Р. А. Симонов<sup>29</sup>, була його здатність виконувати обчислення фактично з будь-якими дробами. Для цього в рахівницях XVI–XVII ст. нижче від основного першого десятка розташовувалися ряди числа знаменника. Так, для дроби  $1/3$  нижче одиниць розташовувалися 3 кісточки (або для дев'ятирозрядного абака — 2), для  $1/4$  — чотири (або 3) і т. д. За цією схемою в давньоруському абаці для перерахунку резан в гривни нижче від одиниць-гривен мали йти 4 кісточка десятків резан і ряд з 9 одиниць резан; для перерахунку ногат — 1 кісточка десятків і 9 одиниць-ногат. Додавання відбувалося механічно навіть без знання властивостей дробів: як тільки в нижньому ряду закінчувалися кісточка, потрібно було просто відкинути одну кісточку в наступному ряді й перекласти вправо кісточка нижнього; так же просто здійснювалося і віднімання. Усе, що потрібно було знати, це скільки частин складають ціле число.

---

29 Симонов Р. А. Учебные задачи для абака. С. 281–285.

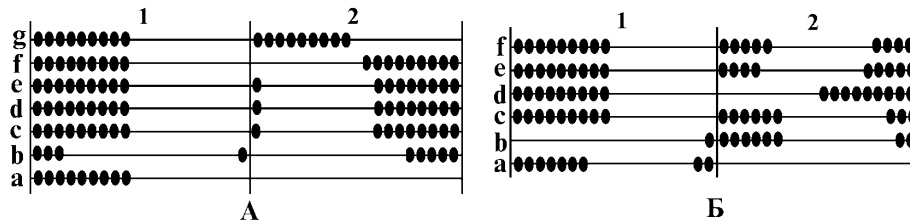


Рис. 1. Запис на абаку для переведення в гривні чисел: А — 901120 резан; Б — 540672 ногат.

Звичайно, виникає закономірне запитання, а як бути з числами більше 50 резан та 20 ногат? На жаль, відповідь тут можлива лише на рівні гіпотез. На наш погляд, для перерахунку великих чисел резан та ногат в гривні раціонально було використовувати дві рамки. Записи чисел 901110 рез. та 540672 ног. з задачі 1 в такому абаці зображені на рис. 1. Ліва рамка була звичайною рамкою для додавання дробів, тільки кісточки в ній відкладалися не вліво, а вправо. На лінії **a** в рамці 1 відкладалися одиниці-резани, а в рамці 2 кісточок не було. На лінії **b** в обох рамках відкладалися десятки резан, однак в рамці 1 було 4 кісточки, а решта 5 — в рамці 2 (для ногат: зліва 1 і 8 справа). На лінії **c** в рамці 1 йшли одиниці-гривні, а в рамці 2 — сотні резан; на лінії **d** відповідно десятки гривень та тисячі резан і т. д. Кісточки в рамці 2 відкладалися звично — справа наліво. Число резан чи ногат відкладалося повністю на двох рамках, а процедура переведення дрібних одиниць в гривні полягала у повному перенесенні кісточок з правої рамки на ліву.

Вирішення ж задач з дробами типу розглянутих нами вище задач 10–13, в яких потрібно було, навпаки, з'ясувати значення дробу від числа, вимагало, як і ділення, три рамки: на першій відкладали число, на другій — проміжні числа, на третій — результат. При відсутності ж уміння ділення можна було обмежитись відніманням. Тобто, наприклад, для схеми «на 40–20» після кожних забраних 40 кісточок зліва, наступні 20 переносилися на праву рамку. Фінальна сума справа означала результат, а число зліва — залишок.

Найпростіше на абаці розглянутого типу вирішувалися приклади з додаванням та відніманням. Більше часу займало множення шляхом додавання, а найбільш трудоемким процесом було ділення. Втім, підкреслимо ще раз, навіть без знання спеціальних способів множення та ділення, простими способами багатократного віднімання й додавання давньоруські математики могли вести обчислення з доволі великими числами.

Реконструйований нами варіант давньоруського абака не є «архаїчним». Він дещо нагадує західноєвропейський «рахунок на лініях», в якому також розкреслювалася необхідна для обчислень кількість рамок, на лініях яких відкладалися числа та проміжні результати. Очевидно, саме це й стало причиною того, що на запозичений в XVI–XVII ст. «рахунок на лініях» у Росії перенесли стару назву «рахунок кістками». Розвиток земель Південно-Західної та Північно-

Східної Русі у післямонгольський час відбувався незалежно, однак цікаво, що і в Московській державі, й у руського населення Речі Посполитої розташування кісточок-жетонів в «рахунку на лініях» дещо відрізнялося від класичного західноєвропейського: жетон-п'ятірка тут розміщувався на одній лінії з одиницями, а не між рядами, як належало б. Цілком очевидно, що мова йде про традицію розміщення кісточок в одну лінію, яка має сягати корінням давньоруського часу. Інший напрямок розвитку цієї традиції у Північно-Східній Русі спочатку призвів до появи спеціальних дощечок з уже розграфленими рамками, на яких розкладали кісточки («дощатий рахунок»), а потім і до появи рахівниці. Паралельна російська назва «кісточок» рахівниці — «чѣтки» — підказує, що саме могло подати ідею нанизати кісточки на вісь. Виникнення рахівниці — явище, безумовно, пізніше, однак зауважимо, що способи рахунку на ранній чотирирамній рахівниці XVI ст. мали бути надзвичайно близькими до давньоруських. Саме подальші дослідження в цьому напрямку і здатні, на наш погляд, справді наблизити нас до розв'язання проблеми давньоруського рахунку.

Інститут археології НАН України