УДК 517. 95

І.М. АЛЕКСАНДРОВИЧ, О.С. БОНДАР, Н.І. ЛЯШКО, С.І. ЛЯШКО, М.В.-С. СИДОРОВ

ІНТЕГРАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РОЗВ'ЯЗОК ІТЕРОВАНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Анотація. Побудовано інтегральні оператори, що переводять довільні функції в регулярні розв'язки рівняння гіперболічного типу другого і вищих порядків. Розв'язано задачу Коші для рівняння гіперболічного типу четвертого порядку. Використання апарату спеціальних функцій надало змогу одержати зображення розв'язків рівнянь у частинних похідних у зручному для дослідження вигляді. Попутно розв'язано інтегральні рівняння типу згортки зі спеціальними функціями в ядрі.

Ключові слова: інтегральний оператор, ітеровані рівняння гіперболічного типу, регулярні розв'язки, математична індукція.

ВСТУП

Під час дослідження задач, пов'язаних з явищами вібрації та іншими задачами механіки і математичної фізики, широко використовуються диференціальні рівняння, що містять оператори вигляду

$$L_{\nu,k} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k,\ \nu > 0,\ k \ge 0,$$

та їхні ітерації [1–8]. Методами розв'язування таких рівнянь є створення інтегральних та диференціальних операторів, що визначають розв'язок рівнянь та систем гіперболічного та еліптичного типів [9–12].

У цій роботі побудовано інтегральні оператори, які переводять довільні функції у регулярний розв'язок рівняння

$$L^n_{\nu,k}U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k\right)^n U(x,\ y) = 0,\ \ n \in N,$$

так званого ітераційного рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу, а також у регулярний розв'язок рівняння

$$L^n_{\nu,S}U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + S\right)^n U(x,\ y, \tau) = 0,$$

де τ — дійсна змінна, $\tau \in T$, S — лінійний оператор, що залежить тільки від τ. Як приклад застосування побудованих операторів розв'язано задачу Коші та особливу задачу Коші (коли особлива лінія $y = 0$ є в області або на границі).

Насамперед розглянемо диференціальне рівняння

$$L_{\nu,k}U = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U}{\partial y} + kU = 0 \tag{1}$$

у півплощині $y \ge 0$, $-\infty < x < \infty$.

Теорема 1. Нехай $f(t)$ — довільна функція, визначена для $t \in R$ та двічі неперервно диференційовна на довільному скінченному проміжку осі t. Тоді функція

$$U(x, y) = y^{1-2\nu} \int_{x-y}^{x+y} [y^2 - (t-x)^2]^{\nu-1} \, {}_0F_1\left[\nu; -\frac{k}{4}(y^2 - (x-t)^2)\right] f(t) dt =$$

$$= \int_0^1 [f(x+\tau y) + f(x-\tau y)] \, {}_0F_1[\nu; -\frac{k}{4} y^2 (1-\tau^2)](1-\tau^2)^{\nu-1} d\tau, \qquad (2)$$

де ${}_0F_1[\nu; z]$ — частинний випадок узагальненої гіпергеометричної функції, є двічі неперервно диференційовним розв'язком рівняння (1) у верхній півплощині (x, y), задовольняючи умову

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 . \qquad (3)$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що коли $\varphi(x, y)$ є розв'язком рівняння

$$L_{0,k}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k\varphi = 0 , \qquad (4)$$

то функція

$$U(x, y) = 2 \int_0^1 \varphi(x, y\tau)(1-\tau^2)^{\nu-1} d\tau \qquad (5)$$

задовольняє рівняння (1).

Беручи за $\varphi(x, y)$ функцію [10]

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - \sqrt{k}\, y \int_0^y \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2} \frac{J_1(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)})}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau, \quad (6)$$

за допомогою (5) одержимо формулу (2), що й доводить теорему.

Формула обернення інтегрального зображення (2) має вигляд [13]

$$f(x+y) + f(x-y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\Gamma(m-\nu+1)\Gamma(\nu)} \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_0^y \dfrac{d^m [\tau^{2\nu-1} U(x, \tau)]}{(d\tau^2)^m} \times \\ \times (y^2 - \tau^2)^{m-\nu} \, {}_0F_1\left[m-\nu+1; \dfrac{k}{4}(y^2 - \tau^2)\right] \tau d\tau, \\ \qquad\qquad\qquad m = [\nu], \ \nu \neq n, \\ \dfrac{2}{(n-1)!} \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_0^y \dfrac{d^n [\tau^{2\nu-1} U(x, \tau)]}{(d\tau^2)^n} I_0\left(\sqrt{k(y^2 - \tau^2)}\right) \tau d\tau, \ \nu = n. \end{cases} \qquad (7)$$

Застосуємо твердження теореми до розв'язання задач.

Задача 1. Нехай D — права верхня чверть площини $x > 0, \ y > 0$. Знайти двічі неперервно диференційовний розв'язок $U(x, y)$ рівняння (1), неперервний на границі D, для якого справджуються такі крайові умови:

$$U(0, y) = 0 , \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=b(y), \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \tag{10}$$

де $b(y)$ — задана достатнє число разів неперервно диференційовна функція від у для $0\le y<\infty$.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді формули (2). Задовольняючи умови (8), (9), одержимо

$$f(y)+f(-y)=0, \tag{11}$$

$$b(y)=y^{1-2\nu}\int_0^y \frac{(f'(\tau)+f'(-\tau))\ {}_0F_1\left[\nu;-\frac{k}{4}(y^2-\tau^2)\right]}{(y^2-\tau^2)^{1-\nu}}d\tau. \tag{12}$$

З (12) за допомогою (7) отримуємо

$$f'(y)+f'(-y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\Gamma(m-\nu+1)\Gamma(\nu)}\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^y\dfrac{d^m[\tau^{2\nu-1}b(\tau)]}{(d\tau^2)^m}\times\\ \times {}_0F_1\left[m-\nu+1;\dfrac{k}{4}(y^2-\tau^2)\right](y^2-\tau^2)^{m-\nu}\tau d\tau,\ \ m=[\nu],\ \ \nu\ne n,\\ \dfrac{2}{(n-1)!}\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^y\dfrac{d^n[\tau^{2\nu-1}b(\tau)]}{(d\tau^2)^n}I_0\left(\sqrt{k(y^2-\tau^2)}\right)\tau d\tau,\ \nu=n.\end{cases}$$

Звідси, враховуючи (11), одержимо $f(y)$.

Підставивши знайдене значення функції $f(y)$ у праву частину формули (2), одержимо шуканий розв'язок задачі у вигляді

$$U(x,y)=\left[\int_{x-y}^{x+y}\int_0^{\sigma}K(x,y,\tau,\sigma)\frac{d^m[\tau^{2\nu-1}b(\tau)]}{(d\tau^2)^m}d\tau\right]d\sigma, \tag{13}$$

де

$$K(x,y,\tau,\sigma)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(m-\nu+1)}[y^2-(\sigma-x)^2]^{\nu-1}(\sigma^2-\tau^2)^{m-\nu}\tau\ {}_0F_1\left[m-\nu+1;\dfrac{k}{4}(\sigma^2-\tau^2)\right]\times\\ \qquad\times\ {}_0F_1\left[\nu;-\dfrac{k}{4}(y^2-(\sigma-x)^2)\right],\ m=[\nu],\ \nu\ne n,\\ \dfrac{y^{1-2\nu}}{(n-1)!}[y^2-(\sigma-x)^2]^{\nu-1}\mathrm{I}_0(\sqrt{k(\sigma^2-\tau^2)})\tau\ {}_0F_1\left[\nu;-\dfrac{k}{4}(y^2-(\sigma-x)^2)\right],\ m=\nu=n.\end{cases} \tag{13'}$$

Задача 2. Умови такі самі, як і в задачі 1, тільки (8) і (9) замінюємо крайовими умовами

$$U(0,y)=a(y),$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0,$$

де $a(y)$ — задана достатнє число разів неперервно диференційовна функція від y для $0 \le y < \infty$.

Задачу 2 можна звести до задачі 1 шляхом уведення нової невідомої функції

$$V(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}.$$

Для $V(x, y)$ матимемо задачу

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial V}{\partial y} + kV = 0,$$

$$V(0, y) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = a''(y) + \frac{2\nu}{y} a'(y) + ka(y),$$

розв'язком якої згідно з (13) буде

$$V(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \left[\int_0^t K(x, y, \tau, t) \frac{d^m}{(d\tau^2)^m} \left[\tau^{2\nu-1} (a''(\tau) + \frac{2\nu}{\tau} a'(\tau) + ka(\tau)) \right] d\tau \right] dt.$$

Тоді розв'язок задачі 2 можна записати у вигляді

$$U(x, y) =$$

$$= \int_0^x \left[\int_{\xi-y}^{\xi+y} \left(\int_0^t K(\xi, y, \tau, t) \frac{d^m}{(d\tau^2)^m} \left[\tau^{2\nu-1} \left(a''(\tau) + \frac{2\nu}{\tau} a'(\tau) + ka(\tau) \right) \right] d\tau) dt] d\xi + a(y) \right) \right]. \tag{14}$$

ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ЩО ВИЗНАЧАЄ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ($L_{\nu,S}$)

Нехай $y \ge 0$, $-\infty < x < \infty, \tau \in T$. Відповідно до наведеного вище твердження (теорема 1) інтегральне зображення рівняння

$$L_{\nu,S} U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + S \right) U(x, y, \tau) = 0 \tag{$L_{\nu,S}$}$$

шукатимемо у вигляді

$$U(x, y, \tau) = y^{1-2\nu} \int_{x-y}^{x+y} f(t, \tau)\, {}_0F_1 \left[\nu; -\frac{S}{4}(y^2 - (t-x)^2) \right] [y^2 - (t-x)^2]^{\nu-1} dt, \tag{15}$$

де f — довільна функція, двічі неперервно диференційовна на довільному скінченному проміжку осі t. Поклавши у (15) $t = x + y\cos\theta$, тобто $y^2 - (t-x)^2 = y^2 \sin^2\theta$, одержуємо

$$U(x, y, \tau) = \int_0^\pi f(x + y\cos\theta, \tau)\, {}_0F_1 \left[\nu; -\frac{S}{4} y^2 \sin^2\theta \right] \sin^{2\nu-1}\theta d\theta. \tag{16}$$

Подамо (16) у вигляді

$$U(x, y, \tau) = \Gamma(\nu) \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (y\sin\theta)^{2n} \sin^{2\nu-1}\theta}{(2n)!\,\Gamma(\nu+n)} S^n f(x + y\cos\theta, \tau) d\theta. \tag{17}$$

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 2. Для всяких функцій, визначених для $t \in R$ і таких, що ряд у (17) є рівномірно збіжним $\forall t \in R$, $\tau \in \mathrm{T}_0 \subset \mathrm{T}$

$$U(x, y, \tau) = \Gamma(\nu) \int_0^{\pi} \sin^{2\nu-1} \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1^n)(y \sin\theta)^{2n}}{(2n)!\,\Gamma(\nu+n)} S^n f(x + y\cos\theta, \tau) d\theta$$

є розв'язком рівняння $(L_{\nu,S})$ $\forall \tau \in \mathrm{T}_0$, $y \geq 0, x \in R$.

ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ЩО ВИЗНАЧАЄ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ($L_{\nu,k}^n$)

Задача Коші для рівняння $L_{\nu,k}^n U = 0$. В області $0 < x, y < \infty$ знайти $2n$ разів неперервно диференційований розв'язок рівняння $(L_{\nu,k}^n)$, за винятком, можливо, точки $x = y = 0$, і такий, що задовольняє крайові умови

$$\left. \frac{\partial^m U}{\partial x^m} \right|_{x=0} = f_m(y), \quad m = \overline{0, 2n-1},$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \tag{18}$$

В основу розв'язування задачі $(L_{\nu,k}^n)$, (18) покладено таку лему.

Лема 1. Якщо функції $U_r(x, y)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ є $2(r+1)$ разів неперервно диференційовними розв'язками рівняння (1) або, що те саме, рівняння $(L_{\nu,k})$, то функція, визначена рівністю

$$U(x, y) = \sum_{r=0}^{n-1} U_r(x, y) x^r, \tag{19}$$

задовольняє рівняння $(L_{\nu,k}^n)$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1. Покажемо справедливість твердження для $n = 2$, тобто розглянемо

$$L_{\nu,k}^2 U = 0 \tag*{$(L_{\nu,k}^2)$}$$

— рівняння четвертого порядку.

За допомогою безпосередньої перевірки переконуємося в тому, що функція

$$U(x, y) = U_0(x, y) + x U_1(x, y),$$

де $U_r(x, y)$ $(r = 0,1)$, задовольняють рівняння $(L_{\nu,k})$, є розв'язком рівняння $(L_{\nu,k}^2)$:

$$L_{\nu,k}^2 U = L_{\nu,k}(L_{\nu,k} U) =$$

$$= L_{\nu,k}(L_{\nu,k} U_0 + L_{\nu,k}(U_1 x)) = L_{\nu,k}\left(-2\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}(L_{\nu,k} U_1) = 0.$$

2. Нехай лема є справедливою для якогось натурального числа $n-1$, тобто

$$U(x, y) = \sum_{r=0}^{n-2} U_r(x, y) x^r,$$

де $L_{\nu,k}(U_r(x, y)) = 0$, $r = \overline{0, n-2}$, задовольняє рівняння $(L_{\nu,k}^{n-1})$.

3. На основі припущення доведемо справедливість леми і для наступного натурального числа n.

Безпосередньо переконуємося в тому, що функція, визначена рівністю (19), задовольняє рівняння $(L^n_{\nu,k})$:

$$L^n_{\nu,k}U = L_{\nu,k}(L^{n-1}_{\nu,k}U) = L_{\nu,k}\left[L^{n-1}_{\nu,k}\left(\sum_{r=0}^{n-2}U_r x^r + U_{n-1}x^{n-1}\right)\right] = L^n_{\nu,k}(x^{n-1}U_{n-1}),$$

оскільки $L^{n-1}_{\nu,k}\left(\sum_{k=0}^{n-2}U_r x^r\right) = 0$ за припущенням.

Покажемо, що $L^n_{\nu,k}(x^{n-1}U_{n-1}) = 0$. Для спрощення позначимо $U_{n-1} = u$. Тоді $L^n_{\nu,k}(x^{n-1}u) = L^{n-1}_{\nu,k}[L_{\nu,k}(x^{n-1}u)]$.

Окремо розглянемо

$$L_{\nu,k}(x^{n-1}u) = x^{n-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + ku\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^{n-1}u) =$$

$$= x^{n-1}L_{\nu,k}u - (n-1)(n-2)x^{n-3}u - 2(n-1)x^{n-2}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{20}$$

Рівність (19) також доводиться методом математичної індукції. Для $n = 1$ рівність $L_{\nu,k}(U_0) = 0$ є справедливою за умовою леми. Припускаємо справедливість (19) для $r < n$, тобто

$$L^r_{\nu,k}(x^{r-1}u) = 0, \; r < n. \tag{21}$$

Звідси маємо $L^n_{\nu,k}(x^{r-1}u) = 0$, $r < n$. Насправді,

$$L^n_{\nu,k}(x^{r-1}u) = L^{n-r}_{\nu,k}(L^r_{\nu,k}(x^{r-1}u)) = 0.$$

За допомогою рівностей (20) і (21) доводимо справедливість (19) для n:

$$L^n_{\nu,k}(x^{n-1}u) = -L^{n-1}_{\nu,k}(2(n-1)x^{n-2}\frac{\partial u}{\partial x} + (n-1)(n-2)x^{n-3}u) =$$

$$= -2(n-1)L^{n-1}_{\nu,k}\left(x^{n-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - (n-1)(n-2)L^{n-1}_{\nu,k}(x^{n-3}u) = 0.$$

Лему доведено.

За допомогою доведеної леми розв'язування задачі $(L^n_{\nu,k})$, (18) зводиться до відповідних крайових задач для рівняння $(L_{\nu,k})$, розв'язками яких є (13), (14).

Продемонструємо наведений підхід до розв'язування задачі Коші для $n = 2$.

Задача Коші для рівняння $(L^2_{\nu,k})$. В області $0 < x, y < \infty$ знайти чотири рази неперервно диференційовний розв'язок рівняння

$$L^2_{\nu,k}U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y} + k\right)^2 U = 0, \tag{$L^2_{\nu,k}$}$$

що задовольняє крайові умови

$$U|_{x=0} = f_0(x), \; \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = f_1(y),$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = f_2(y), \quad \left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_{x=0} = f_3(y), \tag{22}$$

де $f_i(y)$ $(i=\overline{0,3})$ — задані достатнє число разів неперервно диференційовні функції.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді (19), де $n=2$,

$$U(x, y) = U_0(x, y) + xU_1(x, y).$$

Оскільки U_0 та U_1 задовольняють рівняння (1), то задовольняючи крайові умови (22) для знаходження $U_0(x, y)$ та $U_1(x, y)$, одержимо такі крайові задачі

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U_0}{\partial y} + kU_0 = 0,$$

$$U_0|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad \left.\frac{\partial U_0}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y), \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial U_1}{\partial y} + kU_1 = 0,$$

$$U_1|_{x=0} = \psi_0(y), \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1(y). \tag{24}$$

Тут функції $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$ визначаються із системи рівнянь

$$f_0(y) = \varphi_0(y),$$

$$f_1(y) = \varphi_1(y) + \psi_0(y),$$

$$f_2(y) = \varphi_0''(y) + \frac{2\nu}{y}\varphi_0'(y) + k\varphi_0 + 2\psi_1(y),$$

$$f_3(y) = \varphi_1''(y) + \frac{2\nu}{y}\varphi_1'(y) + k\varphi_1(y) + 3\left(\psi_0''(y) + \frac{2\nu}{y}\psi_0'(y) + k\psi_0(y)\right),$$

розв'язуючи яку [14], одержуємо $\varphi_0(y) = f_0(y)$,

$$\varphi_1(y) =$$

$$= y^{-\nu+\frac{1}{2}} J_{-\nu+\frac{1}{2}}(-\sqrt{k}\,y) \int_0^y \frac{dy_1}{y_1 J^2_{-\nu+\frac{1}{2}}(-\sqrt{k}\,y_1)} \int_0^{y_1} y_2^{\nu+\frac{1}{2}} J_{-\nu+\frac{1}{2}}(-\sqrt{k}\,y_2) F(y_2)\,dy_2\,, \tag{25}$$

де $F(y) = \dfrac{1}{2}\left(3\left(f_1''(y) + \dfrac{2\nu}{y}f_1'(y) + kf_1(y)\right) - f_3(y)\right)$,

$$\psi_0(y) = f_1(y) - \varphi_1(y),$$

$$\psi_1(y) = \frac{1}{2}\left(f_2(y) - f_0''(y) - \frac{2\nu}{y}f_0'(y) - kf_0(y)\right).$$

Розв'язком кожної задачі (23), (24) згідно з розв'язаною задачею 1 та задачею 2 буде

$$U_0(x, y) = \int\limits_{x-y}^{x+y} \left[\int\limits_0^t K(x, y, \tau, t) \frac{d^m (\tau^{2\nu-1} \varphi_1(\tau))}{(d\tau^2)^m} d\tau \right] dt +$$

$$+\int\limits_0^x \left[\int\limits_{\xi-y}^{\xi+y} \left(\int\limits_0^t K(\xi, y, \tau, t) \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} b(\tau)]}{(d\tau^2)^m} d\tau \right) dt \right] d\xi + f_0(y),$$

де $b(y) = f_0''(y) + \frac{2\nu}{y} f_0'(y) + kf_0(y)$,

$$U_1(x, y) = \int\limits_{x-y}^{x+y} \left[\int\limits_0^t K(x, y, \tau, t) \frac{d^m (\tau^{2\nu-1} \psi_1(\tau))}{(d\tau^2)^m} d\tau \right] dt +$$

$$+\int\limits_0^x \left[\int\limits_{\xi-y}^{\xi+y} \left(\int\limits_0^t K(\xi, y, \tau, t) \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} a(\tau)]}{(d\tau^2)^m} d\tau \right) dt \right] d\xi + \psi_0(y),$$

де $a(y) = \psi_0''(y) + \frac{2\nu}{y} \psi_0'(y) + k\psi_0(y)$, $K(x, y, \tau, t)$ визначається за формулою (13′).

Згідно з розв'язком кожної задачі (23),(24) остаточним розв'язком задачі $(L_{\nu,k}^2)$ (22) є

$$U(x, y) = \int\limits_{x-y}^{x+y} \left[\int\limits_0^t \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} (\varphi_1(\tau) + x\psi_1(\tau))]}{(d\tau^2)^m} K(x, y, \tau, t) d\tau \right] dt +$$

$$+\int\limits_0^x \left\{ \int\limits_{\xi-y}^{\xi+y} \left(\int\limits_0^t \frac{d^m [\tau^{2\nu-1} b(\tau) + xa(\tau)]}{(d\tau^2)^m} K(x, y, \tau, t) d\tau \right) dt \right\} d\xi + f_0(y) + x\psi_0(y), \ x, y \ge 0,$$

де $\psi_0, \psi_1, \varphi_1$ визначаються рівностями (25).

Рівняння $L_{\nu,S}^n U(x, y, \tau) = 0$. Нехай $y \ge 0$, $-\infty < x < \infty$, $\tau \in T$. Інтегральне зображення розв'язків рівняння

$$L_{\nu,S}^n U = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{y} \frac{\partial}{\partial y} + S \right)^n U(x, y, \tau) = 0$$

можна побудувати за допомогою такої леми.

Лема 2. Якщо функції $U_r(x, y, \tau)$ $(r = \overline{0, n-1})$ є $2(r+1)$ разів неперервно диференційовними розв'язками рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 2r}{y} \frac{\partial U}{\partial y} + SU = 0,$$

то функція $U(x, y, \tau) = \sum\limits_{r=0}^{n-1} y^{2r} U_r(x, y, \tau)$ задовольняє рівняння $L_{\nu,S}^n U = 0$.

Доведення є аналогічним доведенню леми 1.

Візьмемо $n = 2$. Тоді за лемою 2 і за теоремою 2 для довільних двічі неперервно диференційовних на скінченному проміжку функцій $f(t, \tau)$, $g(t, \tau)$

$$U(x,\ y,\tau)=\int_0^{\pi} f(x+y\cos\theta,\tau)\,{}_0F_1\left[\nu;-\frac{S}{4}y^2\sin^2\theta\right]\sin^{2\nu-1}\theta d\theta+$$

$$+y^2\int_0^{\pi} g(x+y\cos\theta,\tau)\,{}_0F_1\left[\nu+1;-\frac{S}{4}y^2\sin^2\theta\right]\sin^{2\nu+1}\theta d\theta$$

є розв'язком рівняння $L_{\nu,S}^2 U(x,\ y,\tau)=0$.

Особлива задача Коші. Розв'язок особливої задачі Коші для рівняння $L_{\nu,k}^n U=0$ отримаємо за допомогою такої теореми [10].

Теорема 3. Нехай $f_{2m}(x)$ $(m=\overline{0,\ n-1})$ — довільні потрібне число разів неперервно диференційовні для $-\infty<x<\infty$ функції. Тоді функція

$$U(x,\ y)=$$

$$=\frac{1}{C_{0,\nu}}\int_0^{\pi} f_0(x+y\cos\theta)\sin^{2\nu-1}\theta d\theta+\Gamma(\nu)2^{\nu-1}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{k^j}\sum_{m=0}^{n-j-1}k^{\frac{n-m-\nu}{2}}y^{\frac{n-m-\nu}{2}}\otimes\right.$$

$$\left.\otimes\left[\sum_{l=m}^{n-j-1}(-1)^{l+m}C_l^m C_n^{l+j+1}\right]\frac{f_{2j}(x+y\cos\varphi)}{C_{2j,\nu}}\sin^{\nu+n-m-1}\varphi J_{\nu+n-m-2}(\sqrt{k}\,y\sin\varphi)\right\}d\varphi,$$

яка є $2n$ разів неперервно диференційовною в області $y\geq 0$, задовольняє рівняння $L_{\nu,k}^n U=0$ і умови $\left.\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m U\right)\right|_{y=0}=f_{2m}(x),\ m=\overline{0,\ n-1}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m U\right)\right|_{y=0}=0.$$

ВИСНОВКИ

Задача для ітерованого рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу зводиться до відповідних задач для рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Оноцкий В.В., Ляшко Н.И. Оптимальное управление переносом лекарств из систем микроигл. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 3. С. 17–26.
2. Lyashko S.I., Klyushin D.A, Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age — structured contamination sources in ground water. In: *Optimal control of age — structured populations in economy, demography, and the environment*. Boucekkine R., Hritonenko N., Yatsenko Yu. (Eds). London; New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
3. Ляшко С.И., Семенов В.В., Сергиенко Т.И. Управляемость и оптимизация систем псевдогиперболического типа. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. Т. 38, № 4. С. 124–137.
4. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Сергиенко Т.И. Траекторная и финальная управляемость в гиперболических и псевдогиперболических системах с обобщенным воздействием. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. Т. 37, № 5. С. 157–166.
5. Ляшко С.И., Семенов В.В. Об управляемости линейных распределенных систем в классах обобщенных воздействий. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. Т. 37, № 1. С. 18–43.
6. Ляшко И.И., Ляшко С.И., Семенов В.В. Управление псевдогиперболическими системами с помощью сосредоточенных воздействий. *Пробл. упр. и информатики*. 2000. № 5. С. 30–45.
7. Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Палиенко Л.И. Моделирование и обобщенная оптимизация в псевдогиперболических системах. *Пробл. упр. и информатики*. 1997. № 5. С. 78–87.

8. Gladky A.V. Investigation of wave processes in inhomogeneous media with imperfect contact conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 2. P. 247–257.
9. Александрович И.Н., Зражевская В.Ф. Задача Коши и характеристическая задача для одного класса гиперболических уравнений высшего порядка. *Доклады Академии наук Украинской ССР*. 1991. № 4. С. 18–22.
10. Александрович І.М., Сидоров М.В.-С. Ітераційне рівняння типу Ейлера–Пуассона–Дарбу. *Вісник Київського університету*. 1999. № 4. С. 75–81.
11. Александрович І.М., Сидоров М.В.-С. Задача Коші для телеграфного рівняння вищого порядку. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 1999. № 1 (84). С. 16–24.
12. Alexandrovich I.M., Sydorov M.V.-S. Differential operators specifying the solution of an elliptic iterated equation. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 71, N 3. P. 495–504.
13. Ляшко І.І., Сидоров М.В.-С., Александрович І.М. Обернення деяких інтегральних рівнянь. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2004. № 2. С. 25–30.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

Надійшла до редакції 24.06.2019

И.Н. Александрович, Е.С. Бондарь, С.И. Ляшко, Н.И. Ляшко, Н.В.-С. Сидоров

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ РЕШЕНИЕ ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация. Построены интегральные операторы, переводящие произвольные функции в регулярные решения уравнения гиперболического типа второго и высших порядков. Решена задача Коши для уравнения гиперболического типа четвертого порядка. Использование аппарата специальных функций позволило получить представление решений уравнений в частных производных в удобном для исследований виде. Попутно решены интегральные уравнения типа свертки со специальными функциями в ядре.

Ключевые слова: интегральный оператор, итерированные уравнения гиперболического типа, регулярные решения, математическая индукция.

I.M. Alexandrovich, O.S. Bondar, S.I. Lyashko, N.I. Lyashko, M.V.-S. Sydorov

INTEGRAL OPERATORS THAT DETERMINE THE SOLUTION OF AN ITERATED HYPERBOLIC-TYPE EQUATION

Abstract. Integral operators that translate arbitrary functions into regular solutions of the hyperbolic equation of the second and higher orders are constructed. The Cauchy problem for the fourth-order hyperbolic equation is solved. The use of the theory of special functions helped us to obtain the image of solutions of partial derivative equations in a form convenient for the analysis. Along the way, solvable integral equations with special functions in the kernel are solved.

Keywords: integral operator, hyperbolic type iterated equations, regular solutions, mathematical induction.

Александрович Ірина Миколаївна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: ialexandrovich@ukr.net.

Бондар Олена Сергіївна,
аспірантка Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
e-mail: alenkajob@gmail.com.

Ляшко Сергій Іванович,
чл.-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: lyashko.serg@gmail.com.

Ляшко Наталія Іванівна,
кандидат техн. наук, науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: lyashko.natali@gmail.com.

Сидоров Микола Володимир-Станіславович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, email: myksyd@knu.ua.