УДК 512.61

Н.А. ВАРЕНЮК, Н.И. ТУКАЛЕВСКАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕСАМИ

Аннотация. Для произвольных комплексных матриц получены необходимые и достаточные условия существования и единственности взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными знаконеопределенными весами. Получены представления этих матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов эрмитезуемых матриц.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы со знаконеопределенными весами, эрмитезуемые матрицы.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые определения взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными и вырожденными весами были введены в работах [1, 2] соответственно. Необходимые и достаточные условия существования псевдообратных матриц с вырожденными весами приведены в [2].

В работах [3–5] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами, а также определены необходимые и достаточные условия их существования, взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами (см. также обзоры в [6, 7]).

В работе [8] введено понятие *ML*-взвешенной псевдообратной матрицы, а в [9] дано определение взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными индефинитными весами и указаны достаточные условия их существования.

В [10] исследованы взвешенные псевдообратные матрицы с индефинитными весами для действительных матриц и дано их представление в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, а также получены разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами (обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная) в матричные степенные ряды и произведения, многочленные предельные представления этих матриц. В указанной работе построены регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами.

Для взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными и вырожденными весами многочленные предельные представления получены в [11], на основании которых построены регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальних псевдорешений. Представление взвешенных псевдобратных матриц со смешанными весами через псевдобратные матрицы Мура–Пенроуза получено в [12].

В настоящей работе для произвольных комплексных матриц определены необходимые и достаточные условия существования и единственности взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными знаконеопределенными эрмитовыми весовыми матрицами. Рассмотрено четыре вида таких матриц. При доказательстве теоремы существования и единственности использована теорема Кэли–Гамильтона, на основании чего получены представления взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов эрмитезуемых матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Определение 1. Комплексную матрицу U будем называть эрмитезуемой слева или справа, если существует такая эрмитова невырожденная матрица H, что выполняются соответственно равенства

$$HU = U^* H, \; UH = HU^*. \tag{1}$$

Отметим, что в ряде работ (см., например, [13–17]) изучались H-самосопряженные матрицы, в которых H предполагалась симметричной или эрмитовой невырожденной знаконеопределенной матрицей, и исследовались свойства пространств с индефинитной метрикой, порождаемой этой метрической матрицей.

В дальнейшем будем обозначать $rk(L)$ ранг матрицы L, $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ — сопряженную матрицу по отношению к матрице $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, E — единичную матрицу, $tr(L)$ — след матрицы L.

При доказательстве теоремы существования единственной взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами будем использовать следующее утверждение [3].

Лемма 1. Пусть для квадратных матриц K, L, M выполняются условия $KM = MK$, $LM = ML$. Тогда из равенства $KM^2 = LM^2$ следует равенство $KM = LM$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, а $B = B^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $C^{-1} = (C^{-1})^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняются условия

$$rk(A^* BA) = rk(A), \; rk(AC^{-1}A^*) = rk(A), \tag{2}$$

тогда ранги матриц A и $A^* BAC^{-1}A^*$ совпадают.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу того, что B и C^{-1} — невырожденные матрицы, следует

$$rk(A^* B) = rk(BA) = rk(AC^{-1}) = rk(A^*) = rk(A). \tag{3}$$

Для доказательства леммы 2 будем использовать неравенство Фробениуса

$$rk(PQ) + rk(QL) \le rk(Q) + rk(PQL), \tag{4}$$

справедливое для всех тех матриц P, Q, L, для которых определено произведение PQL.

На основании (4) имеем

$$rk(A^* BA) + rk(BAC^{-1}A^*) \le rk(BA) + rk(A^* BAC^{-1}A^*). \tag{5}$$

Учитывая (3) и первое равенство в (2), из (5) получаем

$$rk(BAC^{-1}A^*) \le rk(A^* BAC^{-1}A^*). \tag{6}$$

На основании (6) имеем $rk(BAC^{-1}A^*) \le rk(A^* BAC^{-1}A^*) \le rk(BAC^{-1}A^*)$, т.е.

$$rk(BAC^{-1}A^*) = rk(A^* BAC^{-1}A^*). \tag{7}$$

Далее в силу неравенства Фробениуса (4) имеем

$$rk(BA) + rk(AC^{-1}A^*) \le rk(A) + rk(BAC^{-1}A^*). \tag{8}$$

В силу второго условия в (2), соотношений (3) и очевидного неравенства $rk(BAC^{-1}A^*) \le rk(A)$ из (8) имеем $rk(BAC^{-1}A^*) = rk(A)$. Учитывая это равенство и равенство (7), получаем $rk(A^* BAC^{-1}A^*) = rk(A)$, т.е. утверждение леммы 2.

Следствие 1. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, а $B^{-1} = (B^{-1})^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $C = C^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняются условия

$$rk(A^* B^{-1} A) = rk(A), \ rk(ACA^*) = rk(A),$$

тогда ранги матриц A и $A^* B^{-1} ACA^*$ совпадают.

Следствие 2. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, а $B^{-1} = (B^{-1})^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $C = (C^{-1})^* \in \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняются условия

$$rk(A^* B^{-1} A) = rk(A), \ rk(AC^{-1} A^*) = rk(A),$$

тогда ранги матриц A и $A^* B^{-1} AC^{-1} A^*$ совпадают.

Следствие 3. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, а $B = B^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $C = C^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняются условия

$$rk(A^* BA) = rk(A), \ rk(ACA^*) = rk(A),$$

тогда ранги матриц A и $A^* BACA^*$ совпадают.

При исследовании взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными невырожденными весами потребуется легко проверяемое утверждение.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$, а $B = B^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и $C = C^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняются условия $AXB = (AXB)^*$, $XAC = (XAC)^*$, тогда $B^{-1} AX = (B^{-1} AX)^*$, $C^{-1} XA = (C^{-1} XA)^*$.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОГО ИЗ ВАРИАНТОВ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕСАМИ

Матрицу $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ будем называть взвешенной псевдообратной для матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ со знаконеопределенными невырожденными весовыми эрмитовыми матрицами B и C, если выполнены следующие условия:

$$AXA = A, \ XAX = X, \ (BAX)^* = BAX, \ (CXA)^* = CXA, \tag{9}$$

$$rk(A^* BA) = rk(A), \ rk(AC^{-1} A^*) = rk(A). \tag{10}$$

Теорема 1. Система матричных уравнений (9) при выполнении условий (10) имеет единственное решение $X = A_{BC}^+$, причем матрицу A_{BC}^+ можно представить в виде

$$A_{BC}^+ = C^{-1} SA^* B, \tag{11}$$

где $S = f(A^* BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^* BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^* BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^* BAC^{-1})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \dots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = \det [\lambda E - A^* BAC^{-1}],$$

α_k — последний, отличный от нуля, коэффициент этого многочлена.

Доказательство. Вначале покажем, что матрица, определенная формулой (11), удовлетворяет системе (9), если существует матрица S, удовлетворяющая условиям

$$SA^* BAC^{-1} A^* = A^*, \ SA^* BAC^{-1} = A^* BAC^{-1} S, \ C^{-1} S = (C^{-1} S)^*. \tag{12}$$

Матрица A_{BC}^+ удовлетворяет первому уравнению в (9) при выполнении условий (12). Действительно, учитывая второе и третье условия в (12), первое условие в (12) можно записать в виде $A^*BAC^{-1}SA^* = A^*$, $AS^*C^{-1}A^*BA = A$, $AC^{-1}SA^*BA = A$, откуда в силу представления A^+_{BC} формулой (11) и следует утверждение.

Чтобы показать, что матрица A^+_{BC} удовлетворяет второму уравнению в (9), умножим первое уравнение в (12) слева на $C^{-1}S$, а справа — на B. Учитывая второе условие в (12) и представление A^+_{BC} (11), получаем $C^{-1}S^2A^*BAC^{-1}A^*B = C^{-1}SA^*B$, $C^{-1}SA^*BAC^{-1}SA^*B = A^+_{BC}$, $A^+_{BC}AA^+_{BC} = A^+_{BC}$, т.е. матрица A^+_{BC}, определенная формулой (11), удовлетворяет второму уравнению в (9).

Далее, подставляя в третье уравнение из (9) представление для A^+_{BC} (11), с учетом третьего условия в (12) получаем $BAC^{-1}SA^*B = BAS^*C^{-1}A^*B = (BAC^{-1}SA^*B)^*$, т.е. BAA^+_{BC} является симметричной матрицей и, следовательно, A^+_{BC} удовлетворяет третьему уравнению в (9).

Наконец, подставляя в четвертое уравнение из (9) представление для A^+_{BC} (11) и учитывая второе и третье условия в (12), имеем $CC^{-1}SA^*BAC^{-1}C = CC^{-1}A^*BAC^{-1}SC = CC^{-1}A^*BAS^*C^{-1}C = A^*BAS^* = (SA^*BA)^*$, так что $CA^+_{BC}A$ является симметричной матрицей, т.е. удовлетворяет четвертому условию в (9).

Теперь покажем, что существует такая матрица S, которая удовлетворяет равенствам (12) при выполнении условий (10). Для этого используем теорему Кэли–Гамильтона, согласно которой любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поскольку $A^*BAC^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, справедливо равенство

$$(A^*BAC^{-1})^n + \alpha_1(A^*BAC^{-1})^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}A^*BAC^{-1} + \alpha_n E = 0. \qquad (13)$$

Пусть матрица A^*BAC^{-1} невырожденная и, следовательно, имеет обратную. Тогда $\alpha_n \neq 0$ и можно положить $S = (A^*BAC^{-1})^{-1}$. Легко проверить, что такая матрица удовлетворяет условиям (12). Но в общем случае матрица A^*BAC^{-1} является вырожденной и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Пусть среди коэффициентов α_p, $p = 1, 2, \dots, n-1$, последним, отличным от нуля, коэффициентом полинома $f(\lambda) = \det[\lambda E - A^*BAC^{-1}]$ будет α_k и пусть

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^*BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1(A^*BAC^{-1})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1}E]. \qquad (14)$$

Из вида матрицы S, определенной формулой (14), следует, что для нее выполняются второе и третье условия в (12). Покажем, что для матрицы S выполняется первое условие в (12).

Учитывая (14), из (13) получаем

$$S(A^*BAC^{-1})^{n-k+1} = (A^*BAC^{-1})^{n-k}. \qquad (15)$$

В силу леммы 1 из (15) имеем

$$S(A^*BAC^{-1})^2 = A^*BAC^{-1},$$

откуда, умножив справа обе части этого равенства на A^* с учетом второго равенства в (12), получим

$$A^*BAC^{-1}A^*BAC^{-1}SA^* = A^*BAC^{-1}A^*. \qquad (16)$$

Поскольку матрицы B и C^{-1} невырожденные, матрицы $A^*B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $AC^{-1} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и A^* имеют тот же ранг, что и матрица A, который положим равным r. А в силу леммы 2 ранг матрицы $A^*BAC^{-1}A^*$ при выполнении условий (10) также равен r.

Чтобы показать, что из равенства (16) следует первое равенство в (12), используем скелетное разложение матриц (см. [18, 19]) A^*B, AC^{-1} и A^*, т.е. представим их в виде $A^*B = KL$, $AC^{-1} = MN$, $A^* = PQ$, где $K \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{C}^{r\times m}$, $M \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $N \in \mathbb{C}^{r\times n}$, $P \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $Q \in \mathbb{C}^{r\times m}$ — матрицы полного ранга. Тогда (16) примет вид

$$KLMNPQBAC^{-1}SA^* = KLMNPQ. \qquad (17)$$

Матрица K^*K невырожденная, поскольку K — матрица полного ранга с $n \geq r$ (см. [18]). Умножим равенство (17) слева вначале на K^*, а затем — на $(K^*K)^{-1}$. Получим

$$LMNPQBAC^{-1}SA^* = LMNPQ. \qquad (18)$$

Матрицы LM и NP квадратные, невырожденные ранга r.

Действительно, ранг этих матриц будет r, поскольку из леммы 2 следует, что ранг матрицы $KLMNPQ = A^*BAC^{-1}A^*$ при выполнении условий (10) равен r. Но ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей, а ранги матриц-сомножителей LM и NP не могут превышать r, поскольку r — порядок этих матриц.

Умножим равенство (18) слева вначале на $(LM)^{-1}$, а затем — на $(NP)^{-1}$. В результате получим

$$QBAC^{-1}SA^* = Q. \qquad (19)$$

Теперь, умножая слева (19) на P и используя второе равенство из (12), получаем первое равенство в (12).

Таким образом, показано, что решение системы матричных уравнений (9) при выполнении условий (10) существует и представлено в (11). Покажем, что это представление единственно, т.е. существует единственная взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами, заданная системой (9) при выполнении условий (10). Доказательство проведем от противного.

Предположим, что кроме матрицы S существует еще матрица S_1, удовлетворяющая (11). Пусть O — нулевая матрица и $\widetilde{S} = S - S_1$. Тогда $C^{-1}\widetilde{S}A^*B = O$. Умножим это равенство слева на C, а справа — на $AC^{-1}A^*$. Тогда, учитывая первое равенство в (12), получаем $\widetilde{S}A^*BAC^{-1}A^* = A^* = O$. Последнее равенство может выполняться, когда матрицы $\widetilde{S}$ или A нулевые. Если $\widetilde{S}$ — нулевая матрица, то матрица S в (11) и, следовательно, матрица A_{BC}^+ определяются единственным образом. Если A — нулевая матрица, то из (11) следует, что взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами будет нулевой, что подтверждает непосредственная проверка условий (9), (10).

Таким образом, установлено, что условия (10) достаточные для существования единственного решения системы матричных уравнений (9). Докажем, что условия (10) являются необходимыми для существования единственного решения системы (9).

Предположим, что система матричных уравнений (9) имеет единственное решение $X = A_{BC}^+$, в этом случае выполняются условия (10). Вначале покажем, что при выполнении (9) справедливо первое условие в (10). Третье условие в (9) запишем в виде $(A_{BC}^+)^* A^*B = BAA_{BC}^+$. Умножим справа это равенство на матрицу B и учтем первое равенство в (9), получим $(A_{BC}^+)^* A^*BA = BAA_{BC}^+A = BA$. Поскольку при умножении матрицы на невырожденную матрицу ее ранг не изменяется, из последнего равенства получим $rk(BA) = rk(A) = rk((A_{BC}^{+})^{*} A^{*} BA) \leq$ $\leq rk(A^{*} BA) \leq rk(A)$, откуда следует $rk(A) = rk(A^{*} BA)$, т.е. первое условие в (10).

Теперь покажем, что при выполнении (9) справедливо второе условие в (10). Четвертое условие в (9) запишем в виде $A^{*}(A_{BC}^{+})^{*} C = CA_{BC}^{+} A$. Умножим справа это равенство на $C^{-1} A^{*}$, получим $A^{*}(A_{BC}^{+})^{*} A^{*} = CA_{BC}^{+} AC^{-1} A^{*}$. Учитывая первое равенство в (9), из последнего имеем $rk(A^{*}(A_{BC}^{+})^{*} A^{*}) =$ $= rk(A(A_{BC}^{+}) A)^{*} = rk(A) = rk(CA_{BC}^{+} AC^{-1} A^{*}) \leq rk(AC^{-1} A^{*}) \leq rk(A)$, откуда следует $rk(A) = rk(AC^{-1} A^{*})$, т.е. второе условие в (10).

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица со знаконеопределенными весами, заданная системой матричных уравнений (9) при выполнении условий (10), имеет также следующие представления: $A_{BC}^{+} = S_1 C^{-1} A^{*} B =$ $= C^{-1} A^{*} BS_2 = C^{-1} A^{*} S_3 B$, где S_1, S_2, S_3 — многочлены от эрмитезуемых матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(C^{-1} A^{*} BA)^{k-1} + \alpha_1 (C^{-1} A^{*} BA)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(AC^{-1} A^{*} B)^{k-1} + \alpha_1 (AC^{-1} A^{*} B)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(BAC^{-1} A^{*})^{k-1} + \alpha_1 (BAC^{-1} A^{*})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E].$$

Следствие 2. Эрмитезуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+} A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+} A = C^{-1} SA^{*} BA = f(C^{-1} A^{*} BA) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(C^{-1} A^{*} BA)^{k} + \alpha_1 (C^{-1} A^{*} BA)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} (C^{-1} A^{*} BA)],$$

$$AA_{BC}^{+} = AC^{-1} SA^{*} B = f(AC^{-1} A^{*} B) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(AC^{-1} A^{*} B)^{k} + \alpha_1 (AC^{-1} A^{*} B)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} (AC^{-1} A^{*} B)].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^{*} BAA_{BC}^{+} = A^{*} B$, $A_{BC}^{+} AC^{-1} A^{*} =$ $= C^{-1} A^{*}$.

Следствие 4. При $rk(A) = 1$ имеем формулу $A_{BC}^{+} = [tr(A^{*} BAC^{-1})]^{-1} C^{-1} A^{*} B$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со знаконеопределенными весами.

Из представления взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами формулой (11) следует соответствующее представление взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами, полученное в [20], и псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученное в [21]. В работах [21, 22] описана вычислительная процедура, позволяющая на основе представления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза в терминах коэффициентов характеристических многочленов эрмитовых матриц вычислять эту матрицу за приемлемое число операций. Для действительных матриц представление взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц используется в [10] при обосновании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ДРУГИХ ВИДОВ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕСАМИ

Ранее описана и исследована взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (9), (10), т.е. случай, когда обе идемпотентные матрицы: AX и XA, согласно определению 1 эрмитезуемые слева индефинитными эрмитезаторами B и C. Далее представлены еще три вида взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными индефинитными весами.

Вначале рассмотрим случай, когда идемпотентные матрицы AX и XA согласно определению эрмитезуемые справа индефинитными эрмитезаторами B и C, т.е. приведем систему матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AXB)^* = AXB,\ (XAC)^* = XAC \tag{20}$$

при выполнении условий

$$rk(A^* B^{-1} A) = rk(A),\ rk(ACA^*) = rk(A). \tag{21}$$

На основании теоремы 1, леммы 3, следствия 1 из леммы 2 получим утверждение.

Теорема 2. Система матричных уравнений (20) при выполнении условий (21) имеет единственное решение $X = A_{BC}^+$, причем матрицу A_{BC}^+ можно представить в виде

$$A_{BC}^+ = CSA^* B^{-1},$$

где $S = f(A^* B^{-1} AC)$ — многочлен от матрицы $A^* B^{-1} AC$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^* B^{-1} AC)^{k-1} + \alpha_1 (A^* B^{-1} AC)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \dots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \det[\lambda E - A^* B^{-1} AC]$, а α_k — последний, отличный от нуля, коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица со знаконеопределенными весами, заданная системой матричных уравнений (20) при выполнении условий (21), имеет также следующие представления: $A_{BC}^+ = S_1 CA^* B^{-1} = CA^* B^{-1} S_2 = CA^* S_3 B^{-1}$, где S_1, S_2, S_3 — многочлены от эрмитезуемых матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(CA^* B^{-1} A)^{k-1} + \alpha_1 (CA^* B^{-1} A)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(ACA^* B^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (ACA^* B^{-1})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(B^{-1} ACA^*)^{k-1} + \alpha_1 (B^{-1} ACA^*)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E].$$

Следствие 2. Эрмитезуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^+ A$ и AA_{BC}^+ имеют следующие представления:

$$A_{BC}^+ A = CSA^* B^{-1} A = f(CA^* B^{-1} A) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(CA^* B^{-1} A)^k + \alpha_1 (CA^* B^{-1} A)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} (CA^* B^{-1} A)],$$

$$AA_{BC}^+ = ACSA^* B^{-1} = f(ACA^* B^{-1}) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(ACA^* B^{-1})^k + \alpha_1 (ACA^* B^{-1})^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} (ACA^* B^{-1})].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^* B^{-1} AA_{BC}^+ = A^* B^{-1}$, $A_{BC}^+ ACA^* = CA^*$.

Следствие 4. При $rk(A)=1$ имеем формулу $A_{BC}^{+}=[tr(A^{*}B^{-1}AC)]^{-1}CA^{*}B^{-1}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со знаконеопределенными весами, заданных условиями (20), (21).

Рассмотрим случай, когда идемпотентная матрица AX согласно определению эрмитезуемая справа индефинитным эрмитезатором B, а идемпотентная матрица XA эрмитезуемая слева индефинитным эрмитезатором C, т.е. имеем систему матричных уравнений

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (AXB)^{*}=AXB,\ (CXA)^{*}=CXA \tag{22}$$

при выполнении условий

$$rk(A^{*}B^{-1}A)=rk(A),\ rk(AC^{-1}A^{*})=rk(A). \tag{23}$$

На основании теоремы 1, леммы 3, следствия 2 из леммы 2 имеем утверждение.

Теорема 3. Система матричных уравнений (22) при выполнении условий (23) имеет единственное решение $X=A_{BC}^{+}$, причем матрицу A_{BC}^{+} можно представить в виде

$$A_{BC}^{+}=C^{-1}SA^{*}B^{-1},$$

где $S=f(A^{*}B^{-1}AC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^{*}B^{-1}AC^{-1}$ вида

$$S=-\alpha_{k}^{-1}[(A^{*}B^{-1}AC^{-1})^{k-1}+\alpha_{1}(A^{*}B^{-1}AC^{-1})^{k-2}+\dots+\alpha_{k-1}E],$$

α_{p}, $p=1,\dots,n$ — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)=$ $=\det[\lambda E-A^{*}B^{-1}AC^{-1}]$, а α_{k} — последний, отличный от нуля, коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица со знаконеопределенными весами, заданная системой матричных уравнений (22) при выполнении условий (23), имеет также следующие представления: $A_{BC}^{+}=S_{1}C^{-1}A^{*}B^{-1}=$ $=C^{-1}A^{*}B^{-1}S_{2}=C^{-1}A^{*}S_{3}B^{-1}$, где S_1, S_2, S_3 — многочлены от эрмитезуемых матриц вида

$$S_{1}=-\alpha_{k}^{-1}[(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)^{k-1}+\alpha_{1}(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)^{k-2}+\dots+\alpha_{k-1}E],$$

$$S_{2}=-\alpha_{k}^{-1}[(AC^{-1}A^{*}B^{-1})^{k-1}+\alpha_{1}(AC^{-1}A^{*}B^{-1})^{k-2}+\dots+\alpha_{k-1}E],$$

$$S_{3}=-\alpha_{k}^{-1}[(B^{-1}AC^{-1}A^{*})^{k-1}+\alpha_{1}(B^{-1}AC^{-1}A^{*})^{k-2}+\dots+\alpha_{k-1}E].$$

Следствие 2. Эрмитезуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+}A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+}A=C^{-1}SA^{*}B^{-1}A=f(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)=$$

$$=-\alpha_{k}^{-1}[(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)^{k}+\alpha_{1}(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)^{k-1}+\dots+\alpha_{k-1}(C^{-1}A^{*}B^{-1}A)],$$

$$AA_{BC}^{+}=AC^{-1}SA^{*}B^{-1}=f(AC^{-1}A^{*}B^{-1})=$$

$$=-\alpha_{k}^{-1}[(AC^{-1}A^{*}B^{-1})^{k}+\alpha_{1}(AC^{-1}A^{*}B^{-1})^{k-1}+\dots+\alpha_{k-1}(AC^{-1}A^{*}B^{-1})].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^{*}B^{-1}AA_{BC}^{+}=A^{*}B^{-1}$, $A_{BC}^{+}AC^{-1}A^{*}=$ $=C^{-1}A^{*}$.

Следствие 4. При $rk(A)=1$ имеем формулу $A^+_{BC} = [tr(A^* B^{-1} A C^{-1})]^{-1} C^{-1} A^* B^{-1}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со знаконеопределенными весами, заданных условиями (22), (23).

Теперь рассмотрим случай, когда идемпотентные матрицы AX и XA согласно определению эрмитезуемые соответственно слева эрмитезатором B и справа эрмитезатором C, т.е. имеем систему матричных уравнений

$$AXA = A, \ XAX = X, \ (BAX)^* = BAX, \ (XAC)^* = XAC \qquad (24)$$

при выполнении условий

$$rk(A^* BA) = rk(A), \ rk(ACA^*) = rk(A). \qquad (25)$$

На основании теоремы 1, леммы 3, следствия 3 из леммы 2 имеем утверждение.

Теорема 4. Система матричных уравнений (24) при выполнении условий (25) имеет единственное решение $X = A^+_{BC}$, причем матрицу A^+_{BC} можно представить в виде

$$A^+_{BC} = CSA^* B,$$

где $S = f(A^* BAC)$ — многочлен от матрицы $A^* BAC$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^* BAC)^{k-1} + \alpha_1 (A^* BAC)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \dots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \det[\lambda E - A^* BAC]$, а α_k — последний, отличный от нуля, коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (24), (25), имеет также следующие представления: $A^+_{BC} = S_1 CA^* B = CA^* BS_2 = CA^* S_3 B$, где S_1, S_2, S_3 — многочлены от эрмитезуемых матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(CA^* BA)^{k-1} + \alpha_1 (CA^* BA)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(ACA^* B)^{k-1} + \alpha_1 (ACA^* B)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(BACA^*)^{k-1} + \alpha_1 (BACA^*)^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E].$$

Следствие 2. Эрмитезуемые идемпотентные матрицы $A^+_{BC} A$ и AA^+_{BC} имеют следующие представления:

$$A^+_{BC} A = CSA^* BA = f(CA^* BA) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(CA^* BA)^k + \alpha_1 (CA^* BA)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} CA^* BA],$$

$$AA^+_{BC} = ACSA^* B = f(ACA^* B) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(ACA^* B)^k + \alpha_1 (ACA^* B)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} ACA^* B].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^* BAA^+_{BC} = A^* B$, $A^+_{BC} ACA^* = CA^*$.

Следствие 4. При $rk(A)=1$ имеем формулу $A^+_{BC} = [tr(A^* BAC)]^{-1} CA^* B$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (24), (25).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе определены необходимые и достаточные условия существования взвешенных псевдообратных матриц с эрмитовыми знаконеопределенными весовыми матрицами. Рассмотрено четыре вида таких псевдообратных матриц. Для каждого из них дано представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов эрмитезуемых матриц. На основании этого представления можно построить соответствующий алгоритм для вычисления взвешенных псевдообратных матриц за приемлемое число операций (см. [21, 22]). Кроме того, по аналогии с [10] можно строить регуляризованные итерационные методы для нахождения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными эрмитовыми весовыми матрицами. Отметим, что задачи вычисления псевдообратных матриц и нормальных псевдорешений относятся к классу некорректных задач (нет непрерывной зависимости решения задачи от изменения исходных данных), поэтому большое количество публикаций посвящено анализу влияния возмущений исходных данных при решении таких задач. Для задач с положительно-определенными весами для этого использовалось взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами, построенное в [23] (см., например, [24–28]). Для получения нормального псевдорешения с заданной точностью систем линейных алгебраических уравнений с симметричной разреженной полуопределенной матрицей в [29] использован метод трехэтапной регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *Journal of the American Statististical Association*. 1964. Vol. 59, N 308. P. 1078–1111.
2. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
3. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. 2009. Т. 49, № 8. С. 1347–1363.
4. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. мат. журн*. 2011. Т. 63, № 1. С. 80–101.
5. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 47, № 1. С. 14–33.
6. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф. Взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 5. С. 56–80.
7. Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 3. С. 65–93.
8. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore–Penroze inverses. *Linear Algebra and its Application*. 1974. Vol. 9. P. 155–167.
9. Rao C.R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applikations. New York: Wiley and Sons, 1971.
10. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. матем. журн*. 2018. Т. 70, № 6. С. 752–772.
11. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2007. Т. 47, № 5. С. 747–766.
12. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через другие псевдообратные матрицы. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 17–25.
13. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and indefinite scalar products. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser, 1983.
14. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Indefinite linear algebra and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 2005. 357 p.
15. Икрамов Х.Д. Теорема о диагонализации одного типа гамильтонианов с точки зрения теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 1989. Т. 29, № 1. С. 3–14.

16. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices. *Z. angew. Math. und Mech*. 1984. Vol. 64, N 9. S. 439–441.
17. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 1992. Т. 32, № 8. С. 1155–1169.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.
20. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение комплексных матриц. *Укр. мат. журн*. 1983. Т. 35, № 1. С. 53–57.
21. Decell H.P. An application of the Cayley–Hamilton theorem to generalized matrix inversion. *SIAM Rev*. 1965. Vol. 7, N 4. P. 526–528.
22. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Москва: Наука,1977. 223 с.
23. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition. *SIAM J. Numer. Anal*. 1976. Vol. 13, N 1. P. 76–83.
24. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. Т. 32, № 3. С. 142–145.
25. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 45, № 6. С. 83–95.
26. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2009. Т 49, № 3. С. 422–430.
27. Wei Y., Wang D. Condition numbers and perturbation of the weighted Moore–Penrose inverse and weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput*. 2003. Vol. 145. P. 45–58.
28. Wei Y. A note on the sensitivity of the solution of the weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput*. 2003. Vol. 145. P. 481–485.
29. Химич А.Н., Попов А.В., Полянко В.В. Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 48, № 6. С. 159–174.

Надійшла до редакції 21.06.2019

Н.А. Варенюк, Н.І. Тукалевська

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ЗВАЖЕНИХ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ З НЕВИРОДЖЕНИМИ ІНДЕФІНІТНИМИ ВАГАМИ

Анотація. Для довільних комплексних матриць отримано необхідні і достатні умови існування і єдиності зважених псевдообернених матриць з невиродженими знаконевизначеними вагами. Отримано вигляд цих матриць в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів ермітизовних матриць.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці зі знаконевизначеними вагами, ермітизовні матриці.

N.A. Vareniuk, N.I. Tukalevska

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH NONSINGULAR INDEFINITE WEIGHTS

Abstract. For arbitrary complex matrices, necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of weighted pseudoinverses with nonsingular indefinite weights are obtained. The representations of these matrices are obtained in terms of the coefficients of characteristic polynomials of the Hermitizable matrices.

Keywords: weighted pseudoinverse matrices with indefinite weights, Hermitizable matrix.

Варенюк Наталия Анатольевна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvareniuk@ukr.net.

Тукалевская Нелля Ивановна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, заведующая отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев.