УДК 519.85

Ю.Г. СТОЯН, С.В. ЯКОВЛЕВ

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Аннотация. Рассмотрен класс задач евклидовой комбинаторной оптимизации как задач дискретной оптимизации на множестве комбинаторных конфигураций, отображенном в арифметическое евклидово пространство. Дан обзор современных методов евклидовой комбинаторной оптимизации. Описаны свойства соответствующих образов комбинаторных множеств. Предложена теория непрерывных функциональных представлений и выпуклых продолжений для решения указанного класса задач. Отмечены области практического приложения и перспективные направления исследований.

Ключевые слова: комбинаторная конфигурация, евклидово комбинаторное множество, евклидовы модели, оптимизация.

Задачи комбинаторной оптимизации представляют интерес для исследователей, поскольку являются моделями различных прикладных задач проектирования, планирования, размещения, управления. В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных моделям и методам решения таких задач и их классификации [1–8]. Одним из практически важных классов задач комбинаторной оптимизации являются задачи евклидовой комбинаторной оптимизации, возникающие в результате отображения комбинаторных множеств в арифметическое евклидово пространство. Эти задачи обладают рядом интересных свойств, позволяющих предложить эффективные методы для их решения. В данной статье приведен обзор существующих подходов к моделированию задач евклидовой комбинаторной оптимизации, методов решения, а также указана область их приложения и описаны перспективы дальнейших исследований в этом направлении.

ЕВКЛИДОВЫ КОМБИНАТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧИ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследование задач комбинаторной оптимизации предполагает, с одной стороны, анализ области допустимых решений, а с другой — изучение свойств функций, заданных на соответствующих комбинаторных множествах. В работах [9–11] выделен класс так называемых евклидовых комбинаторных множеств, элементами которых являются упорядоченные наборы из некоторого множества произвольной природы.

Определение евклидовых комбинаторных множеств тесно связано с понятием комбинаторной конфигурации. Пусть $\boldsymbol{J}_N=\{1,\dots,N\}$. Рассмотрим конечное абстрактное строго упорядоченное множество $\Xi=\{\Xi_1,\dots,\Xi_m\}$. В соответствии с [12] под комбинаторной конфигурацией $\langle v,\Xi,\Lambda\rangle$ понимается отображение $v:\boldsymbol{J}_N\to\Xi$, удовлетворяющее заданному набору ограничений Λ. Множество $\boldsymbol{J}_N$ называют нумерующим, а множество Ξ — образующим (в некоторых источниках — результирующим). Заметим, что требования конечности и строгой упорядоченности образующего множества обусловливаются, прежде всего, задачами, возникающими при перечислении и построении различных комбинаторных конфигураций [13]. При предположении, что множество Ξ не более чем счетно, в работе [7] было введено понятие комбинаторного объекта, что позволило значительно расширить класс решаемых задач, и предложена схема построения комбинаторных объектов более высокого порядка итерационным включением во множество Ξ новых формируемых объектов.

Таким образом, евклидово комбинаторное множество Р можно рассматривать как совокупность комбинаторных конфигураций (объектов), представляющих собой упорядоченные наборы элементов образующего множества Ξ, т.е. $\pi = \langle \pi_1, \ldots, \pi_N \rangle$, где $\pi_i \in \Xi$, $i \in \boldsymbol{J}_N$. Учет основных свойств отображения $\upsilon : \boldsymbol{J}_N \to \Xi$ (биективность, инъективность, сюръективность), а также дополнительных требований, формирующих систему ограничений Λ, позволяет формировать различные классы евклидовых комбинаторных множеств: перестановок (без повторений и с повторениями), циклических перестановок, четных перестановок, перестановок со знаком, размещений (без повторений, с повторениями и с бесконечными повторениями), перестановочных матриц, булевых множеств, их специальных подмножеств и т.д.

Выделение евклидовых комбинаторных множеств в специальный класс обосновывается специфическими свойствами, связанными с возможностью их биективного отображения φ на некоторое точечное подмножество E арифметического евклидова пространства определенной размерности, т.е.

$$\varphi : \mathrm{P} \to E \subset R^n. \tag{1}$$

При этом любой комбинаторной конфигурации $\pi \in \mathrm{P}$ будет соответствовать точка $x \in E$ такая, что $x = \varphi(\pi)$, $\pi = \varphi^{-1}(x)$.

Для того чтобы подчеркнуть, что точки множества $E = \varphi(\mathrm{P})$ являются образами комбинаторных конфигураций $\pi \in \mathrm{P}$ при отображении (1), в [14] введено понятие евклидовой комбинаторной конфигурации, которая представляется кортежем $\langle \varphi, \upsilon, \Xi, \Lambda \rangle$ и задает образ комбинаторной конфигурации $\langle \upsilon, \Xi, \Lambda \rangle$ в R^n. Назовем $E = \varphi(\mathrm{P})$ множеством евклидовых комбинаторных конфигураций. Приведенные рассуждения обобщаются на комбинаторные объекты, что позволяет аналогично определить понятие евклидова комбинаторного объекта и множества евклидовых комбинаторных объектов.

Вопрос задания отображения $\varphi : \mathrm{P} \to E$ важен как с теоретической, так и с практической точек зрения, поскольку непосредственно связан с адекватностью моделей задач на множествах Р и E. Так как множество Р в общем случае не более чем счетно, отображение (1) существует для любого $n \geq 1$. Особое значение имеет задание отображения φ, при котором множество $E = \varphi(\mathrm{P})$ имеет специальную структуру. Для конечных точечных множеств $E \subset R^n$, это, прежде всего, связано со свойствами выпуклых оболочек (многогранников) $\Pi = \operatorname{conv} E$. В то же время всякому элементу $\Xi_j \in \Xi$ конечного образующего множества Ξ можно поставить в соответствие упорядоченный набор действительных чисел $\boldsymbol{a}^j = (a_1^j, \ldots, a_{k_j}^j) \in R^{k_j}$, положив $\boldsymbol{a}^j = \mu_j(\Xi_j)$, $j \in \boldsymbol{J}_m$.

Зададим биективное отображение $\varphi : \mathrm{P} \to E$, поставив каждому элементу $\pi \in \mathrm{P}$ вида $\pi = \left\langle \pi_1, \ldots, \pi_N \right\rangle = \left\langle \Xi_{j_1}, \ldots, \Xi_{j_N} \right\rangle$, $j_i \in \boldsymbol{J}_m$, $i \in \boldsymbol{J}_N$, в соответствие точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ по следующему правилу. Пусть $K = \max\limits_{j \in \boldsymbol{J}_m} k_j$. Положим

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\boldsymbol{g}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}^{i_N}),$$

где $\boldsymbol{g}^j = (\boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{0}) = (a_1^j, \ldots, a_{k_j}^j, 0, \ldots, 0) \in R^K$, $j \in \boldsymbol{J}_m$, $n = NK$. Если $k_j = K$ для некоторых $j \in \boldsymbol{J}_m$, то $\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{a}^j$. Заметим, что добавление нулевых координат для векторов $\boldsymbol{a}^j$, $j \in \boldsymbol{J}_m$, обеспечивает биективность предложенного отображения в случае их различных размерностей.

При $K = 1$ имеем $n = N$, $x = (x_1, \ldots, x_n) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$, где $a_j = \mu_j(\Xi_j)$, $j \in \boldsymbol{J}_m$, — действительные числа. Если при этом элементами образующего множества Ξ также являются действительные числа, то полагаем $\mu_j(\Xi_j) = \Xi_j$, т.е. $a_j = \Xi_j$, $j \in \boldsymbol{J}_m$. Описанный подход к формализации отображения (1) назовем погружением евклидова комбинаторного множества Р в R^n.

Комплексному исследованию множеств евклидовых комбинаторных конфигураций посвящена монография [14]. Полученные в ней результаты базируются на работах [9–11, 15–19], в которых описаны свойства различных классов комбинаторных множеств при их погружении в R^n. При этом в качестве образующего, как правило, рассматривалось конечное множество действительных чисел.

Более сложные евклидовы комбинаторные конфигурации, представляющие композиционные образы исходных множеств, описаны в [20–22].

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что рассматривается образ соответствующего комбинаторного множества, будем добавлять определение «евклидово».

Особое значение при исследовании различных классов множеств евклидовых комбинаторных конфигураций имеет изучение свойств комбинаторных многогранников как выпуклых оболочек точечных множеств $E = \varphi(\mathrm{P}) \subset R^n$. Аналитическим способам описания многогранников для евклидовых множеств перестановок и размещений, определению их размерности, установлению критериев вершин, граней, смежности вершин и граней, минимальным несводимым представлениям посвящены работы [11, 14–19, 23, 24]. Отметим также статьи [25, 26], в которых рассматриваются общие принципы использования полиэдрального подхода в задачах комбинаторной оптимизации.

Сформулируем задачу оптимизации на евклидовом комбинаторном множестве Р в следующей постановке. Пусть задан функционал $F\colon \mathrm{P} \to R^1$. Требуется найти

$$\pi^* = \arg\min_{\pi \in \mathrm{P}'} F(\pi), \tag{2}$$

где $\mathrm{P}' \subseteq \mathrm{P}$ — множество допустимых решений.

Предположим, что $\varphi\colon \mathrm{P} \to E$ — биективное отображение такое, что для некоторой функции $f\colon E \to R^1$ для всех $x \in E$ выполняется условие

$$f(x) = F(\varphi^{-1}(x)). \tag{3}$$

Тогда задачу (2) можно сформулировать в следующем виде: найти

$$x^* = \arg\min_{x \in E' \subseteq E} f(x), \tag{4}$$

где $E' = \varphi(\mathrm{P}')$ — образ множества P' в R^n.

Задачу (4) назовем задачей евклидовой комбинаторной оптимизации, а модель, построенную в результате задания биективного отображения $\varphi\colon \mathrm{P} \to E$ и формирования функции $f\colon E \to R^1$, удовлетворяющей условию (3), назовем евклидовой комбинаторной моделью.

Построение евклидовых комбинаторных моделей имеет творческий характер и зависит от рассматриваемого класса задач комбинаторной оптимизации. Начало комплексным исследованиям задач евклидовой комбинаторной оптимизации положено в монографии [11], где впервые рассматривались модели комбинаторных задач в арифметическом евклидовом пространстве, а также были предложены подходы к построению биективного отображения $\varphi : \mathrm{P} \to E$ и формализации целевых функций для некоторых оптимизационных задач геометрического проектирования.

Задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в соответствии с классификацией, приведенной в [6], можно рассматривать как специальный класс задач дискретной оптимизации. Для формализации этого класса необходимо решить две взаимосвязанные задачи: задать биективное отображение $\varphi : \mathrm{P} \to E \subset R^n$ и найти согласованное с ним аналитическое выражение для функции $f : E \to R^1$, удовлетворяющее условию (3).

Сформулируем задачу (4) в следующей постановке:

$$f(x) \to \min,\ x \in X, \tag{5}$$

где множество X задается системой ограничений

$$x \in E, \tag{6}$$

$$g_i(x) \le 0,\ i \in \boldsymbol{J}_k, \tag{7}$$

$$g_i(x) = 0,\ i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k, \tag{8}$$

а функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_m$, определены на множестве E либо на его некотором надмножестве $\widetilde{E} \supseteq E$.

Ограничения (6) назовем прямыми, а (7), (8) — функциональными. Выбор функциональных ограничений зависит от свойств множества E. Свойства задачи (5)–(8) определяются способом описания множества X, а также свойствами функций $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_m$, на E. В частном случае можно положить, что прямые ограничения (6) отсутствуют. При этом возникает задача функционально-аналитического представления конечного множества $E \subset R^n$, т.е. его описания в виде системы уравнений и неравенств с помощью непрерывных функций, аналитический вид которых известен. Полученные в этом направлении результаты послужили основой теории непрерывных функциональных представлений для образов евклидовых комбинаторных множеств, положения которой нашли отражение в работах [27–34]. Особое внимание в них уделено классификации функциональных представлений, а также функционально-аналитическому представлению так называемых вершинно-расположенных множеств [35, 36].

Конечное множество $E \subset R^n$ назовем вершинно-расположенным, если оно совпадает с множеством вершин своей выпуклой оболочки, т.е. $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$. Таким образом, вершинно-расположенное множество можно задать как множество вершин выпуклого многогранника $\Pi = \operatorname{conv} E$. Именно в таком представлении оно впервые введено в работе [35].

Заметим, что точки вершинно-расположенного множества $E \subset R^n$, и только они, удовлетворяют условию $E = \Pi \bigcap \Sigma$, где $\Pi = \operatorname{conv} E$, а Σ — ограниченная строго выпуклая поверхность пространства R^n. Это свойство непосредственно следует из существования для любого выпуклого многогранника ограниченной строго выпуклой поверхности, содержащей его вершины [37]. Таким образом, любое вершинно-расположенное множество $E \subset R^n$ представимо в виде пересечения многогранника и строго выпуклой поверхности. Чтобы подчеркнуть этот факт, в некоторых работах, например [29–31], используется эквивалентное понятие полиэдрально-поверхностного множества.

Широким классом вершинно-расположенных множеств являются полиэдрально-сферические множества $E \subset R^n$, допускающие представление в виде пересечения многогранника $\Pi = \mathrm{conv} E$ и описанной гиперсферы $S = S(\tau, r)$: $||x-\tau|| = r$, параметрами которой является радиус $r > 0$ и координаты центра $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Начало систематическим исследованиям полиэдрально-сферических множеств было положено в статьях [38, 39] и нашло продолжение в работах [40–45].

Наиболее исследованный класс полиэдрально-сферических множеств — евклидовы множества перестановок [11, 14–18]. Другими примерами полиэдрально-сферических множеств являются евклидовы множества циклических перестановок, четных перестановок, перестановок со знаком, а также множества более сложной структуры [14, 21, 46–49].

Класс вершинно-расположенных и полиэдрально-сферических множеств обладает тем свойством, что операции прямого произведения не выводят их из него. В связи с этим перспективным представляется направление, связанное с генерацией комбинаторных множеств, сохраняющих свои свойства [50].

ТЕОРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ НА ВЕРШИННО-РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Вершинная расположенность большинства евклидовых комбинаторных множеств позволяет применить к решению задач евклидовой комбинаторной оптимизации теорию выпуклых продолжений, основы которой заложены в работах [35, 36, 51–53]. Основные положения данной теории базируются на следующих свойствах функций, заданных на вершинно-расположенных множествах.

Пусть множество $E \subset R^n$ конечно и $E = \mathrm{vert}\,\mathrm{conv} E$. Тогда для любой функции $f: E \to R^1$ существует такая выпуклая функция $\widetilde{f}: \mathrm{conv} E \to R^1$, что $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для любых $x \in E$. Для функций $\widetilde{f}(x)$, удовлетворяющих такому условию на множестве E, будем использовать обозначение $\widetilde{f}(x) \underset{E}{=} f(x)$. Назовем $\widetilde{f}(x)$ продолжением функции $f(x)$ на X. Если функция $\widetilde{f}(x)$ выпуклая на выпуклом множестве $X \supseteq \mathrm{conv} E$, то назовем ее выпуклым продолжением $f(x)$ на X. Если выпуклая функция $\widetilde{f}(x)$ дифференцируема на X, то будем говорить о дифференцируемом выпуклом (строго, сильно выпуклом) продолжении $f(x)$ на X.

Для класса полиэдрально-сферических множеств можно применить следующий подход к построению сильно выпуклого продолжения. Пусть $\widetilde{f}(x)$ — выпуклое продолжение на выпуклое множество $X \supseteq \mathrm{conv} E$ функции $f(x)$, заданной на полиэдрально-сферическом множестве E. Тогда сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $f(x)$ на X представимо в виде

$$\varphi(x) = \widetilde{f}(x) + \rho(||x-\tau||^2 - r^2),$$

где (τ, r) — параметры полиэдрально-сферического представления множества E.

Усилением приведенных выше результатов является доказанная в [35] теорема о существовании дифференцируемого сильно выпуклого продолжения $\widetilde{f}: \mathrm{conv} E \to R^1$ для любой функции $f: E \to R^1$.

Особо отметим построение выпуклых продолжений для класса квадратичных функций. Пусть $E \subset R^n$ — полиэдрально-сферическое множество с параметрами (τ, r). Тогда выпуклым продолжением квадратичной функции $f(x) = (Cx, x) + (b, x)$ на пространство R^n будет функция

$$\widetilde{f}(x) = (\widetilde{C}x, x) + (\widetilde{b}, x) + \widetilde{d},$$

где $C=[c_{ij}]_{n\times n}$ — произвольная симметричная $n\times n$-матрица, b — n-мерный вектор, $\widetilde{C}=C+\beta I$, $\beta=\sum_{i:c_{ii}<0}|c_{ii}|+\sum_{i<j}|c_{ij}|$, $\widetilde{b}=b-2\beta\tau$, $\widetilde{d}=\beta(\tau^2-r^2)$, I — единичная матрица.

Приведенные результаты постулируют существование выпуклых, сильно выпуклых и дифференцируемых продолжений для произвольных функций, заданных на вершинно-расположенных множествах. При этом основной интерес представляют способы построения таких продолжений. Рассмотрение того или иного класса вершинно-расположенных множеств позволяет конкретизировать, а в некоторых случаях и обобщить приведенные результаты.

Конструктивный подход к построению выпуклого продолжения для полиномиальных функций, заданных на евклидовом множестве перестановок, впервые описан в [35]. В работах [54, 55] предложены модификации такого подхода, позволяющие в некоторых случаях упростить вычислительные процедуры и уменьшить количество необходимых операций при его реализации. В статье [40] приведен аналитический вид гладкого выпуклого продолжения для мономов, заданных на множестве перестановок. Этот результат позволил утверждать о существовании гладких выпуклых продолжений для любых функций, заданных на вершинах перестановочного многогранника. Более того, в большинстве случаев полученные выпуклые продолжения с сохранением выражения можно расширить на выпуклые надмножества $X\supset E$ вершинно-расположенных множеств, в частности на $X=R_+^n$. Отметим также работы [44, 45], в которых предлагается подход к построению выпуклого дважды дифференцируемого продолжения $\widetilde{f}(x)$ на выпуклое надмножество $X\supseteq \operatorname{conv} S$ для функции $f(x)\in C^2(R^n)$, заданной на гиперсфере $S=S(\tau,r): ||x-\tau||=r$. Однако использование такого подхода ограничивается сложностью определения параметра M в представлении $\widetilde{f}(x)=f(x)+$ $+M(||x-\tau||^2-r^2)$.

Среди применений теории выпуклого продолжения для других классов евклидовых комбинаторных множеств отметим работы [16, 31, 56–58].

МЕТОДЫ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Одним из основных результатов теории выпуклых продолжений является подход к эквивалентной постановке задачи оптимизации на вершинно-расположенных множествах, предложенный в [35] и формализованный в дальнейшем в [36, 40]. Рассмотрим задачу оптимизации (5)–(8) в предположении, что E — вершинно-расположенное множество. Представим равенства (8) в виде неравенств и построим выпуклые продолжения исходных функций на выпуклое множество $X\supseteq \operatorname{conv} E$:

$$\widetilde{f}(x)\underset{E}{=}f(x), \tag{9}$$

$$\widetilde{g}_i(x)\underset{E}{=}g_i(x),\ i\in \boldsymbol{J}_m, \tag{10}$$

$$\widetilde{g}_i(x)\underset{E}{=}-g_{i-l}(x),\ i\in \boldsymbol{J}_r\setminus \boldsymbol{J}_m, \tag{11}$$

где $r=2m-k$.

С учетом (9)–(11) формируем оптимизационную задачу

$$\widetilde{f}(x)\to \min,\ x\in \widetilde{X}, \tag{12}$$

где множество $\widetilde{X}$ задается системой ограничений

$$x \in E = \operatorname{vert} \operatorname{conv} E, \tag{13}$$

$$\tilde{g}_i(x) \le 0, \ i \in \boldsymbol{J}_r, \tag{14}$$

а функции $\tilde{f}(x), \tilde{g}_i(x), \ i \in \boldsymbol{J}_r$, выпуклы на X.

Эквивалентность на вершинно-расположенных множествах E исходных функций и их выпуклых продолжений позволяет сформулировать следующую задачу оптимизации на вершинно-расположенных множествах, эквивалентную задаче (5)–(8).

Пусть множество $E \subset R^n$ конечно и $E = \operatorname{vert} \operatorname{conv} E$. Сформируем множества

$$G = \{x \in E : g_i(x) \le 0, \ i \in \boldsymbol{J}_k, \ g_i(x) = 0, \ i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k\},$$
$$\tilde{G} = \{x \in E : \tilde{g}_i(x) \le 0, \ i \in \boldsymbol{J}_r\}.$$

Тогда

$$\arg\min_{x \in G} f(x) = \arg\min_{x \in \tilde{G}} \tilde{f}(x). \tag{15}$$

В равенстве (15) можно использовать дифференцируемые и сильно выпуклые продолжения функций $\tilde{f}(x), \ \tilde{g}_i(x), \ i \in \boldsymbol{J}_r$, на множество $\Pi = \operatorname{conv} E$, а также на его выпуклые надмножества. Часто построенное выпуклое продолжение на Π с сохранением аналитического вида функции может быть расширено на некоторое выпуклое множество $X \supset \Pi$ и даже на все пространство R^n.

Широкий класс методов решения задач дискретной оптимизации базируется на различных подходах к декомпозиции исходной задачи с применением теории выпуклого программирования при решении вспомогательных задач в различных схемах глобальной оптимизации на вершинно-расположенных множествах.

Пусть $E \subset R^n$ — вершинно-расположенное множество. Очевидно, что любое подмножество $E' \subset E$ также является вершинно-расположенным. Рассмотрим семейство $\{L_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$ многообразий пространства R^n таких, что

$$E = \bigcup_{i \in \boldsymbol{J}_k} E_i, \ E_i = E \cap L_i \ne \varnothing, \ E_i \cap E_j = \varnothing \ \ \forall i, j \in \boldsymbol{J}_m, \ i \ne j. \tag{16}$$

Таким образом, представление (16) задает декомпозицию вершинно-расположенного множества на вершинно-расположенные множества $\{E_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$ меньшей мощности. Очевидно, что при этом возникает вопрос выбора как самих многообразий $\{L_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$, так и их количества. Наиболее распространенным является разложение $E \subset R^n$ по множествам, принадлежащим линейным многообразиям. Прежде всего, это обусловлено достаточно простым способом определения структуры вершинно-расположенных множеств $\{E_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$. Различные способы разложения образов евклидовых комбинаторных множеств по гиперплоскостям описаны в [11, 14–17]. Общая схема разложения полиэдрально-сферических множеств по семейству гиперсфер предложена в [38, 39, 59]. Заметим, что всякое точечное множество $E \subset R^n$ представимо как объединение вершинно-расположенных множеств. Возможности приложения таких разложений при локализации решений в задачах целочисленного программирования описаны в [59].

Декомпозиционные методы оптимизации тесно связаны с решением релаксационных задач для оценки минимумов функции $f(x)$ на формируемых подмножествах и использованием различных схем ветвления типа методов ветвей и границ [60] и последовательного анализа вариантов [61]. Применение метода ветвей и границ при решении некоторых задач евклидовой комбинаторной оптимизации описано в работах [62–64].

Осуществим релаксацию задачи (12)–(14). Для класса вершинно-расположенных множеств применим три подхода к релаксации, ослабив условие (13): полагая $x \in \mathrm{conv}\, E$ (полиэдральная релаксация), $x \in \Sigma$ (поверхностная релаксация) либо $x \in \mathrm{conv}\, \Sigma$ (выпуклая поверхностная релаксация). Во всех случаях для произвольной функции $f(x)$ и произвольных функциональных ограничений решение непрерывных релаксационных задач существенно не упрощается.

При полиэдральной и выпуклой поверхностной релаксации воспользуемся описанным выше подходом к построению эквивалентной задачи оптимизации на вершинно-расположенных множествах.

Сформируем оптимизационную задачу

$$\widetilde{f}(x) \to \min, \ x \in \widetilde{G}, \tag{17}$$

где $\widetilde{G} = \{x \in X : \widetilde{g}_i(x) \le 0, i \in \boldsymbol{J}_r\}$, а функции $\widetilde{f}(x)$, $\widetilde{g}_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_r$, выпуклы на выпуклом множестве $X \supset E$.

Задача (17) выпуклая, и ее решение является нижней оценкой минимума функции $f(x)$ на E.

В случае полиэдральной релаксации положим $X = \mathrm{conv} E$. При этом эффективность методов решения задачи (17) существенно зависит от структуры комбинаторного многогранника. Для некоторых евклидовых комбинаторных множеств многогранник задается полиномиальным от размерности задачи числом ограничений. В то же время перестановочный многогранник описывается количеством ограничений порядка 2^n [17]. Обойти связанные с этим затруднения позволяет подход, основная идея которого описана в работах [56, 65]. В основу положены свойства задачи оптимизации линейной функции на перестановочном многограннике П, решение которой сводится к упорядочению коэффициентов целевой функции. Кроме того, в [39, 51, 52] рассмотрены специальные классы задач квадратичной оптимизации на П, сводимые к линейным задачам. Это дало возможность эффективно использовать метод условного градиента Франка–Вулфа и метод проекции градиента для оптимизации на П дифференцируемых выпуклых функций. В общем случае для решения задачи (17) в работах [66, 67] предлагается применить метод условного градиента совместно с методом штрафных функций. Однако при этом замедляется скорость сходимости такого подхода.

Возможность описать вершинно-расположенное множество E (а значит, и соответствующий комбинаторный многогранник $\Pi = \mathrm{conv} E$) ограниченной строго выпуклой поверхностью Σ позволяет использовать для нижней оценки минимума $f(x)$ на E решение задачи оптимизации (17) при $X = \mathrm{conv}\, \Sigma$. Очевидно, что такая оценка будет слабее, чем при $X = \mathrm{conv} E$, однако структура ограничений задачи (17) намного проще, что позволяет применять более эффективные методы выпуклой оптимизации.

При поверхностной релаксации возникает задача оптимизации выпуклой функции на ограниченной строго выпуклой поверхности. В общем случае эта задача является многоэкстремальной. На сегодняшний день эффективные методы ее решения отсутствуют. В то же время для класса квадратичных функций на полиэдрально-сферических множествах в работах [38, 39] предложен подход, основанный на возможности точного решения задачи оптимизации квадратичной функции на гиперсфере. Известно, что такая задача сводится к нахождению собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному значению матрицы квадратичной формы. Указанный подход реализован для квадратичной оптимизации на полиэдрально-сферическом множестве перестановок без дополнительных ограничений. Для декомпозиции задачи использовалось разложение вершинно-расположенного множества как по гиперплоскостям, так и по граням и ребрам перестановочного многогранника.

Заметим, что в задачах квадратичной оптимизации на сферических множествах при наличии дополнительных линейных либо квадратичных ограничений можно воспользоваться оценками из работ [68, 69].

Предложенные выше подходы к получению нижней оценки минимума произвольной функции, заданной на вершинно-расположенном множестве, позволяют, как правило, найти и значение аргумента, соответствующего этой оценке. В таком случае рассмотренную теорию выпуклых продолжений можно использовать для усиления указанных оценок. Этому вопросу посвящены работы [35, 36, 51–53], основные результаты которых базируются на экстремальных свойствах выпуклых функций.

Приведем следующие результаты, полученные применительно к вершинно-расположенным множествам с учетом свойств выпуклых продолжений функций.

Пусть $E = \mathrm{vert}\,\Pi$, где $\Pi = \mathrm{conv}\,E$, а функция $\widetilde{f}: X \to R^1$ — выпуклое продолжение функции $f: E \to R^1$ на выпуклое множество $X \supseteq \Pi$. Тогда для любого $\widetilde{x} \in X$ имеем

$$\min_{x \in E} f(x) \geq f(\widetilde{x}) - (\widetilde{f}'(\widetilde{x}), \widetilde{x}) + \min_{x \in \Pi} (\widetilde{f}'(\widetilde{x}), x). \tag{18}$$

Для того чтобы $x^* \in E$ была точкой минимума функции $f(x)$ на множестве E, достаточно, чтобы для некоторого ее выпуклого продолжения $\widetilde{f}(x)$ на Π имело место равенство

$$\min_{x \in \Pi} (\widetilde{f}'(x^*), x - x^*) = 0.$$

Точку $\widetilde{x}$ можно выбрать как решение задачи выпуклого программирования

$$\widetilde{x} = \arg\min_{x \in \Pi} \widetilde{f}(x). \tag{19}$$

Для класса квадратичных функций $f(x)$, если решение задачи (19) является внутренней точкой многогранника Π, положим

$$\widetilde{x} = \arg \min_{x \in S \supset E} \widetilde{f}(x).$$

Пусть функция $\widetilde{f}(x)$ — сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $f(x)$ на Π. Тогда

$$\min_{x \in E} f(x) \geq \widetilde{f}(x^*) + \rho \min_{x \in E} || x - x^* ||^2, \tag{20}$$

где x^* — решение задачи (19).

Кроме того, для любого $\widetilde{x} \in \Pi$ имеем

$$\min_{x \in E} f(x) \geq \widetilde{f}(\widetilde{x}) - \frac{1}{4\rho} || \widetilde{f}'(\widetilde{x}) ||^2 + \rho \min_{x \in E} \left\| x - \widetilde{x} + \frac{1}{2\rho} \widetilde{f}'(\widetilde{x}) \right\|^2. \tag{21}$$

Конкретизация приведенных результатов для получения нижней оценки минимума функции $f(x)$ на E зависит от класса рассматриваемых вершинно-расположенных множеств. Прежде всего, это обусловлено возможностью решения задач минимизации в правых частях неравенств (18), (20), (21). Так, для задач оптимизации на евклидовом множестве перестановок указанные задачи полиномиально разрешимы, что позволило получить нижние оценки, непосредственно используя явный вид этих решений [35, 36, 52, 70]. При дополнительных линейных ограничениях можно применить метод, предложенный в [71].

В последнее время интенсивно развивается направление, связанное с использованием генетических алгоритмов при решении задач комбинаторной оптимизации [72, 73]. В работах [74, 75] предложен один из подходов к реализации генетических алгоритмов решения оптимизационных задач на евклидовом множестве перестановок, описаны способы построения соответствующих операторов кроссовера и мутации. Тестирование на различных известных задачах, а также опыт применения при решении реальных задач подтвердили эффективность разработанных генетических алгоритмов [76].

Другим актуальным направлением исследований в теории евклидовой комбинаторной оптимизации являются методы отсечений для линейных (либо сводящихся к линейным) задач. Общая методология методов описана в работах [77–80] и заключается в релаксации исходной задачи с последующим использованием симплекс-метода для решения задачи линейного программирования на комбинаторном многограннике, т.е. выпуклой оболочке соответствующего комбинаторного множества. Если найденное решение будет недопустимым, то формируется дополнительное линейное ограничение, отсекающее полученную точку. Построение ограничений для отсечения базируются на свойствах комбинаторных многогранников, в частности критериях вершин, ребер и т.д.

Представляет интерес графо-аналитический подход к решению задач евклидовой комбинаторной оптимизации. Заметим, что можно установить взаимосвязь между задачами на евклидовых комбинаторных множествах и графами соответствующих комбинаторных многогранников [17–19]. Использование структурных свойств допустимой области позволяет предложить оригинальные методы решения комбинаторных задач с применением свойств графов комбинаторных многогранников и самих комбинаторных множеств. В работах [18, 81, 82] на основе графовых моделей описан подход к решению экстремальных задач комбинаторной оптимизации, основанный на их направленном структурировании в сочетании с методом последовательного анализа вариантов [61]. Предложены методы генерирования последовательности элементов комбинаторных конфигураций транспозицией его элементов. Осуществляется перемещение максимального элемента множества, формирующего соответствующую конфигурацию. Исследованы задачи евклидовой комбинаторной оптимизации с линейной и дробно-линейной целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методы евклидовой комбинаторной оптимизации предполагают аналитическое задание целевой функции, допускающее непрерывное ее продолжение на комбинаторный многогранник с сохранением исходного выражения. Перспективными представляются исследования, связанные с описанием комбинаторных многогранников для новых евклидовых комбинаторных конфигураций $\langle \varphi, \upsilon, \Xi, \Lambda \rangle$, особенно для многомерных образующих множеств. При этом возникает необходимость построения таких отображений $\varphi : \mathrm{P} \to E$, которые позволяют формировать соответствующие вершинно-расположенные множества E. Естественным развитием этого направления является построение выпуклых продолжений для различных классов функций, заданных на сформированных множествах.

Принципиальным для возможности приложения теории выпуклых продолжений является вопрос о построении эквивалентной евклидовой модели для задачи комбинаторной оптимизации. Это требует не только задания отображения $\varphi : \mathrm{P} \to E$ евклидова комбинаторного множества Р на конечное точечное множество $E \subset R^n$ заданной структуры (например, вершинно-расположенное либо полиэдрально-сферическое), а и выбора согласованного с исходной задачей аналитического вида функции $f(x)$. Поэтому перспективным представляется построение новых евклидовых моделей для различных классов задач комбинаторной оптимизации. Это, в свою очередь, предполагает исследование прикладных задач в целях формирования образующего множества Ξ евклидовых комбинаторных конфигураций $\langle \varphi, \upsilon, \Xi, \Lambda \rangle$, формализации набора ограничений Λ и определения аналитического вида целевой функции.

Импульсом к изучению задач евклидовой комбинаторной оптимизации послужило исследование моделей и методов геометрического проектирования [11], связанных с преобразованием геометрической информации о материальных объектах. Геометрическая информация о совокупности объектов $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ включает описание их формы, метрических параметров, задающих размеры объектов, а также параметры размещения, определяющие положение объектов в пространстве. В работах [83, 84] сформировано конфигурационное пространство $\Xi(S)$, обобщенными переменными которого являются метрические параметры и параметры размещения геометрических объектов. Отображение $\chi : S \to \Xi(S)$, удовлетворяющее заданной системе ограничений Λ, задает различные пространственные конфигурации геометрических объектов — размещения, компоновки, покрытия, разбиения, современному исследованию которых посвящены работы [85–91].

Можно выделить комбинаторную структуру таких задач, связанную с выбором последовательности размещения объектов. Однако пространственные конфигурации геометрических объектов неразрывно связаны с комбинаторными конфигурациями, а числовые значения обобщенных переменных обусловливают возможность построения математических моделей задач геометрического проектирования как задач оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях. При этом порождаются различные классы пространственных конфигураций, в которых обобщенные переменные (или некоторые из них) могут принимать дискретные значения. В результате имеем оптимизационные задачи назначения с различными целевыми функциями. В качестве практического приложения результатов отметим задачи компоновочного синтеза сложных систем, в которых требуется минимизировать объем контейнера, суммарную длину соединений, обеспечивать минимальный небаланс [92–96].

Отметим также подход [97, 98], связанный с искусственным расширением размерности пространства обобщенных переменных с одновременным формированием жесткой системы ограничений на них. При этом выделяется комбинаторная структура задач размещения геометрических объектов, в результате чего задается полиэдрально-сферическое представление множества их метрических параметров.

Важным направлением в евклидовой комбинаторной оптимизации являются исследования, связанные с различными видами неопределенностей. К их числу относятся, прежде всего, интервальные задания параметров задачи, а также многие критерии оценки качества решений. Разработке интервальных моделей комбинаторной оптимизации посвящены, в частности, работы [99–104]. Нечеткие задачи геометрического проектирования и свойства отношений толерантности при обработке данных рассмотрены в [96, 105–111].

Для решения многокритериальных задач евклидовой комбинаторной оптимизации применимы общие теоретические подходы. В связи с этим отметим работы [112–115], в которых с использованием структурных свойств множеств решений указанных задач получены необходимые и достаточные условия их существования, оптимальности и устойчивости. Это дало основу для разработки эффективных методов нахождения разных видов оптимальных решений многокритериальных задач комбинаторной оптимизации. В частности, монография [112] посвящена разработке и обоснованию математических моделей и вычислительных методов решения векторных задач дискретной оптимизации на различных комбинаторных множествах. Особое внимание уделено исследованию структурных свойств допустимой области, критериального конуса, множеств доминирования решений задач. С учетом установленной взаимосвязи между векторными задачами на комбинаторных множествах и оптимизационными задачами получены условия оптимальности различных видов эффективных решений.

В работах [116, 117] на основе развития идей евклидовой комбинаторной оптимизации и метода главного критерия разработаны и обоснованы возможные подходы для решения таких задач с линейными и дробно-линейными целевыми функциями. Перспективным представляется расширение полученных результатов на другие классы евклидовых комбинаторных множеств, а также рассмотрение квадратичных и выпуклых целевых функций. Если в исходной постановке функции не выпуклы, можно строить эквивалентные модели с использованием теории выпуклых продолжений. Отметим также статью [118], в которой рассмотрены двухуровневые задачи, содержащие на нижнем уровне линейные задачи дискретной оптимизации, оптимальные решения которых используются при задании допустимой области задачи верхнего уровня. Описанный подход можно распространить на ряд задач геометрического проектирования, в которых область допустимых решений формируется как задача минимизации специального класса функции в конфигурационном пространстве геометрических объектов [119].

В заключение отметим, что теорию, модели и методы евклидовой комбинаторной оптимизации можно применять как эффективный инструментарий для разработки новых подходов к решению труднорешаемых задач дискретно-непрерывной структуры, а также использовать их приложения в различных интеллектуальных информационно-аналитических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 261 с.
2. Sergienko I.V., Shylo V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 1. P. 15–24.
3. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. (Eds.) Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer, 2013. 3399 p.
4. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2012. 660 p.
5. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Mineola (NY): Dover Publications, 2013. 528 p.
6. Sergienko I.V., Hulianytskyi L.F., Sirenko S.I. Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 5. P. 732–741.
7. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Springer Optimization and Its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 239–250.
8. Згуровский М.З., Павлов А.А. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Киев: Наук. думка, 2016. 716 с.
9. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. Харьков: Ин-т пробл. машиностроения АН УССР, 1980. 22 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т пробл. машиностроения; № 85).
10. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. Харьков: Ин-т пробл. машиностроения АН УССР, 1982. 33 с. (Препринт. АН УССР, Ин-т пробл. машиностроения; № 173).
11. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
12. Berge C. Principes de combinatoire. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
13. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. Москва: Наука, 1975. 319 с.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков: Константа, 2017. 404 с.

15. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. 188 с.
16. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев: Наук. думка, 2008. 159 с.
17. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Москва: Наука, 1981. 344 с.
18. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ, 2011. 328 с.
19. Пичугина О., Брус А. Компьютерное исследование комбинаторных множеств и многогранников: Классификация. Применение в оптимизации и теории геометрических графов. Saarbriicken: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2014. 144 с.
20. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства. *Пробл. машиностроения*. 2005. Т. 8, № 3. С. 56–62.
21. Гребенник И.В. Комбинаторное множество перестановок кортежей и его свойства. *Радиоэлектроника. Информатика. Управление*. 2005. № 1. С. 92–98.
22. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений. *Докл. НАН Украины*. 2008. № 10. С. 28–31.
23. Yemets O.A., Yemets A.O., Polyakov I.M. Criterion of an edge of a general polyhedron of arrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 796–805.
24. Yemets O.A., Yemets A.O., Polyakov I.M. Optimization on arrangements: The simplex form of polyhedron of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49, N 12. P. 14–28.
25. Aardal K., Hoesel S. Polyhedral techniques in combinatorial optimization. I: Computations. *Statistica Neerlandica*. 1996. N 15. P. 3–26.
26. Aardal K., Hoesel S. Polyhedral techniques in combinatorial optimization. II: Theory. *Statistica Neerlandica*. 1999. N 2. P. 131–177.
27. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации. Харьков: Золотая миля, 2018. 312 с.
28. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930.
29. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn*. 2016. Vol. 4, N 2. P. 129–152.
30. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Functional and analytic representations of the general permutations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 1, N 4. P. 27–38.
31. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous approaches to the unconstrained binary quadratic problems. *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering*. Edited Bélair J., Frigaard I., Kunze H. Cham: Springer, Switzerland, 2016. P. 689–700.
32. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representation techniques in combinatorial optimization. *IOSR Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 13, N 2, Ver. V. P. 12–25.
33. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Euclidean combinatorial configurations: continuous representations and convex extensions. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. Vol. 1020. P. 65–80.
34. Pichugina O., Yakovlev S. Euclidean combinatorial configurations: Typology and applications. *2019 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering* (July 2–6, 2019, Lviv). Lviv, 2019. P. 1065–1070.
35. Yakovlev S.V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polyhedral. *Comp. Math. and Math. Phys*. 1994. Vol. 34. P. 1112–1119.
36. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Springer Optimization and Its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 567–584.
37. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Москва: Наука, 1969. 760 с.
38. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Паршин О.В. Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1989. № 5. С. 73–78.
39. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N 4. P. 562–567.
40. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 1. P. 99–109.
41. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications. *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering* (May 29–June 2, Kyiv). Kyiv, 2017. P. 1167–1175.
42. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On optimization problems on the polyhedral-spherical configurations with their properties. *2018 IEEE First International Conference on System Analysis and Intelligent Computing* (October 8–12, 2018, Kyiv). Kyiv, 2018. P. 94–100.

43. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. Polyhedral-spherical configurations in discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, N 1. P. 26–40.
44. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. О существовании выпуклого продолжения функций, заданных на гиперсфере. *Докл. НАН Украины*. 1998. № 2. С. 128–133.
45. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V., Yemets O.A., Valuyskaya O.A. Construction of convex continuations for functions defined on hypersphere. *Cybernetics and System Analysis*. 1998. Vol. 34, N 2. P. 27–36.
46. Stoyan Yu., Grebennik I., Kalashnikov V., Lytvynenko O. Enumeration and generation of permutations with a partially fixed order of elements. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*. 2017. Vol. 8, N 1. P. 19–30.
47. Pichugina O., Kartashov O. Signed permutation polytope packing in VLSI design. *15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems* (February 26–March 2, 2019, Polyana, Ukraine). Polyana, 2019. P. 50–55.
48. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах. *Компьютерная математика*. 2016. Вып. 1. С. 143–154.
49. Grebennik I.V. Description and generation of permutations containing cycles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 6. P. 945–952.
50. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S. Generation of combinatorial sets possessing special characteristics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 890–898.
51. Стоян Ю.Г, Яковлев С.В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике. *Докл. АН УССР*. 1988. № 5. С. 68–70.
52. Yakovlev S.V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1989. Vol. 25, N 3. P. 385–391.
53. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации. *Докл. НАН Украины*. 2017. № 8. С. 20–26.
54. Valuiskaya O.A., Yemets O.A., Romanova N.G. Stoyan–Yakovlev's modified method applied to convex continuation of polynomials defined on polypermutations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2002. Vol. 42, N 4. P. 591–596.
55. Yakovlev S., Pichugina O. On constrained optimization of polynomials on permutation set. *Proceedings of the Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems* (April 15–19, 2019, Zaporizhzhia). Zaporizhzhia, 2019. P. 570–580.
56. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на комбинаторных множествах размещений. *Изв. вузов. Сер. Мат*. 1991. № 11. С. 74–86.
57. Пичугина О.О. Алгоритм построения выпуклого продолжения на полиперестановках и сфера его применения. *Problems of Computer Intellectualization*. Kyiv (Ukraine)–Sofia (Bulgaria), 2012. P. 125–132.
58. Pichugina O., Yakovlev S. Quadratic optimization models and convex extensions on permutation matrix set. In: Shakhovska N. and Medykovskyy M.O. (Eds.) *Advances in Intelligent Systems and Computing IV*. Cham: Springer Nature, Switzerland, 2019. P. 231–246.
59. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. Vol. 29, N 5. P. 419–426.
60. Land A.H., Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*. 1960. Vol. 28, N 3. P. 497–520.
61. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. *Кибернетика*. 1965. № 1. С. 45–56; № 2. С. 85–88.
62. Sergienko I.V., Iemets O.A., Chernenko O.A. Solving the conditional optimization problem for a fractional linear objective function on a set of arrangements by the branch and bound method. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 832–836.
63. Iemets O.A., Yemets A.O. The solution of a minimization problem of the weighted length of a connecting grid by branch and bound method. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. Vol. 44, N 7. P. 22–33.
64. Iemets O.A., Parfionova T.A. Transportation problems on permutations: properties of estimates in the branch and bound method. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 46, N 6. P. 953–959.
65. Яковлев С.В., Паршин О.В. Приближенные методы оптимизации на вершинах перестановочного многогранника. *Вестн. Харьк. ун-та. Динамические системы*. 1989. Вып. 334. С. 198–206.
66. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах. *Математическое и компьютерное моделирование. Сер. Физ.-мат. науки*. 2017. № 15. С. 258–264.
67. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Методы штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах. *Радиоэлектроника и информатика*. 2016. № 1. С. 18–26.

68. Stetsyuk P.I. Shor's *r*-algorithms: Theory and practice. *Springer Optimization and Its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 239–250.
69. Stetsyuk P.I. Theory and software implementations of Shor's r-algorithms. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 692–703.
70. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1988. № 3. С. 238–240.
71. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2001. Vol. 53, N 9. P. 1535–1545.
72. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2016. 142 с.
73. Козин И.В. Эволюционные модели в задачах дискретной оптимизации. Запорожье: Запорож. нац. ун-т, 2019. 204 с.
74. Yakovlev S., Kartashov O., Yarovaya O. On class of genetic algorithms in optimization problems on combinatorial configuration. *2018 IEEE XIII International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies* (September 11–14, 2018, Lviv). Lviv, 2018. P. 374–377.
75. Yakovlev S., Kartashov O., Pichugina O. Optimization on combinatorial configurations using genetic algorithms. In: *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. Vol. 2353. P. 28–40.
76. Yakovlev S., Kartashov O., Pichugina O., Korobchynskyi K. Genetic algorithms for solving combinatorial mass balancing problem. *2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*. (July 2–6, 2019, Lviv). Lviv, 2019. P. 1061–1064.
77. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації. *Доп. НАН України*. 2000. № 9. С. 105–109.
78. Yemets O.A., Yemets Y.M. A modification of the method of combinatorial truncation in optimization problems over vertex-located sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 5. P. 785–791.
79. Yemets O.A., Yemets Y.M., Chilikina T.V. Combinatorial cutting while solving optimization nonlinear conditional problems of the vertex located sets. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, N 5. P. 21–29.
80. Iemets O.O., Yemets E.M., Olhovskiy D.M. The method of cutting the vertices of permutation polyhedron graph to solve linear conditional optimization problems on permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 613–619.
81. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах. *Управляющие системы и машины*. 2009. № 4. С. 36–42.
82. Donec G.A., Kolechkina L.M. Construction of hamiltonian paths in graphs of permutation polyhedra. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 46, N 1. P. 7–13.
83. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726.
84. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 9. P. 38–50.
85. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications. *Modeling and Optimization in Space Engineering*. New York: Springer, 2013. Vol. 73. P. 363–388.
86. Grebennik I.V., Kovalenko A.A., Romanova T.E., Urniaieva I.A., Shekhovtsov S.B. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231.
87. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pintér J.D. Optimized packings in space engineering applications: Part I. *Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications*. 2019. Vol 144. P. 395–437.
88. Stoyan Y., Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A. Optimized packings in space engineering applications: Part II. *Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications*. 2019. Vol 144. P. 439–457.
89. Yakovlev S.V. Configuration spaces of geometric objects with their applications in packing, layout and covering problems. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. Vol. 1020. P. 122–132.
90. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Algorithm for solving a continuous problem of optimal partitioning with neurolinguistic identification of functions in target functional. *Journal of Automation and Information Science*. 2018. Vol. 50, N 3. P. 1–20.
91. Kiseleva E.M., Kadochnikova Y.E. Solving a continuous single-product problem of optimal partitioning with additional conditions. *Journal of Automation and Information Science*. 2009. Vol. 41, N 7. P. 48–63.
92. Stoyan Yu.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Optimization of 3D objects layout into a multiply connected

domain with account for shortest distances. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 3. P. 374–385.

93. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Springer Optimization and Its Applications*. 2016. Vol. 114. P. 369–400.
94. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie*. 1982. N 2. P. 4, 5.
95. Pichugina O. Placement problems in chip design: Modeling and optimization. *4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology* (October 10–13, 2017, Kharkiv). Kharkiv, 2017. P. 465–473.
96. Грицик В.В., Шевченко А.І., Кисельова О.М., Яковлев С.В., Бідюк П.І., Гіль М.І., Крак Ю.В., Куляс А.І., Романова Т.Є., Стецюк П.І. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів. Донецьк: Наука і освіта, 2011. 480 с.
97. Яковлев С.В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов. *Докл. НАН Украины*. 2017. № 9. С. 63–68.
98. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731.
99. Hulianytskyi L.F., Riasna I.I. Automatic classification method based on a fuzzy similarity relation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 1. P. 30–37.
100. Гуляницький Л.Ф., Рясна І.І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. № 1. С. 17–25.
101. Гребенник И.В. Интервальные модели комбинаторной оптимизации квазилинейных функций в пространстве. *Докл. НАН Украины*. 2004. № 9. С. 60–64.
102. Гребенник И.В., Романова Т.Е. Отображение интервальных комбинаторных множеств в евклидово пространство. *Пробл. машиностроения*. 2002. Т. 5, № 2. С. 87–91.
103. Ємець О.О., Ємець О.О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с.
104. Yemets O.A., Roskladka A.A. Combinatorial optimization under uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 5. P. 655–663.
105. Романова Т.Е., Евсеева Л.Г., Стоян Ю.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных. *Докл. НАН Украины*. 1997. № 7. С. 56–60.
106. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е. Account of errors in optimization placement problem. *Пробл. машиностроения*. 1998. Т. 1, № 2. С. 31–41.
107. Гребенник И.В., Романова Т.Е. Учет погрешностей при построении математических моделей оптимизационных комбинаторных задач. *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики*. 2002. Вып. 119. С. 64–69.
108. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov A. An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. *8th International Conference on Mathematics, Information Technologies*, *Education* (March 23–25, 2019, Xi'an, China). Xi'an, 2019. P. 148–162.
109. Mashtalir V.P., Yakovlev S.V. Point-set methods of clusterization of standard information. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 3. P. 295–307.
110. Gerasin S.N., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V. Set coverings and tolerance relations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 43, N 3. P. 333–340.
111. Mashtalir V.P., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V. Group structures on quotient sets in classification problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 507–518.
112. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
113. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Semenova N.V., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, N 2. P. 27–41.
114. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 228–233.
115. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828.
116. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.N. An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 3. P. 441–451.

117. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. On approach to solving vector problems with fractionally linear functions of the criteria on the combinatorial set of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, N 2. P. 67–80.
118. Sergienko I.V., Semenova N.V., Semenov V.V. Bilevel optimization problems of distribution of interbudget transfers within given limitations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 730–740.
119. Yakovlev S.V. Formalizing spatial configuration optimization problems with the use of a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 581–589.

Надійшла до редакції 21.11.2019

Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев

ТЕОРІЯ І МЕТОДИ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: СУЧАСНИЙ СТАН І ПЕРСПЕКТИВИ

Анотація. Розглянуто клас задач евклідової комбінаторної оптимізації як задач дискретної оптимізації на множині комбінаторних конфігурацій, відображеній в арифметичний евклідів простір. Наведено огляд сучасних методів евклідової комбінаторної оптимізації. Описано властивості відповідних образів комбінаторних множин. Запропоновано теорію неперервних функціональних представлень і опуклих продовжень для розв'язання зазначеного класу задач. Визначено сфери практичного застосування та перспективні напрямки досліджень.

Ключові слова: комбінаторна конфігурація, евклідова комбінаторна множина, евклідові моделі, оптимізація.

Yu.G. Stoyan, S.V. Yakovlev

THEORY AND METHODS OF EUCLIDIAN COMBINATORIAL OPTIMIZATION: CURRENT STATE AND PROSPECTS

Abstract. Euclidean combinatorial optimization problems are considered as discrete optimization problems on a set of combinatorial configurations mapped into an arithmetic Euclidean space. Modern methods of Euclidean combinatorial optimization are overviewed. The properties of the corresponding images of combinatorial sets are described. A theory of continuous functional representations and convex extensions is proposed for solving this class of problems. Areas of practical application and promising research areas are indicated.

Keywords: combinatorial configuration, Euclidean combinatorial set, Euclidean models, optimization.

Стоян Юрий Григорьевич,
чл.-кор. НАН Украины, доктор техн. наук, заведующий отделом Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», e-mail: svsyak7@gmail.com.