Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2009

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 530.3+550.344

Є. М. Бицань

Деякі особливості узагальненого реологічного тіла

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Проаналізовано структуру узагальненого реологічного тіла (РТ) з довільним числом елементів. Сформульовано умови невиродженості РТ. Показано, що РТ певного рангу поділяються на два типи — квазіпружні та квазів'язкі, кожен з яких має два роди залежно від того, чи має коефіцієнт при деформації в реологічному рівнянні адитивну константу, чи ні.

Коливальні процеси в фізичних середовищах затухаючі, тому що останні є непружними та досліджуються за допомогою математичних моделей в'язкопружних деформованих середовищ. У повідомленні розглядаються реологічні тіла (РТ), які складаються з пружних (ПЕ) та в'язких (ВЕ) елементів, з'єднаних між собою паралельно або послідовно в різних комбінаціях. Зв'язок між напругою і деформацією встановлюється за допомогою реологічного рівняння (РР), яке є певним узагальненням закону Гука і записується в узагальненому вигляді

$$P\sigma = Q\varepsilon, \tag{1}$$

де $P = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i D^i$ і $Q = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i D^i$ — лінійні диференціальні вирази (ЛДВ) з постійними коефіцієнтами, $D = \partial/\partial t$; σ — напруга; ε — деформація.

Розглянемо з'єднання двох РТ, РР яких запишемо так:

$$P_1\sigma_1 = Q_1\varepsilon_1, \qquad P_2\sigma_2 = Q_2\varepsilon_2. \tag{2}$$

При паралельному з'єднанні цих тіл деформації і напруги будуть задовольняти РР

$$P_1P_2\sigma = (P_1Q_2 + P_2Q_1)\varepsilon, \tag{3}$$

а при послідовному з'єднанні — РР

$$(P_1Q_2 + P_2Q_1)\sigma = Q_1Q_2\varepsilon. \tag{4}$$

Рівняння (3), (4) є основою для дослідження властивостей РТ з довільним числом елементів. За допомогою цих рівнянь можна проаналізувати процес утворення нових РТ та виявити їхні особливості.

Структура РТ визначається характером їхніх РР: порядками лінійних диференціальних виразів (ЛДВ) P й Q та особливістю ЛДВ P й Q. Ці характеристики залежать від кількості елементів і з'єднань певних типів та від співвідношення між ними. Проаналізуємо РТ, які вивчає реологія. Випишемо в табл. 1 інформацію про них, додавши для симетрії ще п'ятиелементні РТ.

Аналізуючи таблицю, можна відзначити, що РТ рангу $k = 1, 2$ відповідають чотири різні типи їхніх РР, які поділяють РТ певного рангу залежно від порядку коефіцієнтів РР на два типи: квазіпружні (порядки коефіцієнтів при напрузі і деформації однакові) та квазів'язкі (порядки коефіцієнтів при напрузі на одиницю менші за порядок коефіцієнта при деформації), кожен з них поділяється на два роди залежно від того, чи має ЛДВ Q у РР адитивну константу (АК), чи ні.

Переконаємось, що вказані особливості РТ мають місце для РТ з довільним рангом. Для цього доведемо методом математичної індукції теорему:

Теорема 1. *Для кожного натурального числа n існують чотири різних РР РТ рангу n, за допомогою яких останні поділяються на два типи — квазіпружні та квазів'язкі, кожен з яких має два роди залежно від того, чи має ЛДВ Q у РР АК, чи ні. РР для РТ з цих сукупностей мають такий вигляд:*

$$
\begin{aligned}
&(1 + a_1 D + \cdots + a_{\cdot-1} D^{\cdot-1})\sigma = \mathrm{H}_n^R D(1 + b_1 D + \cdots + b_{n-1} D^{n-1})\varepsilon \qquad (N_{2n-1}),\\
&(1 + a_1 D + \cdots + a_{\cdot} D^{\cdot})\sigma = \mathrm{H}_n^R D(1 + b_1 D + \cdots + b_{n-1} D^{n-1})\varepsilon \qquad (H_{2n}),\\
&(1 + a_1 D + \cdots + a_{\cdot-1} D^{\cdot-1})\sigma = E_n^R (1 + b_1 D + \cdots + b_{\cdot} D^{\cdot})\varepsilon \qquad (N_{2n}),\\
&(1 + a_1 D + \cdots + a_{\cdot} D^{\cdot})\sigma = E_n^R (1 + b_1 D + \cdots + b_{\cdot} D^{\cdot})\varepsilon \qquad (H_{2n+1}).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

РТ: N — квазів'язкі, H — квазіпружні; їх нижній індекс означає число елементів у цих РТ, а n — їхній ранг.

1. Твердження правдиве при $n = 1$ — це дві сукупності КПРТ — ВЕ і РТ Фойгта. У перших РР у коефіцієнті при деформації відсутня АК, але є в РТ Фойгта, їхні РР записуються в стандартній формі як N_1, N_2, і дві сукупності КВРТ — тіла Максвелла, в РР яких коефіцієнт при деформації без АК та РТ Кельвіна та Пойнтінга–Томпсона, в РР яких коефіцієнт при деформації має АК, а їхні РР записуються в стандартній формі як H_2 й H_3 відповідно.

2. Якщо при $n = k$ маємо чотири різних за структурою РР для РТ рангу k, які в стандартній формі запишуться, згідно з системою (5) при $n = k$, і за їхньою допомогою РТ k-го рангу поділяються на чотири сукупності: $R_1^{(k)} = \{N_{2k-1}\}$, $R_2^{(k)} = \{H_{2k}\}$, $R_3^{(k)} = \{N_{2k}\}$, $R_4^{(k)} = \{H_{2k+1}\}$, то при $n = k + 1$, згідно з системою (5), матимемо чотири різних за структурою РР для РТ рангу $k + 1$, РР, які утворюються за допомогою формул (3), (4) таким чином:

$$
N_{2k+1} = N|H_{2k}, \quad H_{2(k+1)} = N - H_{2k+1}, \quad N_{2(k+1)} = N|H_{2k+1}, \quad H_{2k+3} = H|N_{2(k+1)} \tag{6}
$$

і які поділяють РР $k + 1$-го рангу на чотири сукупності РТ: $R_1^{(k+1)} = \{N_{2k+1}\}$, $R_2^{(k+1)} = \{H_{2(k+1)}\}$, $R_3^{(k+1)} = \{N_{2(k+1)}\}$, $R_4^{(k+1)} = \{H_{2k+3}\}$.

Такий розподіл РТ можна покласти в основу класифікації РТ: тип тіла — КПРТ або КВРТ, і рід I — з АК та II — без АК у коефіцієнті при деформації.

Форму запису РР, згідно з формулами (5), назвемо стандартною (зведеною). Кожна з стандартних форм запису РР РТ, число елементів в яких більше двох, має кілька невироджених реалізацій, що утворюють клас механічно (реологічно) еквівалентних реологічних

Таблиця 1

Число елементів	У тому числі		δ_e	Ранг	АК	Ім'я	Кількість з'єднань	У тому числі		δ_c	Число реалізацій	δ	P	Q	Тип	Рід
	пружних	в'язких						парал.	послід.							
1	1	0	1	0	+	H	0	0	0	0	1	1	1	E	КП	I
1	0	1	1	1	−	N	0	0	0	0	1	1	1	$D\eta$	КВ	II
2	1	1	0	1	−	M	1	0	1	1	1	1	$1{+}D\tau$	$D\eta$	КП	II
2	1	1	0	1	+	V	1	1	0	1	1	1	1	$E(1+D\tau)$	КВ	I
3	2	1	1	1	+	K, PT	2	1	1	0	2	1	$1+D\tau$	$E(1+D\tau)$	КП	I
3	1	2	1	2	−	L, J	2	1	1	0	2	1	$1+D\tau$	$\eta D(1+D\tau)$	КВ	II
4	2	2	0	2	−	Bu	3	2	2	1	4	1	$\sum\limits_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D(1+D\tau)$	КП	II
4	2	2	0	2	+	A	3	2	1	1	4	1	$1+D\tau$	$E\sum\limits_{k=0}^{2} b_k D^k$	КВ	I
5	3	2	1	2	+		4	2	2	0	8	1	$\sum\limits_{k=0}^{2} a_k D^k$	$E\sum\limits_{k=0}^{2} b_k D^k$	КП	I
5	2	3	1	3	−		4	2	2	0	8	1	$\sum\limits_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D\sum\limits_{k=0}^{2} b_k D^k$	КВ	II

П р и м і т к а . Список РТ (реологічне древо): n_H — число пружних, а n_N — число ВЕ, $\delta_e = |n_N - n_H|$; n_I й n_- — кількість паралельних й послідовних приєднань у РТ відповідно; $\delta_c = |n_I - n_-|$; E й η — релаксуючі пружні й в'язкі модулі; $\delta = \delta_e + \delta_c$ — баланс РТ; τ — час релаксації напруги при постійній деформації; ν — час релаксації деформації при постійній напрузі.

тіл. Механічно еквівалентними, або подібними РТ, назвемо РТ, РР яких відрізняються величиною коефіцієнтів. Якщо ж коефіцієнти РР однакові за величиною, то такі РТ назвемо реологічно еквівалентними, тому що в цьому випадку збігаються їхні реологічні параметри — часи релаксацій і часи післядії.

Виникає питання: чим відрізняються вироджені приєднання від невироджених. Виявляється, що воно пов'язане з різницею між числом пружних і в'язких елементів $\delta_e = |n_N - n_H|$ та різницею між кількістю паралельних і послідовних включень $\delta_n = |n_I - n_-|$. Назвемо балансом приєднання суму різниць $\delta = \delta_e + \delta_c$. Якщо підрахувати баланс для РТ, які застосовуються в реології, то виявиться, що для них він дорівнює одиниці:

$$\delta_e + \delta_c = 1. \tag{7}$$

Такі тіла назвемо збалансованими. Виясними роль балансу при побудові РТ. Приєднання певного елемента до РТ назвемо виродженим, якщо в результаті об'єднання отримаємо РТ, РР якого відрізняються лише величиною коефіцієнтів, тобто новоутворене РТ є механічно еквівалентним базовому [1–4].

Приєднаємо ПЕ до РТ k-го рангу та побачимо, що ми маємо чотири вироджених і чотири невироджених випадки. Зауважимо, що характерною особливістю приєднання ПЕ до РТ є те, що в результаті приєднання ранг нового РТ не змінюється, причому при паралельному приєднанні тип РТ зберігається, а рід змінюється, а при послідовному з'єднанні навпаки — тип РТ змінюється, а рід залишається без змін.

Далі розглянемо приєднання ВЕ до всіх чотирьох варіантів збалансованих РТ k-го рангу та побачимо, що в підсумку матимемо по чотири вироджених і невироджених випадки, причому невироджені випадки задовольняють умові (7), звідки робимо висновок, що невироджене приєднання ВЕ до РТ підвищує його ранг, причому послідовне приєднання зберігає тип базового РТ, змінюючи рід, а паралельне зберігає рід РТ і змінює його тип. Підсумовуючи наведене можна говорити, що приєднання одиночного реологічного елемента до збалансованого РТ буде невиродженим у випадку, коли воно виконується з дотриманням умови балансу [5].

Розглянемо далі об'єднання окремих РТ. Будемо вважати, що РТ — доданки є невиродженими (поліноми P_i й Q_i не мають спільних коренів) і ЛДВ обох доданків P при паралельному і Q при послідовному об'єднанні не мають спільних коренів. Всього налічується двадцять різних варіантів, з них половина буде виродженими і половина невиродженими.

Випишемо окремо невироджені випадки:

$$\begin{aligned}
&N_{2k-1}|H_{2l} = H_{2(k+l)-1}, N_{2k-1} - N_{2l} = N_{2(k+l)-1}, \qquad N_{2k-1}|H_{2l+1} = N_{2(k+l)},\\
&N_{2k-1} - H_{2l+1} = H_{2(k+l)}, \qquad H_{2k}|H_{2l} = H_{2(k+l)}, \qquad N_{2k}|H_{2l} = N_{2(k+l)},\\
&H_{2k} - N_{2l} = H_{2(k+l)}, \qquad H_{2k}|H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1}, \qquad N_{2k} - N_{2l} = N_{2(k+l)},\\
&N_{2k} - H_{2l+1} = H_{2(k+l)+1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Характерною особливістю невироджених об'єднань є те, що вони виконується з дотриманням умови балансу (7). Таким чином, дотримання балансу (7) при об'єднанні двох невироджених РТ є достатньою умовою невиродженості результуючого РТ.

З формул (8) випливає, що при паралельному з'єднанні КПРТ і КВРТ сумарне РТ є КВРТ, а якщо один з доданків має АК при деформації, а інший — ні, то результуюче РТ матиме АК при деформації. При послідовному з'єднанні КПРТ і КВРТ матимемо дзеркальне відбиття — сумарне РТ буде КПРТ, а коефіцієнт при деформації буде без АК, якщо хоча б один з РТ доданків не матиме її.

Систему (5) можна зобразити в іншій формі через часи релаксацій. ЛДВ P й Q є поліномами від параметра D, і їх можна розкласти на множники і представити в такому вигляді:

$$P_k = \prod_{i=1}^{k-l}(D - \mu_i), \qquad Q_k = D^j M_R \prod_{i=1}^{k-j}(D - \lambda_i), \tag{9}$$

де $j = 0$, коли ЛДВ Q має АК, і $j = 1$ у протилежному випадку; $l = 1$ у випадку, коли РТ є квазів'язким, і $l = 0$, коли РТ буде квазіпружним, λ_i й μ_i — корені характеристичних поліномів Q й P відповідно, які виражаються через часи релаксацій: $\lambda_i = -\tau_i^{-1}$, $\mu_i = -\nu_i^{-1}$, де τ_i — часи релаксації напруг при постійній деформації, а ν_i — часи релаксації деформацій при постійній напрузі, M_R — релаксуючий модуль.

Виразимо далі корені характеристичних поліномів через часи релаксацій та прийдемо в підсумку до такої форми запису РР системи (5) через часи релаксацій:

$$\begin{aligned}
&a_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D + \mu_i)\sigma = \eta_k^R D b_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D + \lambda_i)\varepsilon \qquad (N_{2k-1}),\\
&a_k\prod_{i=1}^{k}(D + \mu_i)\sigma = \eta_k^R D b_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D + \lambda_i)\varepsilon \qquad (H_{2k}),\\
&a_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D + \mu_i)\sigma = E_k^R b_k\prod_{i=1}^{k}(D + \lambda_i)\varepsilon \qquad (N_{2k}),\\
&a_k\prod_{i=1}^{k}(D + \mu_i)\sigma = E_k^R b_k\prod_{i=1}^{k}(D + \lambda_i)\varepsilon \qquad (H_{2k+1}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Представлення РТ у формі (10) порівняємо з розбиттям РТ за Блендом [6]:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n+1}(D + \mu_i)\sigma = E\prod_{j=1}^{N}(D + \lambda_j)D\varepsilon \qquad (B_1),\\
&\prod_{i=1}^{n}(D + \mu_i)\sigma = E\prod_{j=1}^{N}(D + \lambda_j)\varepsilon \qquad (B_2),\\
&\prod_{i=1}^{n}(D + \mu_i)\sigma = \eta'\prod_{j=1}^{N}(D + \lambda_j)D\varepsilon \qquad (B_3),\\
&\prod_{i=1}^{n-1}(D + \mu_i)\sigma = \eta'\prod_{j=1}^{N}(D + \lambda_j)\varepsilon \qquad (B_4),
\end{aligned} \tag{11}$$

де n — число нормальних координат, за допомогою яких описується деформація в РТ.

Зауважимо, що в формулі B_4 (формула (85) на с. 62 у [6]) показники над добутками треба взяти на одиницю менше.

Таке представлення певним чином пов'язується з стандартною формою РТ k-го рангу (5): $B_1 \backsim H_{2k}$, $\backsim H_{2k+1}$, $B_3 \backsim N_{2k-1}$, $B_4 \backsim N_{2k}$.

Знайдемо зв'язок між кількістю нормальних координат у РТ N і його рангом k, а також між релаксуючими модулями E_k^R й η_k^R та параметрами η' й E, враховуючи, що за теоремою Вієта: $1/a_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\mu_i = \prod\limits_{i=1}^{n}\tau_i^{-1}$ і $1/b_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\lambda_i = \prod\limits_{i=1}^{n}\nu_i^{-1}$. Система рівнянь (10) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{k-1}\tau_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_i)\sigma = \eta_k^R D\prod_{i=1}^{k-1}\nu_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon \qquad (N_{2k-1}),\\
&\prod_{i=1}^{k}\tau_i\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_i)\sigma = \eta_k^R D\prod_{i=1}^{k-1}\nu_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon \qquad (H_{2k}),\\
&\prod_{i=1}^{k-1}\tau_i\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_i)\sigma = E_k^R\prod_{i=1}^{k}\nu_i\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_i)\varepsilon \qquad (N_{2k}),\\
&\prod_{i=1}^{k}\tau_i\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_i)\sigma = E_k^R\prod_{i=1}^{k}\nu_i\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_i)\varepsilon \qquad (H_{2k+1}),
\end{aligned} \tag{12}$$

звідки, порівнюючи системи (10) і (11), знаходимо, що $k = N + 1$ для перших двох рівнянь систем (10), і $k = N$ для інших.

Прив'язка до нормальних координат не дозволяє впорядкувати РТ за рангом. Для того, щоб досягти відповідності між представленням РР у формі (10) й (11), треба для випадків (коли в виразі для деформації (12) константа $\eta^{-1} = 0$) збільшити на одиницю число нормальних координат. Ще треба зауважити, що використання нормальних координат пов'язане із значними математичними труднощами, чого позбавлений пропонований метод розбиття РТ на класи і побудови РТ високого рангу. Використання пропонованого алгоритму дозволяє отримати РТ високого рангу і позбавитись виродження за допомогою рівняння балансу (9).

1. *Зинер К. М.* Упругость и неупругость металлов. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – 396 с.
2. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
3. *Постников В. С.* Внутреннее трение в металлах. – Москва: Металлургия, 1974. – 352 с.
4. *Рейнер М.* Реология. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
5. *Савін Г. М., Рущицький Я. Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища шк., 1975. – 252 с.
6. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. – Москва: Мир, 1965. – 200 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 08.04.2009

E. M. Bytsan'

Some peculiarities of a generalized rheological body

The structure of rheological bodies with arbitrary number of elements is analyzed. Conditions for the nonsingularity of rheological bodies are formulated. It is shown that the rheological bodies of a certain class are subdivided into two types — quasielastic and quasiviscous, each one of them having two kinds dependent on whether the coefficient of deformation in the rheological equation has or has not an additive constant.