УДК 519.85

**Г.А. ДОНЕЦ, Л.Н. КОЛЕЧКИНА, А.Н. НАГОРНАЯ**

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

**Аннотация.** Рассмотрена задача на множестве перестановок с квадратичной функцией цели и дополнительными линейными ограничениями. Предложен метод решения сформулированной задачи, который включает два этапа. На первом этапе находится множество опорных решений. Составляется квадратичная функция для соответствующей транспозиции и формируются подзадачи с дополнительными ограничениями. При их решении находится множество опорных решений, удовлетворяющих ограничениям основной задачи. Второй этап заключается в нахождении оптимального решения из подмножества оптимальных решений и множества допустимых решений.

**Ключевые слова:** условная оптимизация, квадратичная функция, множество перестановок, транспозиция элементов, прирост функции, прирост ограничения, множество допустимых решений, множество опорных решений, оптимальное решение.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи, моделируемые экстремальными дискретными задачами, часто имеют высокую размерность, поэтому они довольно сложны с вычислительной точки зрения. Особое место в дискретной оптимизации занимаю задачи на комбинаторных множествах.

В общем случае задача комбинаторной оптимизации — это задача о максимизации или минимизации функции при заданных ограничениях и при условии, что на некоторые (или даже на все) переменные налагают требование целочисленности. Задача комбинаторной оптимизации широко используется на практике, однако многие важные задачи с теоретической и практической точек зрения являются NP-полными. Это означает, что для них неизвестно и, скорее всего, не существует полиномиальных алгоритмов решения. Ввиду указанных причин актуальна проблема уменьшения времени работы алгоритмов решения трудноразрешимых задач комбинаторной оптимизации, в частности сокращение множества допустимых решений в некоторых методах (ветвей и границ, отсечений, динамического программирования и многих других).

Поэтому возникает необходимость в разработке наиболее эффективных алгоритмов, основанных на специфических свойствах комбинаторных множеств. Следовательно, одной из важных проблем в области дискретной оптимизации является выявление свойств комбинаторных множеств в экстремальных задачах, использование которых позволило бы установить регулярность изменения значений целевых функций в зависимости от порядка аргументов, специфики и структуры комбинаторных множеств.

В настоящее время получены положительные результаты в области исследования различных классов комбинаторных моделей и разработки новых методов их решения [1–11]. Фундаментальный вклад в развитие дискретной, в частности комбинаторной, оптимизации внесли многие зарубежные ученые: М. Гэри, С. Берге, Д. Джонсон, Х. Пападимитриу, П. Пардалос, К. Стайглих, Р. Стэнли, Ф. Харари, В.А. Емеличев, В.М. Сачков [12–17]. В свою очередь, работы многих украинских ученых (Л.Ф. Гуляницкий, П.И. Стецюк, И.В. Сергиенко, Н.С. Шор, Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.А. Емец, В.О. Перепелица и многие другие) посвящены изучению различных классов проблем комбинаторной оптимизации.

Так, в работах [10, 11, 18–21] авторы излагают теорию выпуклых продолжений и ее приложения в задачах комбинаторной оптимизации. Применение комбинаторных моделей в практических задачах отражено в публикациях Л.Ф. Гуляницкого, И.В. Сергиенко, Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, Н.С. Шора. Задачи с квадратичной функцией цели на различных комбинаторных множествах описаны в работах [18, 22, 27].

В настоящей статье рассматривается задача условной оптимизации с квадратичной функцией цели на множестве перестановок, предложен метод решения данной задачи, основанный на свойствах комбинаторного множества. Статья является продолжением работ [4, 22–25] и состоит из двух частей. В первой части описывается постановка задачи и ее свойства, вторая часть посвящена изложению метода решения поставленной задачи.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Введем необходимые определения [26]. Пусть заданы мультимножество $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, его основание $S(A)=\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, т.е. набор различных элементов множества, где $e_j \in R^1 \ \forall j \in N_k$, и кратность элементов

$$k(e_j)=\alpha_j,\ j \in N_k,\ \ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=q.$$

Мультимножество $B$ с основанием $S(B)$ называется подмультимножеством мультимножества $A$ с основанием $S(A)$, если $S(B) \subset S(A)$ и для каждого элемента $a \in S(B)$ выполняется неравенство $k_B(a) \le k_A(a)$.

Упорядоченной $n$-выборкой из мультимножества $A$ называется набор

$$a=(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}), \tag{1}$$

где $a_{i_j} \in A \ \ \forall i_j \in N_n,\ \ \forall j \in N_n,\ i_s \ne i_t,$ если $s \ne t \ \ \forall s \in N_n,\ \forall t \in N_n$.

**Определение 1** [26]. Множество перестановок с повторениями из $n$ действительных чисел, среди которых $k$ различных, называется общим множеством перестановок и обозначается $P_{nk}(A)$. Оно является множеством упорядоченных $n$-выборок вида (1) из мультимножества $A$ при условии $n=q>k$.

**Определение 2** [26]. При $n = q = k$ имеем множество перестановок без повторений $P_n$. Очевидно, что $P_n(A)=P_{nk}(A)$. В тех случаях, когда конкретно не указан вид множества перестановок, множества записываются как $P_n$. Элементами множества перестановок $P_n$ являются упорядоченые наборы $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $n$ символов. Каждый символ входит в набор только один раз и является представителем множества $A_i,\ i \in N_n$.

**Определение 3** [4]. Перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют лексикографически следующей за $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, если не существует перестановки $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ такой, что $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) < (a''_1, a''_2, \ldots, a''_n)$ и $(a''_1, a''_2, \ldots, a''_n) < (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Известно [26], что выпуклая оболочка множества перестановок является многогранником перестановок $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$, множество вершин $P(A)$ которого равно множеству перестановок: $\operatorname{vert}\Pi(A)=P(A)$. Упорядочим элементы мультимножества $A$ в порядке возрастания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_q$, а элементы его основания – в порядке убывания: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Тогда выпуклая оболочка общего набора перестановок $P(A)$ представляет собой общий многогранник $\Pi(A)=\operatorname{conv}P(A)$, который описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n} a_j, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} x_{\alpha j} \le \sum\limits_{j=1}^{i} a_j, \end{cases}$$

$\alpha_j \in N_n, \alpha_j \ne \alpha_t \ \ \forall j \ne t, \forall j, t \in N_i, \ \forall i \in N_n$ и $P(A)=\operatorname{vert}\Pi(A)$.

Количество транспозиций элементов комбинаторного множества в многограннике перестановок определяется по формуле [24]

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = p. \tag{2}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу вида

$$Z(\Phi, P(A)) \colon \operatorname{extr}\{\Phi(a) \mid a \in P(A)\},$$

которое состоит в нахождении экстремума функции $\Phi(a)$ на евклидовом комбинаторном множестве перестановок.

Осуществим биективное отображение множества $P_n(A)$ в пространство $R^n$, поставив каждому элементу $a \in P_n$ в соответствие вектор $x \in R^n$. Образ множества $P_n(A)$ обозначим $E_n \subset R^n$. В результате имеем задачу комбинаторной оптимизации в евклидовой постановке

$$Z(F, E_n) \colon \operatorname{extr}\{F(a) \mid X \in D \subset E_n\} \tag{3}$$

с ограничениями

$$D = \{x \in E_n \subset R^n \mid Gx \le (\ge) b\}, \tag{4}$$

где

$$\Phi(a) = F(x) \text{ при } a \in P_n,\ x \in E_n;$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{5}$$

где $G \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $X$ — непустое множество в $R^n$, которое определяется следующим образом:

$$X = \operatorname{vert} \Pi(A),\ \Pi = \operatorname{conv} P(A).$$

Естественно полагать, что экстремум квадратичной функции является одной из вершин многогранника перестановки, а вершины многогранника перестановок $P_n(A)$ будут совпадать с вершинами графа перестановок $G(P_n)$ [23, 26].

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваемый метод предназначен для решения оптимизационных задач с квадратичной функцией цели на комбинаторном множестве перестановок и включает два этапа. На первом этапе формируется множество опорных решений, а на втором этапе осуществляется нахождение оптимального решения.

### 1. Нахождение множества опорных решений задачи

**1.1. Составление задач с дополнительными ограничениями.** Для каждой транспозиции элементов множества перестановок в количестве $p$ составляем квадратичную функцию цели (5) в виде

$$F_{ij} = (x_i - x_j)(a_{ij} x_i + a_{ij} x_j + \ldots + a_k x_k).$$

Отсюда при транспозиции соответствующих элементов множества перестановок функция цели в каждом частном случае имеет вид

$$x_1 \leftrightarrow x_i \quad (i = 2, \ldots, k);$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2 \colon F_{12} = (x_1 - x_2)(a_{12} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{k2} x_k);$$

$$x_1 \leftrightarrow x_3 \colon F_{13} = (x_1 - x_3)(a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{13} x_3 \ldots + a_{k3} x_k);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \leftrightarrow x_k \colon F_{1k} = (x_1 - x_k)(a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + \ldots + a_{1k} x_k); \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_2 \leftrightarrow x_k \quad (i = 3, \ldots, k) \colon F_{2k} = (x_2 - x_k)(a'_{1k} x_1 + a'_{2k} x_2 + \ldots + a'_{2k} x_k);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{k-1} \leftrightarrow x_k \colon F_{k-1k} = (x_{k-1} - x_k)(a'_{1k-1} x_1 + a'_{2k-1} x_2 + \ldots + a'_{kk-1} x_{k-1} + a'_{kk-1} x_k).$$

Составляем задачи, дополнительные ограничения которых формируются на основании формул (6):

$x_{k-1} \leftrightarrow x_k$ : $\operatorname{extr} F_{k-1k} = (x_{k-1} - x_k)(a'_{1k-1}x_1 + a'_{2k-1}x_2 + \ldots + a'_{kk-1}x_{k-1} + a'_{kk-1}x_k)$,

$$\begin{cases} x_1 > (<) x_2, \\ x_1 > (<) x_3, \\ \ldots \\ x_1 > (<) x_k, \\ x_2 > (<) x_3, \\ \ldots \\ x_{k-1} < (>) x_k. \end{cases} \tag{7}$$

**1.2. Нахождение множества опорных решений.** Введем следующие пояснения. Задача (3)–(5) рассматривается на множестве перестановок $P_n(A)$; соответственно данное множество является множеством допустимых решений.

При решении $p$ задач вида (7) получаем множество точек $Z^{tr}$, которое формируется при рассмотрении транспозиций элементов множества $P_n(A)$:

$$Z^{tr} = Z_1^{tr} \cup Z_2^{tr} \cup \ldots \cup Z_q^{tr},\ q = [1, 2, \ldots, p],$$

где $Z_q^{tr}$ — множество точек, которое сформировалось при решении соответствующей задачи вида (7).

Естественно полагать, что множество $Z^{tr}$ является подмножеством множества допустимых решений $P_n(A)$:

$$Z^{tr} \subseteq P_n(A).$$

На каждом подмножестве осуществляется проверка дополнительных ограничений задачи (3)–(5). При проверке первой точки множества перестановок формируем ограничения:

$$\begin{cases} g'_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1, x_n^1) = b'_1 \le (\ge) b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'_i(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_n^i) = b'_i \le (\ge) b_i. \end{cases}$$

Составляем необходимые условия для приростов ограничений:

$$\begin{cases} \Delta g'_1 \ge (\le) b_{11},\ b_{11} = b_1 - b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta g'_i \ge (\le) b_{ii},\ b_{ii} = b_i - b'_i. \end{cases}$$

Последующие точки проверяются с использованием формулы расчета прироста ограничений:

$$\Delta g = \Delta g_2 - \Delta g_1 = c_j (x_i^{g_2} - x_j^{g_1}) + c_i (x_j^{g_2} - x_i^{g_1}). \tag{8}$$

Для вычисления прироста целевой функции $\Delta f$ нужно использовать необходимую формулу целевой функции в виде (6) в зависимости от транспозиции элементов множества в рассматриваемой точке множества перестановок в задачах вида (7).

Если ограничения не выполняются, но приросты целевой функции возрастают при максимизации (5) или убывают при минимизации (5), то проверка продолжается. В противном случае необходимо перейти к следующей задаче вида (7) согласно транспозиции элементов множества перестановок. Также следует отметить, что если ограничения выполняются, но целевая функция убывает (возрастает) при максимизации (минимизации), то дальнейшая проверка точек множества также продолжается.

В результате решения задач вида (7) имеем множество точек вида $Z^{tr}$:

$$Z^{tr} = Z^{s} \cup Z^{ns},$$

где $Z^{s} = Z_1^{s} \cup Z_2^{s} \cup \ldots \cup Z_q^{s}$, $q = [1, 2, \ldots, p]$, — множество точек, которые удовлетворяют ограничению (4); $Z^{ns} = Z_1^{ns} \cup Z_2^{ns} \cup \ldots \cup Z_q^{ns}$, $q = [1, 2, \ldots, p]$, — множество точек, которые не удовлетворяют ограничению (4).

Возможен вариант $Z^{s} = 0$, когда не существует множества $Z^{tr}$ точек, которые удовлетворяли бы (4). В случае $Z^{ns} = 0$ все точки множества $Z^{tr}$ будут удовлетворять (4), (5).

Поскольку задача (3)–(5) рассматривается на множестве перестановок, то нерассмотренные точки множества $P_n(A)$, которые не принадлежат $Z^{tr}$, будут образовывать множество допустимых решений вида

$$Z^{con} = P_n(A) \setminus Z^{tr}.$$

Множество $Z^{con}$ является подмножеством $P_n(A)$ соответственно:

$$P_n(A) = Z^{tr} \cup Z^{con}.$$

Из множества $Z^{s}$ выбирается точка экстремума $x_{\text{extr}}$, при которой имеем $\text{extr} F(x_{\text{extr}})$. Тогда множество опорных решений $Z^{opr}$ будет состоять из множества нерассмотренных точек $Z^{con}$ и точки экстремума:

$$Z^{opr} = Z^{con} \cup x_{\text{extr}}.$$

## 2. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Упорядочим множество опорных решений $Z^{opr}$ в лексикографическом порядке согласно определению 3. Затем выбираем точку $x_{\text{extr}}$ и рассматриваем последовательно все точки лексикографически упорядоченного множества $Z^{opr}$, которые находятся левее или правее данной точки в зависимости от экстремума функции (5). Следует отметить, что значения целевой функции и ограничений вычисляется только для первой точки; для всех последующих точек необходимо использовать формулы (6), (8).

Если рассматриваемая точка множества $Z^{opr}$ удовлетворяет ограничениям (4) и функция цели возрастает (при максимизации) или убывает (при минимизации), то она является оптимальной; в противном случае поиск оптимального решения прекращается.

Следует отметить, что если ограничения (4) не выполняются, но значение функции цели возрастает при максимизации или убывает при минимизации, то необходимо осуществлять дальнейший поиск оптимального решения. Поиск прекращется только в том случае, если функция цели убывает (возрастает) при возрастании (убывании) и ограничения (4) не выполняются.

Если точка $x_{\text{extr}}$ после лексикографического упорядочения занимает первое место при минимизации (4) или последнее место при максимизации (4), то она является оптимальным решением.

Рассмотрим алгоритм решения на примере следующей задачи.

**Пример.** Найти точку множества перестановок из элементов $A = (1, 2, 3, 4)$, в которой достигается максимальное значение функции

$$\max F(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + 2x_4^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g_1 = x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ g_2 = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 15, \\ g_3 = -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 - x_4 \leq 31. \end{cases}$$

**Решение.** Согласно формуле (2) количество возможных транспозиций элементов множества перестановок составляет $C_4^2 = 6$.

Рассмотрим первую транспозицию элементов множества перестановок $x_1 \leftrightarrow x_2$, представляя целевую функцию в виде произведения

$$f_{12} = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4);$$

соответственно при поиске первого решения необходимо учесть следующие условия:

$$\begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_3 \to \min. \end{cases}$$

Подмножество допустимых решений $Z_q^{tr}$ для данной транспозиции элементов имеет вид

$$Z_{12}^{tr} = ((x_1, x_2, x_4, x_3) \cup (x_1, x_4, x_2, x_3)).$$

Решаем задачу, которая возникла при данной транспозиции элементов, осуществляя проверку точки $(x_1, x_2, x_4, x_3) = (4, 3, 1, 2)$: $g_1(4, 3, 1, 2) = 25 \geq 7$, $g_2(4, 3, 1, 2) = 25 \geq 15$, $g_3(4, 3, 1, 2) = 12 \leq 31$; все ограничения выполняются. Тогда $F_{12}^1(4, 3, 1, 2) = 40$. Соответственно данная точка будет принадлежать множеству точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи $Z_{12}^s = (4, 3, 1, 2)$.

Для проверки следующей точки необходимо выполнение условий

$$\Delta g_1 \geq -18, \ \Delta g_2 \geq -10, \ \Delta g_3 \leq 19.$$

Выполним проверку точки $(x_1, x_4, x_2, x_3) = (4, 2, 1, 3)$, используя формулу (8) для ограничений:

$$\Delta g_1(4, 2, 1, 3) = 7(2-3) + 1(3-2) = -6, \ \Delta g_1(4, 2, 1, 3) = -6 \geq -18,$$

первое ограничение выполняется;

$$\Delta g_2(4, 2, 1, 3) = 2(2-3) + 4(3-2) = 6, \ \Delta g_2(4, 2, 1, 3) = 6 \geq -10,$$

второе ограничение выполняется;

$$\Delta g_3(4, 2, 1, 3) = 6(2-3) - 1(3-2) = -7, \ \Delta g_3(4, 2, 1, 3) = -7 \leq 19,$$

третье ограничение выполняется.

Поскольку точку (4, 2, 1, 3) получили транспозицией элементов $x_2 \leftrightarrow x_4$ из точки (4, 3, 1, 2), то для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать формулы (6):

$$\Delta f_{24} = \frac{1}{2}(x_2 - x_4)(x_2 - 8x_1 + 14x_3 + x_4),$$

$$\Delta f_{24}(4, 2, 1, 3) = \frac{1}{2}(2-3)(2 - 8 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 3) = 6,5.$$

Тогда $F_{12}^2 = F_{12}^1 + \Delta f_{24} = 40 + 6,5 = 46,5$, функция возрастает; следовательно, $Z_{12}^{ns} = (4, 3, 1, 2) \cup (4, 2, 1, 3)$.

Рассмотрим следующую транспозицию элементов $x_1 \leftrightarrow x_3$:

$$f_{13} = (x_1 - x_3)(x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4),$$

необходимые условия: $\begin{cases} x_1 > x_3, \\ x_2 \to \min. \end{cases}$

При рассмотрении данной транспозиции элементов имеем

$$Z_{13}^{tr} = (x_1, x_3, x_4, x_2) \cup (x_1, x_4, x_3, x_2).$$

Выполним проверку точки $(x_1, x_3, x_4, x_2) = (4, 1, 3, 2)$: $g_1(4, 1, 3, 2) = 7 \geq 7$, $g_2(4, 1, 3, 2) = 35 \geq 15$, $g_3(4, 1, 3, 2) = 16 \leq 31$, откуда следует, что все ограничения выполняются; $F_{13}^1(4, 1, 3, 2) = 24$. Соответственно данная точка будет принадлежать множеству точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи $Z_{13}^s = (4, 1, 3, 2)$.

Для проверки следующей точки необходимо выполнение условий

$$\Delta g_1 \geq 0, \; \Delta g_2 \geq -20, \; \Delta g_3 \leq 15.$$

Выполним проверку точки $(x_1, x_4, x_3, x_2) = (4, 1, 2, 3)$, используя формулу (8) для ограничений (6):

$\Delta g_1(4, 1, 2, 3) = 3 \geq 0$, первое ограничение выполняется;
$\Delta g_2(4, 1, 2, 3) = 1 \geq -20$, второе ограничение выполняется;
$\Delta g_3(4, 1, 2, 3) = -9 \leq 15$, третье ограничение выполняется.

Точку $(4, 1, 2, 3)$ получили транспозицией элементов $x_3 \leftrightarrow x_4$ из точки $(4, 1, 3, 2)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать формулу из (6):

$$\Delta f_{34} = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)(6x_2 - 8x_1 + x_3 + x_4),$$
$$\Delta f_{34}(4, 1, 2, 3) = \frac{1}{2}(2-3)(6 - 8 \cdot 4 + 2 + 3) = 10, 5.$$

Тогда $F_{13}^2 = F_{13}^1 + \Delta f_{24} = 24 + 10{,}5 = 34{,}5$, функция возрастает; следовательно,

$$Z_{13}^{ns} = (4, 1, 3, 2) \cup (4, 1, 2, 3).$$

Рассматриваем следующую транспозицию элементов $x_1 \leftrightarrow x_4$:

$$f_{14} = \frac{1}{2}(x_1 - x_4)(3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4),$$

необходимые условия: $\begin{cases} x_1 > x_4, \\ x_2 \to \min. \end{cases}$

Тогда $Z_{14}^{tr} = ((x_1, x_3, x_4, x_2) \cup (x_1, x_4, x_3, x_2)) = Z_{13}^{tr}$, поэтому нет необходимости рассматривать данную задачу.

Рассмотрим транспозицию элементов $x_2 \leftrightarrow x_3$: $f_{23} = 4(x_2 - x_3)x_4$; соответственно при поиске первого решения необходимо учитывать единственное условие: $x_2 > x_3$.

Множество точек при рассмотрении данной транспозиции имеет вид

$$Z_{23}^{tr} = ((x_1, x_2, x_3, x_4) \cup (x_1, x_2, x_4, x_3) \cup (x_2, x_1, x_3, x_4) \cup$$
$$\cup (x_2, x_1, x_4, x_3) \cup (x_2, x_3, x_1, x_4) \cup (x_2, x_3, x_4, x_1) \cup$$
$$\cup (x_2, x_4, x_3, x_1) \cup (x_2, x_4, x_1, x_3)).$$

Выполним проверку точки $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 3, 2, 1)$: $g_1(4, 3, 2, 1) = 22 \geq 7$, $g_2(4, 3, 2, 1) = 24 \geq 15$, $g_3(4, 3, 2, 1) = 21 \leq 31$, все ограничения выполняются;

$F_{23}^1(4,3,2,1)=34,5$. Соответственно данная точка будет принадлежать множеству точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи $Z_{23}^s=(4,3,2,1)$.

Для проверки следующей точки необходимо выполнение условий $\Delta g_1 \ge -15$, $\Delta g_2 \ge -9$, $\Delta g_3 \le 10$. Поскольку точка $(x_1, x_2, x_4, x_3) \in Z_{12}^{tr}$, то нет необходимости в ее рассмотрении.

Выполним проверку точки $(x_2, x_1, x_3, x_4)=(3,4,2,1)$, используя формулу (8) для ограничений $\Delta g_1(3,4,2,1)=6 \ge -15$, $\Delta g_2(3,4,2,1)=-7 \ge -9$, $\Delta g_3(3,4,2,1)=9 \le 10$, ограничения выполняются. Тогда $\Delta g_1(3,4,2,1) \ge -21$, $\Delta g_2(3,4,2,1) \ge -2$, $\Delta g_3(3,4,2,1) \le 1$.

Точку $(3,4,2,1)$ получили транспозицией элементов $x_2 \leftrightarrow x_4$ из точки $(4,3,2,1)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать формулу из (6):

$$\Delta f_{12}=(x_1-x_2)(x_1+x_2-6x_3+x_4), \ \Delta f_{12}(3,4,2,1)=(3-4)(3+4-6\cdot 2+1)=4.$$

Тогда $F_{23}^2=F_{13}^1+\Delta f_{12}=34,5+4=38,5$, функция возрастает; следовательно, $Z_{23}^s=(4,3,2,1)\cup(3,4,2,1)$.

Выполним проверку точки $(x_2, x_1, x_4, x_3)=(3,4,1,2)$ с использованием формулы (8) для ограничений $\Delta g_1(3,4,1,2)=3 \ge -21$, $\Delta g_2(3,4,1,2)=1 \ge -2$, $\Delta g_3(3,4,1,2)=-9 \le 1$; ограничения выполняются. Соответственно $\Delta g_1(3,4,1,2) \ge -24$, $\Delta g_2(3,4,1,2) \ge -3$, $\Delta g_3(3,4,1,2) \le 10$.

Точку $(3,4,1,2)$ получили транспозицией элементов $x_3 \leftrightarrow x_4$ из точки $(4,3,2,1)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать формулу из (6):

$$\Delta f_{34}=\frac{1}{2}(x_3-x_4)(6x_2-8x_1+x_3+x_4),$$

$$\Delta f_{34}(3,4,1,2)=\frac{1}{2}(1-2)(6\cdot 4-8\cdot 3+1+2)=-1,5.$$

Тогда $F_{23}^3=F_{13}^2+\Delta f_{34}=38,5-1,5=37$; функция убывает, но все ограничения выполняются, поэтому необходимо продолжать исследование:

$$Z_{23}^s=(4,3,2,1)\cup(3,4,2,1)\cup(3,4,1,2).$$

Для точки $(x_2, x_3, x_1, x_4)=(2,4,3,1)$ с использованием формулы (8) имеем $\Delta g_1(2,4,3,1)=-3 \ge -21$, $\Delta g_2(2,4,3,1)=-2 \ge -2$, $\Delta g_3(2,4,3,1)=11 \le 1$; последнее ограничение не выполняется. Тогда $\Delta g_1(2,4,3,1) \ge -18$, $\Delta g_2(2,4,3,1) \ge 0$, $\Delta g_3(2,4,3,1) \le -10$.

Точку $(2,4,3,1)$ получили транспозицией элементов $x_1 \leftrightarrow x_3$ из точки $(3,4,2,1)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать формулу из (6):

$$\Delta f_{13}=(x_1-x_3)(x_1-6x_2+x_3+5x_4), \ \Delta f_{13}=(2-3)(2-6\cdot 4+3+5\cdot 1)=14.$$

Тогда $F_{23}^4=F_{23}^2+\Delta f_{13}=38,5+14=52,5$, функция возрастает, но последнее ограничение не выполняется, поэтому данная точка принадлежит множеству $Z_{23}^{ns}=(2,4,3,1)$.

Для точки $(x_2, x_3, x_4, x_1)=(1,4,3,2)$ имеем $\Delta g_1(1,4,3,2)=0 \ge -18$, $\Delta g_2(1,4,3,2)=-1 \ge 0$, второе ограничение не выполняется.

Точку $(1,4,3,2)$ получили транспозицией элементов $x_1 \leftrightarrow x_4$ из точки $(2,4,3,1)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать следующую формулу из (6):

$$\Delta f_{14}=\frac{1}{2}(x_1-x_4)(3x_1-6x_2+2x_3+3x_4), \ \Delta f_{14}=\frac{1}{2}(1-2)(3\cdot 1-6\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 2)=4,5.$$

Тогда $F_{23}^{5}=F_{23}^{4}+\Delta f_{14}=52,5+4,5=57$; функция возрастает, но второе ограничение не выполняется, поэтому данная точка принадлежит множеству $Z_{23}^{ns}=(2,4,3,1)\cup(1,4,3,2)$.

Выполним проверку точки $(x_2,x_4,x_3,x_1)=(1,4,2,3)$; имеем $\Delta g_1(1,4,2,3)=$ $=0\geq -21$, $\Delta g_2(1,4,2,3)=-2\geq -2$, $\Delta g_3(1,4,2,3)=4\leq 1$, третье ограничение не выполняется.

Точку $(1,4,2,3)$ получили транспозицией элементов $x_1\leftrightarrow x_4$ из точки $(3,4,2,1)$. Поэтому для нахождения прироста целевой квадратичной функции необходимо использовать следующую формулу из (6):

$$\Delta f_{14}=\frac{1}{2}(x_1-x_4)(3x_1-6x_2+2x_3+3x_4),\ \Delta f_{14}=\frac{1}{2}(1-3)(3\cdot 1-6\cdot 4+2\cdot 2+3\cdot 3)=8.$$

Тогда $F_{23}^{6}=F_{23}^{2}+\Delta f_{14}=38,5+8=46,5$; функция возрастает, но третье ограничение не выполняется, поэтому данная точка принадлежит множеству $Z_{23}^{ns}=(2,4,3,1)\cup(1,4,3,2)\cup(1,4,2,3)$.

Поскольку в точке $(x_2,x_4,x_3,x_1)=(1,4,2,3)$ третье ограничение не выполняется и функция цели убывает, то нет необходимости рассматривать точку $(x_2,x_4,x_1,x_3)$.

Составим следующую транспозицию элементов $x_2\leftrightarrow x_4$:

$$f_{24}=\frac{1}{2}(x_2-x_4)(x_2-8x_1+14x_3+x_4);$$

необходимые условия:
$$\begin{cases} x_2>x_4, \\ x_1\to \min. \end{cases}$$

Тогда $Z_{24}^{tr}=((x_2,x_4,x_3,x_1)\cup(x_2,x_3,x_4,x_1))=Z_{23}^{tr}$, поэтому нет необходимости рассматривать данную подзадачу.

Составим транспозицию элементов $x_3\leftrightarrow x_4$:

$$f_{34}=\frac{1}{2}(x_3-x_4)(6x_2-8x_1+x_3+x_4);$$

необходимые условия:
$$\begin{cases} x_3>x_4, \\ x_1\to \min. \end{cases}$$

Тогда $Z_{34}^{tr}=((x_3,x_4,x_2,x_1)\cup(x_3,x_2,x_4,x_1))$.

Выполним проверку точки $(x_3,x_4,x_2,x_1)=(1,2,4,3)$; имеем $\Delta g_1(1,2,4,3)=$ $-9\geq -12$, $\Delta g_2(1,2,4,3)=-6\geq -4$; второе ограничение не выполняется. Точку $(1,2,4,3)$ получили путем транспозиции элементов $x_1\leftrightarrow x_3$ из точки $(4,2,1,3)$:

$$\Delta f_{13}=(x_1-x_3)(x_1-6x_2+x_3+5x_4),\ \Delta f_{13}=(1-4)(1-12+4+15)=-24.$$

Тогда $F_{34}^{7}=F_{12}^{2}+\Delta f_{13}=46,5-24=22,5$; поскольку функция цели убывает и второе ограничение не выполняется, то нет необходимости рассматривать точку $(x_3,x_2,x_4,x_1)$. Соответственно обе точки принадлежат множеству $Z_{34}^{ns}=(1,2,4,3)\cup(1,3,4,2)$.

В результате решения шести задач получаем следующие множества:

$$Z^s=Z_{12}^s\cup Z_{13}^s\cup Z_{14}^s\cup Z_{23}^s\cup Z_{24}^s\cup Z_{34}^s.$$

Так как $Z_{14}^{ns} = Z_{24}^{ns} = Z_{34}^{ns} = \varnothing$, то

$$Z^s = Z_{12}^s \cup Z_{13}^s \cup Z_{23}^s = (4, 3, 1, 2) \cup (4, 2, 1, 3) \cup (4, 1, 3, 2) \cup (4, 1, 2, 3) ,$$

$$Z^{ns} = Z_{12}^{ns} \cup Z_{13}^{ns} \cup Z_{14}^{ns} \cup Z_{23}^{ns} \cup Z_{24}^{ns} \cup Z_{34}^{ns}.$$

Поскольку $Z_{12}^{ns} = Z_{13}^{ns} = Z_{14}^{ns} = Z_{24}^{ns} = \varnothing$ , то

$$Z^{ns} = Z_{23}^{ns} \cup Z_{34}^{ns} = (2, 4, 3, 1) \cup (1, 4, 3, 2) \cup (1, 4, 2, 3) \cup (1, 2, 4, 3) \cup (1, 3, 4, 2) .$$

Из множества $Z^s$ выбираем точку $x = (4, 2, 1, 3)$ , в которой целевая функция принимает максимальное значение $\max F(4, 2, 1, 3) = 46, 5$.

Поскольку $Z^{tr} = Z^s \cup Z^{ns}$ и $Z^{con} = P_n(A) \setminus Z^{tr}$, то множество опорных решений имеет вид $Z^{opr} = Z^{con} \cup x$ .

Упорядочим точки множества $Z^{opr}$ в лексикографическом порядке, тогда следующей после точки $x = (4, 2, 1, 3)$ будет точка $x = (4, 2, 3, 1)$ .

Точка $(4, 2, 3, 1)$ получена транспозицией элементов $x_3 \leftrightarrow x_4$ из точки $(4, 2, 1, 3)$:

$$\Delta f_{34} = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)(6x_2 - 8x_1 + x_3 + x_4) ,$$
$$\Delta f_{34}(4, 2, 3, 1) = \frac{1}{2}(3 - 21)(6 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 3 + 1) = -16.$$

Тогда $F_{34}^8 = F_{12}^2 + \Delta f_{34} = 46, 5 - 16 = 30, 5.$ Поскольку функция цели убывает и согласно лексикографического порядка не существует точек, значения которых больше $x = (4, 2, 1, 3)$, то точка $x = (4, 2, 1, 3)$ будет оптимальным решением.

Таким образом, получили $\max F(4, 2, 1, 3) = 46, 5$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача на множестве перестановок с квадратичной функцией цели и дополнительными линейными ограничениями. Предложен метод решения сформулированной задачи, который включает два этапа. На первом этапе алгоритма находится множество опорных решений. Составляется квадратичная функция для соответствующей транспозиции элементов множества перестановок и формируются задачи с дополнительными ограничениями. Количеством транспозиций множества перестановок элементов определяется число задач. В результате решения находится множество опорных решений, удовлетворяющих ограничениям основной задачи. Следует учитывать, что проверке подлежит лишь первая точки множества перестановок, а последующие точки проверяются с использованием формулы расчета приростов ограничений $\Delta g$ и целевой функции $\Delta f$. Множество опорных решений включает точку множества допустимых решений при рассмотрении транспозиции элементов, которая обеспечивает экстремальное значение квадратичной целевой функции, и все точки множества перестановок, которые не были рассмотрены в задачах вида (7).

На втором этапе осуществляется лексикографическое упорядочение множества опорных решений и проводится проверка только тех точек, которые больше экстремальной точки (при максимизации целевой квадратичной функции) или меньше экстремальной точки (при минимизации). В статье рассмотрен числовой пример реализации данного метода.

Дальнейшее исследование будет направлено на рассмотрение задач с другими видами целевых функций и на других комбинаторных множествах с увеличением их мощности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Gulianitsky L.F., Sergienko I.V. Meta-evolutionary method of deformed polyhedron in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 44, N 6. P. 70–79.
2. Донец Г.А., Сергиенко И.В. Метод моделирования структуры исходных данных и подклассы разрешаемых задач комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 1. С. 3–11.
3. Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems. *Journal of Global Optimization*. 2002. N 23. P. 1–41.
4. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ, 2011. 362 с.
5. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
6. Koliechkina L.N., Dvirna O.A. Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 4. P. 590–599.
7. Koliechkina L., Pichugina O. Multiobjective optimization on permutations with applications. destech transactions on computer science and engineering, 2018. P. 61–75. https://doi.org/10.12783/dtcse/optim2018/27922.
8. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: *Theory and Algorithms*. Heidelberg; New York: Springer, 2012. 660 p.
9. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.N. An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 3. P. 441–451.
10. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. Polyhedral-spherical configurations in discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol 51, N 1. P. 26–40.
11. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Optimization and Applications*. P. Pardalos, S. Butenco, V. Shilo (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 501–517.
12. Chase P. Transposition graphs. *SIAM Journal on Computing.* 1973. Vol. 2, N 2. P. 128–133. https://doi.org/10.1137/0202011.
13. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Berlin; New York: Springer, 2005. 315 p.
14. Ehrgott M., Gandibleux X. Multiobjective combinatorial optimization — theory, methodology, and applications. M. Ehrgott, X. Gandibleux (Eds.). *Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*. 2003. Vol. 52. P. 369–444. Springer US. https://doi.org/10.1007/0-306-48107-3_8.
15. Ganesan A. Automorphism group of the complete transposition graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*. 2015. Vol. 42, N 3. P. 793–801. https://doi.org/10.1007/s10801-015-0602-5.
16. Onwubolu G.C., Davendra D. Differential evolution: A handbook for global permutation–based combinatorial optimization. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 213 p.
17. Pardalos P.M., Du D., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer, 2013. 648 p.
18. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in $R^n$. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N 4. P. 561–567.
19. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М., Аристова Н.В. Элементы теории геометрического проектирования. Київ: Наук. думка, 1995. 241 с.
20. Пічугіна О.С. Метод побудови опуклих продовжень квадратних поліномів на комбінаторних множинах. *Вісник ЖДТУ. Технічні науки*. 2010. Т. 53, № 2. С. 141–150.
21. Semenova N.V., Kolechkina L.N. A polyhedral approach to solving multicriterion combinatorial optimization problems over sets of polyarrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 3. P. 438–445.

22. Koliechkina L., Nahirna A., Dvirna O. Quadratic optimization problem on permutation set with simulation of applied tasks. *Proceedings of the Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems* (CMIS-2019). Zaporizhzhia, Ukraine, April 15–19, 2019. P. 651–663 (CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353). URL: http://ceur-ws.org/Vol-2353/paper52.pdf.
23. Donets G.A., Kolechkina L.N. Method of ordering the values of a linear function on a set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 2, P. 204–213.
24. Donec G.A., Kolechkina L.M. Construction of Hamiltonian paths in graphs of permutation polyhedra. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 1. P. 7–13.
25. Koliechkina L.N., Dvernaya O.A., Nagornaya A.N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 620–626.
26. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
27. Burkard R.E. Quadratic assignment problems. P.M. Pardalos, D.-Z. Du, R.L Graham (Eds.). *Handbook of combinatorial optimization.* New York: Springer, 2013. P. 2741–2814. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1_22.

*Надійшла до редакції 25.10.2019*

## Г.П. Донець, Л.М. Колєчкіна, А.М. Нагірна

### МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З КВАДРАТИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА МНОЖИНІ ПЕРЕСТАНОВОК

**Анотація.** Розглянуто задачу на множині перестановок з квадратичною функцією цілі і додатковими лінійними обмеженнями. Запропоновано метод розв'язання сформульованої задачі, який складається з двох етапів. На першому етапі здійснюється знаходження множини опорних розв'язків. Складається квадратична функція для відповідної транспозиції і формуються підзадачі з додатковими обмеженнями. Для їхнього розв'язання знаходять множину опорних розв'язків, що задовольняє обмеження основної задачі. Другий етап полягає в знаходженні оптимального розв'язку з підмножини оптимальних роз'язків і множини допустимих розв'язків.

**Ключові слова:** умовна оптимізація, квадратична функція, множина перестановок, транспозиція елементів, приріст функції, приріст обмеження, множина допустимих розв'язків, множина опорних розв'язків, оптимальний розв'язок.

## G.P. Donets, L.M. Koliechkina, A.M. Nahirna

### A METHOD TO SOLVE THE CONDITIONAL OPTIMIZATION PROBLEM WITH A QUADRATIC OBJECTIVE FUNCTION ON THE SET OF PERMUTATIONS

**Abstract.** The problem with a quadratic objetive function and additional linear constraints is considered on the set of permutations. A solution method is proposed, which consists of two stages. At the first stage, the set of support solutions is found. A quadratic function is composed for the corresponding transposition and sub-problems are generated with additional constraints. A set of supporting solutions that satisfy the constraints of the main problem can be found in the course of their solution. The second stage is to find the optimal solution from the subset of optimal solutions and the set of feasible solutions.

**Keywords:** conditional optimization, quadratic function, set of permutations, transposition of elements, increase in function, increase in constraint, set of feasible solutions, set of support solutions, optimal solution.

**Донец Георгий Афанасьевич,**
доктор физ.-мат. наук, заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев.

**Колечкина Людмила Николаевна,**
доктор физ.-мат. наук, профессор Лодзинского университета, Польша,
e-mail: liudmyla.koliechkina@wmii.uni.lodz.pl; lkoliechkina@gmail.com

**Нагорная Алла Николаевна**,
доцент кафедры Национального университета «Киево-Могилянская академия», Киев,
e-mail: naghirnaalla@ukr.net.