УДК 519.21

С.М. КРАСНИТСКИЙ, А.А. КУРЧЕНКО

О ТЕОРЕМАХ БАКСТЕРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Аннотация. Построены подходящие семейства основных функций и доказаны теоремы бакстеровского типа для обобщенных гауссовских случайных процессов с независимыми значениями. Приведенные результаты позволяют разбить семейство таких процессам на классы, так что вероятностные меры, соответствующие процессам различных классов, сингулярны.

Ключевые слова: обобщенный случайный процесс, теоремы бакстеровского типа, сингулярность мер.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что использование обобщенных функций [1] и их стохастических аналогов (обобщенных случайных процессов и полей) существенно расширяет возможности адекватного описания различнх систем, например, при использовании для такого описания современной теории дифференциальных уравнений [2].

В данной работе рассматривается один класс стохастических обобщенных функций — обобщенные гауссовские случайные процессы с независимыми значениями. Такие процессы являются в некотором смысле аналогами обычных процессов с независимыми приращениями и важны, например, для теории стохастических дифференциальных уравнений [3]. Ряд свойств этих процессов описан в [3, 4]. Далее исследуется данный класс функций на наличие так называемого бакстеровского свойства.

Для обычных случайных процессов теоремы бакстеровского типа (теоремы Леви–Бакстера) — это утверждения о сходимости к детерминированной постоянной нормированных сумм нелинейных функций от приращений процесса на интервалах, образующих разбиение отрезка $[0, T]$. Такие суммы называются бакстеровскими. Часто в качестве упомянутых функций рассматриваются квадраты приращений. Утверждения данного типа относятся к области стохастического анализа. С другой стороны, они допускают естественные статистические интерпретации, позволяющие использовать соответствующие результаты для оценки (идентификации) параметров наблюдаемых процессов или полей [5]. Достаточные условия сходимости бакстеровских сумм для обычных случайных процессов и полей в течение полувека исследовали многие математики (отметим пионерские работы [6, 7]). Теоремы Леви–Бакстера для обобщенных случайных функций менее исследованы [8–10]. В настоящей статье изучается сходимость бакстеровских сумм для гауссовских обобщенных случайных процессов с независимыми значениями и постоянными коэффициентами в представлении ковариационного функционала [4, с. 355]. Результаты применены для разбиения на классы семейства таких процессов и условий сингулярности мер.

БАКСТЕРОВСКИЕ СУММЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть K — пространство действительных бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, определенных на действительной прямой R. Непрерывный линейный случайный функционал $\xi = (\xi, \varphi)$, $\varphi \in K$, в пространстве K называется обобщенным случайным процессом [4]. Далее рассматриваются действительные обобщенные случайные процессы. Для построения бакстеровских сумм для обобщенных случайных процессов используются двухпараметрические семейства функций пространства K вида

$$\{\chi_{t,h}\} = \{\chi_{t,h} \in K | \, t \in R, \, h \in (0,1), \operatorname{supp} \chi_{t,h} \subset [t, t+h]\}, \tag{1}$$

неубывающая неограниченная последовательность $(b(n))$ натуральных чисел и последовательность серий функций

$$\chi_{k,n} = \chi_{t,h}|_{t=k/b(n), h=1/b(n)}, \; k = 0,1,2,\ldots, b(n)-1, \; n \geq 1. \tag{2}$$

Бакстеровской суммой $S_n(\xi)$ для обобщенного случайного процесса ξ и семейства функций $\{\chi_{k,n}\}$ называется случайная величина

$$S_n(\xi) = \sum_{k=0}^{b(n)-1} (\xi, \chi_{k,n})^2. \tag{3}$$

Обобщенный случайный процесс ξ называется обобщенным случайным процессом бакстеровского типа (бакстеровским), если для некоторого семейства функций вида (2) последовательность случайных величин $S_n(\xi)$, $n \geq 1$, определенных равенством (3), сходится в том или ином смысле к детерминированной положительной постоянной: $S_n(\xi) \to c > 0$ при $n \to \infty$. Соответствующее семейство функций $\{\chi_{t,h}\}$ будем называть подходящим для обобщенного случайного процесса ξ.

Определение 1. Семейство функций (1) называется семейством типа $O_2(o_2)$, если для функций этого семейства

$$\int_t^{t+h} \chi_{t,h}^2(x)dx = h + o(h), \; h \to 0+ \left(\int_t^{t+h} \chi_{t,h}^2(x)dx = o(h), \; h \to 0+ \right)$$

равномерно относительно $t \in R$.

Пример 1. Семейство функций $\left\{ \rho_{t,h}: R \to [0,1] | \, t \in R, \; h \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\} \subset K$ таких, что для произвольных $t \in R$, $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ носитель $\operatorname{supp} \rho_{t,h} \subset [t, t+h]$ и $\rho_{t,h}(x) = 1$ на интервале $(t+h^2, t+h-h^2)$ имеет тип O_2.

Пример 2. Пусть функция $\varphi \in K$ с носителем на отрезке $[0,1]$ такая, что $\int_0^1 \varphi^2(y)dy = 1$. Для $t \in R$, $h \in (0,1)$ положим $\chi_{t,h}(x) = \varphi\left(\frac{x-t}{h}\right)$, $x \in R$. Это семейство функций имеет тип O_2. Действительно, для произвольных $t \in R$, $h \in (0,1)$ имеем

$$\int_t^{t+h} \chi_{t,h}^2(x)dx = \int_t^{t+h} \varphi^2\left(\frac{x-t}{h}\right)dx = h\int_0^1 \varphi^2(y)dy = h.$$

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Определение 2 [4]**.** Обобщенный случайный процесс $\xi = (\xi, \varphi)$, $\varphi \in K$, называется обобщенным случайным процессом с независимыми значениями, если для произвольных функций $\varphi, \psi \in K$ с носителями без общих внутренних точек случайные величины (ξ, φ), (ξ, ψ) независимы.

Теорема 1 [8, с. 355]**.** Ковариационный функционал $B(\varphi,\psi)$, $\varphi,\psi\in K$, для обобщенных случайных процессов с независимыми в каждой точке значениями задается формулой

$$B(\varphi,\psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j,k\ge 0}R_{jk}(x)\varphi^{(j)}(x)\psi^{(k)}(x)dx, \tag{4}$$

где лишь конечное число функций $R_{jk}(x)$ отлично от нуля на каждом конечном отрезке.

Замечание 1 [1, с. 356]**.** Для каждого положительно определенного билинейного функционала вида (4) существует гауссовский обобщенный случайный процесс с независимыми значениями, ковариационный функционал которого равен заданному.

Рассмотрим семейство всех гауссовских обобщенных случайных процессов с независимыми значениями и нулевыми средними, сужения которых на подпространство $K([0,1])=\{\varphi\in K|\operatorname{supp}\varphi\subset[0,1]\}$ пространства K имеют ковариационный функционал вида

$$B(\varphi,\psi)=\sum_{j,k\ge 0}b_{jk}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(j)}(x)\psi^{(k)}(x)dx,\ \varphi,\psi\in K([0,1]), \tag{5}$$

где $b_{jk}\in R$, а число ненулевых слагаемых конечно.

Лемма 1. Любой ковариационный функционал вида (5) можно представить в виде

$$B(\varphi,\psi)=\sum_{k=0}^{N}c_k\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(k)}(x)dx,\ \varphi,\psi\in K([0,1]), \tag{6}$$

где N — неотрицательное целое число, $c_k\in R$, $0\le k\le N$, $c_N\ne 0$.

Доказательство. Пусть ковариационный функционал имеет вид (5), т.е. существует неотрицательное целое число M такое, что

$$B(\varphi,\psi)=\sum_{j,k=0}^{M}b_{kj}\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx,\ \varphi,\psi\in K([0,1]).$$

Положим

$$A=\{(k,j)|0\le k,\ j\le M,\ j-k\ \text{четное}\},\ B=\{(k,j)\,|\,0\le k,\ j\le M,\ j-k\ \text{нечетное}\},$$

так что

$$B(\varphi,\psi)=\left(\sum_{(k,j)\in A}+\sum_{(k,j)\in B}\right)b_{kj}\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)\,dx,\ \varphi,\psi\in K([0,1]). \tag{7}$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_0^1\psi^{(k)}(x)\varphi^{(j)}(x)\,dx=\begin{cases}\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx, & (k,j)\in A,\\ -\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx, & (k,j)\in B.\end{cases}$$

Таким образом,

$$B(\psi,\varphi)=\left(\sum_{(k,j)\in A}-\sum_{(k,j)\in B}\right)b_{kj}\int\limits_0^1\varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx,\ \varphi,\psi\in K([0,1]). \tag{8}$$

Вследствие симметричности коварационного функционала, складывая равенства (7), (8), получаем:

$$2B(\varphi,\psi)=2\sum_{(k,j)\in A} b_{kj}\int_0^1 \varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx.$$

С помощью интегрирования по частям убеждаемся, что для $(k,j)\in A$

$$\int_0^1 \varphi^{(k)}(x)\psi^{(j)}(x)dx=\begin{cases}\int_0^1 \varphi^{(l)}(x)\psi^{(l)}(x)dx, & (k-j)/2 \text{ четное},\\ -\int_0^1 \varphi^{(l)}(x)\psi^{(l)}(x)dx, & (k-j)/2 \text{ нечетное},\end{cases}$$

где $l=\dfrac{k+j}{2}$.

Таким образом, $B(\varphi,\psi)=\sum_{l\ge 0} c_l \int_0^1 \varphi^{(l)}(x)\psi^{(l)}(x)dx$, где $c_l\in R$, а число слагаемых конечно. Для $N=\max\{l|\, l\ge 0, c_l\ne 0\}$ получаем (6).

Лемма доказана.

Замечание 2. Ковариационный функционал обобщенного случайного процесса $P(d/dt)\eta$, где η — белый шум, $P(d/dt)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, также приводится к виду (6).

СХОДИМОСТЬ БАКСТЕРОВСКИХ СУММ

Теорема 2 [9, следствие 2.2]. Пусть $\xi=(\xi,\varphi)$, $\varphi\in K$, — обобщенный гауссовский случайный процесс с независимыми значениями и нулевым математическим ожиданием, $\{\chi_{k,n}\}$ — последовательность серий функций вида (2), $S_n(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}(\xi,\chi_{k,n})^2$, $n\ge 1$, — последовательность бакстеровских сумм. Тогда для сходимости

$$S_n(\xi)-ES_n(\xi)\to 0 \qquad (9)$$

в среднем квадратическом при $n\to\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$v_n^{(0)}(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}(E(\xi,\chi_{k,n})^2)^2\to 0 \text{ при } n\to\infty. \qquad (10)$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(0)}(\xi)$ сходится, то в (9) имеет место сходимость почти наверное (п.н.).

Теорема 3. Пусть $\xi=(\xi,\varphi)$, $\varphi\in K$, — обобщенный гауссовский случайный процесс с независимыми значениями с нулевым математическим ожиданием и ковариационным функционалом (6), а двухпараметрическое семейство функций $\{\alpha_{t,h}\}$ вида (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) семейство функций $\{\alpha_{t,h}^{(N)}\}$ имеет тип O_2;

2) при $N\ge 1$ для любого $l\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ семейство функций $\{\alpha_{t,h}^{(l)}\}$ имеет тип o_2.

Тогда

$$S_n(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}(\xi,\alpha_{k,n})^2\to c_N \tag{11}$$

в среднем квадратическом при $n\to\infty$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b(n)}$ сходится, то в (11) имеет место сходимость п.н.

Доказательство. Так как ковариационный функционал имеет вид (6), то

$$E(\xi,\alpha_{k,n})^2=c_N\int_0^1(\alpha_{k,n}^{(N)}(x))^2\,dx+c_{N-1}\int_0^1(\alpha_{k,n}^{(N-1)}(x))^2\,dx+\ldots$$

$$\ldots+c_1\int_0^1(\alpha_{k,n}^{(1)}(x))^2\,dx+c_0\int_0^1(\alpha_{k,n}(x))^2\,dx=c_N\left(\frac{1}{b(n)}+o\left(\frac{1}{b(n)}\right)\right)+$$

$$+c_{N-1}o\left(\frac{1}{b(n)}\right)+\ldots+c_1\,o\left(\frac{1}{b(n)}\right)+c_0\,o\left(\frac{1}{b(n)}\right)=\frac{c_N}{b(n)}+o\left(\frac{1}{b(n)}\right),\ n\to\infty,$$

откуда следует, что

$$ES_n(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}E(\xi,\alpha_{k,n})^2=c_N\,(1+o(1))+o(1)\to c_N\ \text{ при }\ n\to\infty. \tag{12}$$

Далее,

$$v_n^{(0)}(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}(E(\xi,\alpha_{k,n})^2)^2=\sum_{k=0}^{b(n)-1}\left(\frac{c_N}{b(n)}+o\left(\frac{1}{b(n)}\right)\right)^2=$$

$$=b(n)\left(\frac{c_N}{b(n)}+o\left(\frac{1}{b(n)}\right)\right)^2=\frac{c_N^2}{b(n)}+o\left(\frac{1}{b(n)}\right)\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

Из соотношений (9), (10), (12) следует утверждение теоремы.

Пример 3. Пусть обобщенный гауссовский случайный процесс ξ удовлетворяет условиям теоремы 3, семейство функций $\{\chi_{t,h}\}$ определено в примере 2. Докажем, что семейство функций $\alpha_{t,h}=\frac{h^N}{d_N}\chi_{t,h}$, $t\in R$, $h>0$, где $d_N=\left(\int_0^1(\varphi^{(N)}(t))^2\,dt\right)^{1/2}$, удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 3. При $N=0$ выполнение этих условий следует из примера 2. Пусть $N\ge 1$. Имеем

$$\alpha_{t,h}^{(l)}(x)=\frac{h^{N-l}}{d_N}\varphi^{(l)}\left(\frac{x-t}{h}\right),\ x\in R,\ 0\le l\le N.$$

При $l=N$ получаем

$$\int_t^{t+h}(\alpha_{t,h}^{(N)}(x))^2\,dx=\frac{1}{d_N^2}\int_t^{t+h}\left(\varphi^{(N)}\left(\frac{x-t}{h}\right)\right)^2dx=\frac{h}{d_N^2}\int_0^1(\varphi^{(N)}(y))^2\,dy=h,$$

а при $0\le l\le N-1$ имеем

$$\int_t^{t+h} (\alpha_{t,h}^{(l)}(x))^2\, dx = \frac{h^{2(N-l)}}{d_N^2} \int_t^{t+h} \left(\varphi^{(l)}\left(\frac{x-t}{h} \right) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{h^{2(N-l)+1}}{d_N^2} \int_0^1 (\varphi^{(l)}(y))^2\, dy = o(h),\ \ h \to 0+.$$

В силу теоремы 3 семейство функций $\{\alpha_{t,h}\}$ является подходящим для обобщенного гауссовского случайного процесса ξ с нулевым математическим ожиданием и ковариационным функционалом (6). При этом выполняется соотношение (11).

Для построения подходящего семейства функций для обобщенного случайного процесса ξ в примере 2 существенен конкретный вид функций исходного семейства $\{\chi_{t,h}\}$. Покажем, каким образом можно строить подходящие семейства функций для обобщенного гауссовского процесса с ковариационным функционалом (6), исходя из произвольного семейства функций $\{\chi_{t,h}\}$ типа O_2.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ L, M

Определим преобразования L, M основных функций вида $\chi_{t,h}$ следующими равенствами:

$$(L\chi_{t,h})(x) = \chi_{t,h}(2x-t) - \chi_{t,h}(2x-(t+h)),\ \ x \in R, \tag{13}$$

$$(M\chi_{t,h})(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi_{t,h}(y)dy, x \in R. \tag{14}$$

Отметим такие свойства преобразований L, M.

1. Носитель $\operatorname{supp}(L\chi_{t,h}) \subset [t, t+h]$. График функции $L\chi_{t,h}$ центрально симметричен относительно точки $\left(t+\frac{h}{2}, 0 \right)$.

2. Носитель $\operatorname{supp}(ML\chi_{t,h}) \subset [t, t+h]$.

3. Формулы дифференцирования:

$$\frac{dM\chi_{t,h}}{dx}(x) = \chi_{t,h}(x),\ \ x \in R; \tag{15}$$

$$\frac{dL\chi_{t,h}}{dx}(x) = 2L\frac{d\chi_{t,h}}{dx}(x),\ \ x \in R. \tag{16}$$

Лемма 2. 1. Если семейство функций $\{\chi_{t,h}\}$ имеет тип O_2, то семейство функций $\{L\chi_{t,h}\}$ имеет тип O_2, а семейство функций $\{ML\chi_{t,h}\}$ имеет тип o_2.

2. Если семейство функций $\{\chi_{t,h}\}$ имеет тип o_2, то семейства функций $\{L\chi_{t,h}\}$, $\{ML\chi_{t,h}\}$ имеют тип o_2.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. В силу первого свойства преобразования L имеем

$$\int_t^{t+h} (L\chi_{t,h}(x))^2\, dx = 2\int_t^{t+\frac{h}{2}} \chi_{t,h}^2(2x-t)dx = \int_t^{t+h} \chi_{t,h}^2(y)dy = h + o(h),\ \ h \to 0+,$$

т.е. семейство функций $\{L\chi_{t,h}\}$ имеет тип O_2. Далее, используя равенства (13)–(16), имеем

$$\int_t^{t+h}(ML\chi_{t,h}(x))^2\,dx=\int_t^{t+h}\left(\int_{-\infty}^{x}(L\chi_{t,h})(y)dy\right)^2 dx=\int_t^{t+h}\left(2\int_t^{t+\frac{h}{2}}\chi_{t,h}(2y-t)dy\right)^2 dx=$$

$$=\int_t^{t+h}\left(\int_t^{t+h}\chi_{t,h}(s)ds\right)^2 dx=h\left(\int_t^{t+h}\chi_{t,h}(s)ds\right)^2\le$$

$$\le h^2\int_t^{t+h}\chi_{t,h}^2(s)ds=h^2(h+o(h))=o(h),\ \ h\to 0+,$$

откуда следует, что семейство функций $\{ML\chi_{t,h}\}$ имеет тип o_2.

Лемма доказана.

Лемма 3. Для всех неотрицательных целых чисел k, l таких, что $l\le k$, выполняется равенство

$$\frac{d^l}{dx^l}((ML)^k\chi_{t,h})=2^{\frac{l(l-1)}{2}}L^l(ML)^{k-l}\chi_{t,h}. \tag{17}$$

Доказательство. При $l=0$ и любом $k\ge 0$ утверждение тривиально. Далее считаем $l\ge 1$. Применим метод математической индукции по k. При $k=1$ имеем равенство $\frac{d}{dx}(ML\chi_{t,h})=L\chi_{t,h}$. Предположим, что равенство (17) выполнено для $k, l\in\{0,1,\dots,k\}$. Докажем равенство (17) для $k+1$ и всех $l\in\{1,\dots,k,k+1\}$. Имеем

$$\frac{d^l}{dx^l}((ML)^{k+1}\chi_{t,h})=\frac{d^l}{dx^l}(ML(ML)^k\chi_{t,h})=\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(L(ML)^k\chi_{t,h})=$$

$$=2^{l-1}L\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}((ML)^k\chi_{t,h}).$$

По предположению индукции последнее выражение имеет вид

$$2^{l-1}L2^{\frac{(l-1)(l-2)}{2}}L^{l-1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}((ML)^{k-(l-1)}\chi_{t,h})=2^{\frac{l(l-1)}{2}}L^l(ML)^{k+1-l}\chi_{t,h}.$$

Лемма доказана.

Пусть семейство функций $\{\chi_{t,h}\}$ имеет тип O_2. Для каждого $k\ge 0$ определим семейство функций

$$A_k=\left\{\alpha_{t,h;k}=2^{-\frac{k(k-1)}{2}}((ML)^k\chi_{t,h})\,|\,t\in R,\ h>0\right\}. \tag{18}$$

Заметим, что в силу леммы 3

$$\frac{d^k\alpha_{t,h;k}}{dx^k}=L^k\chi_{t,h},\ \ k\ge 0. \tag{19}$$

Теорема 4. Пусть $\xi=(\xi,\varphi)$, $\varphi\in K$, — обобщенный гауссовский случайный процесс с независимыми значениями с нулевым математическим ожиданием и ковариационным функционалом (6), двухпараметрическое семейство функций $A_N=\{\alpha_{t,h;N}\}$ определено равенством (18). Тогда

$$S_n(\xi)=\sum_{k=0}^{b(n)-1}(\xi,\alpha_{k,n;N})^2 \to c_N \qquad (20)$$

в среднем квадратическом при $n\to\infty$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b(n)}$ сходится, то в (20) имеет место сходимость с вероятностью единица.

Доказательство. Вследствие первого утверждения леммы 2 и равенства (19) для неотрицательных целых N семейство функций $\left\{\frac{d^N\alpha_{t,h;k}}{dx^N}\right\}$ имеет тип O_2, а при $N\ge 1$ для каждого $l\in\{0,\ldots,N-1\}$ семейство функций $\left\{\frac{d^l\alpha_{t,h;k}}{dx^l}\right\}$ имеет тип o_2. Таким образом, теорема 4 следует из теоремы 3.

СИНГУЛЯРНОСТЬ МЕР

Пусть N — неотрицательное целое число, $c_N>0$. Обозначим $G(N,c_N)$ класс всех гауссовских обобщенных случайных процессов с нулевым средним значением, сужения которых на отрезок $[0,1]$ имеют ковариационный функционал (6), в котором N, c_N фиксированы. Далее предполагается сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b(n)}$. Заметим, что при $(N,c_N)\neq(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$ классы $G(N,c_N)$ и $G(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$ не пересекаются.

Теорема 5. Пусть статистическая структура (Ω,σ,P_1,P_2) такова, что гауссовский обобщенный случайный процесс с независимыми значениями ξ принадлежит классу $G(N,c_N)$ относительно вероятностной меры P_1 и принадлежит классу $G(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$ относительно вероятностной меры P_2. Тогда при $(N,c_N)\neq(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$ вероятностные меры P_1,P_2 ортогональны.

Доказательство. Пусть $(N,c_N)\neq(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b(n)}$ сходится. Если $N\neq\widetilde{N}$, то предполагая $N<\widetilde{N}$, имеем

$$X_1=\left\{\omega\in\Omega \,\Big|\, \sum_{k=0}^{b(n)-1}(\xi,\alpha_{t,h,\widetilde{N}})^2\to 0,\quad n\to\infty\right\},$$

$$X_2=\left\{\omega\in\Omega \,\Big|\, \sum_{k=0}^{b(n)-1}(\xi,\alpha_{t,h,\widetilde{N}})^2\to c_{\widetilde{N}},\quad n\to\infty\right\}.$$

Тогда, как следует из теоремы 4 и доказательства теоремы 3, $P_1(X_1)=P_2(X_2)=1$. Но $X_1\cap X_2=\varnothing$. Сингулярность доказана. Аналогично рассматривается случай $N=\widetilde{N}$, $c_N\neq c_{\widetilde{N}}$.

Замечание 3. При выполнении равенства $(N,c_N)=(\widetilde{N},c_{\widetilde{N}})$ меры P_1 и P_2 эквивалентны на σ-алгебре, порожденной величинами $\xi(\varphi)$, $\varphi\in K([0,1])$ [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены семейства подходящих функций и доказаны теоремы бакстеровского типа для гауссовских обобщенных случайных процессов с независимыми значениями и нулевым математическим ожиданием, что позволило разбить такое семейство функций на континуальное множество попарно непересекающихся классов. Вероятностные меры, соответствующие представителям разных классов, ортогональны, а представителям одного класса — эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 470 с.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Москва: Мир, 1986. Т. 1. 462 с., Т. 2. 454 с., Т. 3. 694 с., Т. 4. 444 с.
3. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. Москва: Наука, 1995. 256 с.
4. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Москва: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1961. 471 с.
5. Козаченко Ю.В., Курченко О.О., Синявська О.О. Теореми Леві–Бакстера для випадкових полів та їх застосування. Ужгород: Аутдор-Шарк, 2018. 226 с.
6. Levy P. Le mouvement Brownian plan. *Amer. J. Math*. 1940. Vol. 62. P. 487–550.
7. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc*. 1956. Vol. 7, N 3. P. 522–527.
8. Горяинов В.Б. О теоремах типа Леви–Бакстера для стохастических эллиптических уравнений. *Теория вероятн. и ее примен*. 1988. Т. 33, вып. 1. С. 176–179.
9. Krasnitskiy S.M., Kurchenko O.O. Baxter type theorems for generalized random Gaussian processes. *Theory of Stoch. Proc*. 2016. Vol. 21(37), N 1. P. 45–52.
10. Krasnitskiy S., Kurchenko O. On Baxter type theorems for generalized random Gaussian fields. Stochastic Processes and Applications. SPAS 2017. *Springer Proceeding in Mathematics & Statistics*. Silvestrov S., Malyarenko A., Rancic M. (Eds.). Cham: Springer, 2018. Vol. 271. P. 91–103. https://doi.org/10.1007/978-3-030-02825-1_4.
11. Краснитский С.М. О необходимых и достаточных условиях эквивалентности вероятностных мер, отвечающих однородным случайным полям, обладающим спектральными плотностями. *Кибернетика и системный анализ.* 1997. № 5. С. 37–44.

Надійшла до редакції 21.02.2019

С.М. Краснитський, О.О. Курченко

ПРО ТЕОРЕМИ БАКСТЕРІВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАУССІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ

Анотація. Побудовано підхожі сім'ї основних функцій і доведено теореми бакстерівського типу для узагальнених гауссівських випадкових процесів з незалежними значеннями. Ці теореми застосовано для розбиття на класи сім'ї таких процесів. Доведено сингулярність ймовірнісних мір, що відповідають процесам різних класів.

Ключові слова: узагальнений випадковий процес, теореми бакстерівського типу, сингулярність ймовірнісних мір.

S.M. Krasnitskiy, O.O. Kurchenko

ON BAXTER TYPE THEOREMS FOR GENERALIZED RANDOM GAUSSIAN PROCESSES WITH INDEPENDENT VALUES

Abstract. We construct suitable families of basic functions and prove theorems of Baxter type for generalized Gaussian random processes with independent values. These theorems are used to divide families of such processes into classes. The singularity of probability measures corresponding to representatives of different classes is proved.

Keywords: generalized random process, theorems of Baxter type, singularity of probability measures.

Краснитский Сергей Михайлович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета технологий и дизайна, e-mail: krasnits.sm@ukr.net.

Курченко Александр Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: olkurchenko@ukr.net.