

УДК 532:539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУНЕЯВНОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА-КОШИ-АБАРБАНЕЛЯ И ЦВАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

инж. Смирнов А.П. (Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, г. Николаев)

У роботі приведено чисельний метод, заснований на комбінації методів Ейлера-Коши і Абарбанеля і Цваса, для вирішення нестационарних рівнянь газової динаміки. Проведено його тестування шляхом виконання розрахунку різних задач для випадку ідеальної і в'язкої рідини. Результати тестування показали, що метод разом з відносно простим алгоритмом рішення володіє хорошою стійкістю, що говорить про доцільність його використання для вирішення задач з області газової динаміки.

APPLICATION OF THE EULER-COSHY-ABARBANEL AND SCHWASS IMPLICIT NUMERICAL METHOD FOR SOLUTION OF NONSTATIONARY EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

Smirnov A.P.

A numerical method based on combination of the Euler-Coshy, Abarbanel, and Schwass methods is presented for the solution of nonstationary equations of gas dynamics. The method was tested by solving various problems for the cases of ideal or viscous fluids. Results of testing had shown that the method is very stable and has a simple solution algorithm, which makes it useful for solution of problems in the field of gas dynamics.

Введение.

В процессе эксплуатации добывающих скважин производительность их постепенно снижается. Это связано с появлением в призабойной зоне и на фильтре скважины различного рода отложений, что уменьшает их проницаемость. Для повышения производительности применяется электроразрядная технология, при которой высоковольтный разряд в жидкости является источником акустических импульсов, воздействующих на призабойную зону скважины. Для реализации этой технологии применяются электроразрядные скважинные устройства.

При рассмотрении вопросов, связанных с очисткой поверхности (будь-то кольматация пор призабойной зоны в скважине или загрязнение внутренней поверхности трубы от накопившихся на ней различного рода отложений) с помощью создания волны давления в жидкости, нас в первую очередь интересует не поведение ядра потока жидкости, а характеристики жидкости в пограничном слое (слое жидкости, расположенном около загрязненной поверхности). Подробно рассмотрев этот слой, исследовав процессы происходящие в нем, возникающие напряжения и их влияние на

отрыв частиц загрязняющего слоя, можно будет выдвинуть рекомендации по выбору характеристик падающей волны давления для более эффективной декольматации или очистки.

Решение данного рода задач возможно с условием использования численных методов расчета. Все методы, которые можно использовать при решении задач подобного рода, можно разбить на две большие группы: явные и неявные [1, 2]. Явные методы позволяют определить искомый параметр на следующем временном слое, используя данные предыдущего временного слоя. В неявных методах для определения искомого параметра помимо данных с предыдущих временных слоев необходимы и значения с определяемого слоя. Из всего вышесказанного видно, что явные методы имеют более простой алгоритм, и их решение с применением вычислительной техники есть менее трудоемкий процесс. Их недостатком является условная устойчивость. Неявные методы более устойчивы, в то же время их алгоритм решения и схема – сложнее. В данной работе представлена схема полунявного метода, которая представляет собой компромисс между явными и неявными схемами.

Метод решения.

В качестве метода решения был принят метод предиктор – корректор – корректор (Метод Эйлера-Коши с уточнением по методу Абарбанеля и Цваса).

Схема данного метода состоит из трех шагов: 1 – 2 шаг - метод Эйлера-Коши; 3 шаг - уточнение по методу Абарбанеля и Цваса [3].

На первом шаге определяется начальное приближение решения по методу Эйлера, для уравнений типа $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$, используя полученные из уравнений (1) разностные схемы:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i(x_i, y_i). \quad (1)$$

Второй шаг: исходя из результата полученного на первом шаге, находится:

$$\ddot{y}_{i+1} = y_i + h \frac{f_i(x_i, y_i) + \tilde{f}_{i+1}(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}. \quad (2)$$

Третий шаг: находится окончательное решение, исходя из результата на 2-ом шаге, при использовании метода Абарбанеля и Цваса

$$y_{i+1} = y_i + h\ddot{f}_{i+1}(x_{i+1}, \ddot{y}_{i+1}). \quad (3)$$

Для случая невязкой жидкости устойчивость схемы определяется, исходя из уравнения:

$$dt = \min(k_z \frac{\Delta x}{\sqrt{2}(|u| + c)}; k_z \frac{\Delta y}{\sqrt{2}(|v| + c)}), \quad (4)$$

где Δx и Δy - шаг по оси x и оси y соответственно; k_z - коэффициент запаса.

Устойчивость схемы для вязкой жидкости определяется согласно следующему выражению [2]:

$$dt \leq \frac{k_z (\Delta t)_{\text{Курант}}}{1 + \frac{2}{\text{Re}_\Delta}}, \quad (5)$$

где $(\Delta t)_{\text{Курант}} \leq \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \right)^{-1}$ - критерий Куранта

Фридрихса-Леви для невязкой жидкости;

$\text{Re}_\Delta = \min(\text{Re}_{\Delta x}, \text{Re}_{\Delta y}, \text{Re}_{\Delta z})$ - минимальное сеточное число Рейнольдса, и

$$\text{Re}_{\Delta x} = \frac{\rho |u + a_c| \Delta x}{\mu}, \quad \text{Re}_{\Delta y} = \frac{\rho |v + a_c| \Delta y}{\mu}, \quad \text{Re}_{\Delta z} = \frac{\rho |w + a_c| \Delta z}{\mu},$$

$a_c = 0,001c$; c - скорость звука в среде.

Основные уравнения.

В данной работе выполнено тестирование представленного метода на основании решения уравнений Навье-Стокса для двумерного случая [1]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + \dot{Q}_x \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + \dot{Q}_y \end{bmatrix};$$

напряжение в уравнениях импульса:

$$\tau_{xx} = 2(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_T)D - \frac{2}{3}\rho k^{te};$$

$$\tau_{yy} = 2(\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_T)D - \frac{2}{3}\rho k^{te};$$

$$\tau_{xy} = (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

Уравнение состояния

$$E = \rho[\varepsilon + (u^2 + v^2)/2], \quad (7)$$

где ε - удельная внутренняя энергия,

$$\varepsilon = [p - c_0^2(\rho - \rho_0)]/[\rho(\kappa - 1)].$$

Результаты тестирования для невязкой жидкости.

Для невязкой (идеальной жидкости) принималось условие, что коэффициент динамической вязкости μ в системе уравнений (6) равен 0, потоки тепла отсутствуют. Граничные условия ставились на внутренней и внешней границах расчетной области.

На внутренней границе расчетной области параметры определялись, исходя из:

$$P = P_g, \quad (8)$$

$$\left(\frac{P}{\rho_0}\right)^k = \left(\frac{P_g + B}{\rho_0 + B}\right), \quad (9)$$

где P_g - амплитуда волны давления; $B=304,5$ МПа.

На внешних границах расчетной области должно соблюдаться условие:

$$v_n = 0, \quad (10)$$

где v_n - нормальная составляющая вектора скорости жидкости.

Расчеты проведены для режима двумерного случая распространения волны давления в пространстве размером 1м на 1м, заполненного невязкой жидкостью. Расчетная схема приведена на рис.1. Расчетные условия: начальное давление - $P_0=100000$ Па; амплитуда волны давления - $P_g=10^7$ Па; профиль волны давления - ступенька; распространение волны вдоль оси X. Для решения использовался пакет программирования Borland Delphi 6.

Было выполнено решение системы уравнений по методу Эйлера-Коши (результаты показаны на рис. 2) и по методу Эйлера-Коши с уточнением результатов по методу Абарбанеля и Цваса (результаты показаны на рис. 3) с жесткой, противоположной входной, границей. Коэффициент запаса k_z для первого случая был равен 0,5, для второго - 0,95. Как видно из полученных результатов, уточнение по методу Абарбанеля убирает нефизические колебания и повышает устойчивость схемы.

Также решались тестовые задачи при разных граничных условиях: противоположная входной граница - свободная; распространение волны давления вдоль оси Y, профиль волны давления П-образный. Амплитуда волны давления для каждого случая рассматривалась в интервале от $2 \cdot 10^5$ Па до $900 \cdot 10^6$ Па. Результаты расчета были удовлетворительными.

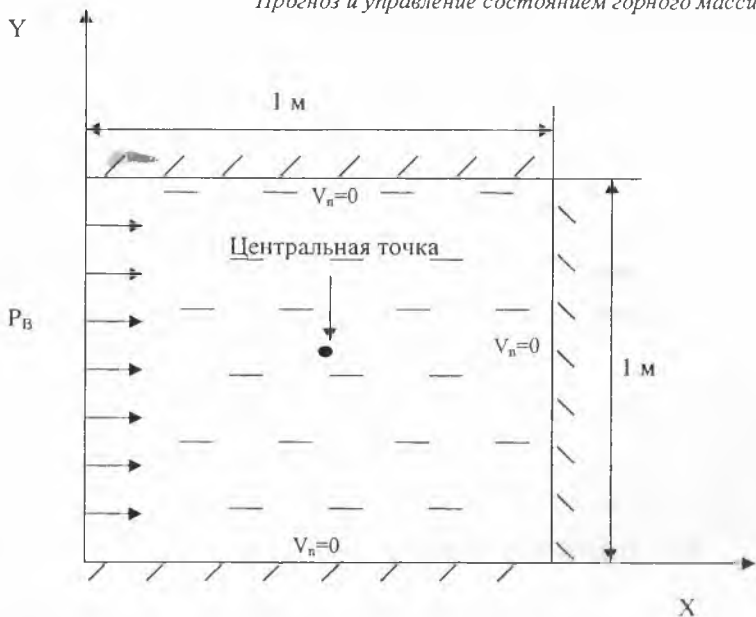


Рис. 1. Расчетная схема для случая идеальной жидкости.

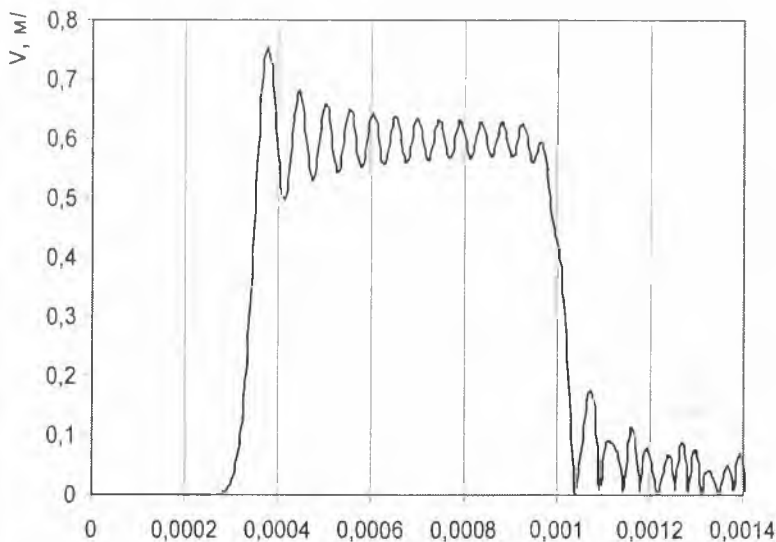


Рис. 2. Скорость движения жидкости: решение по методу Эйлера-Коши, противоположная граница – жесткая, профиль волны – ступенька.

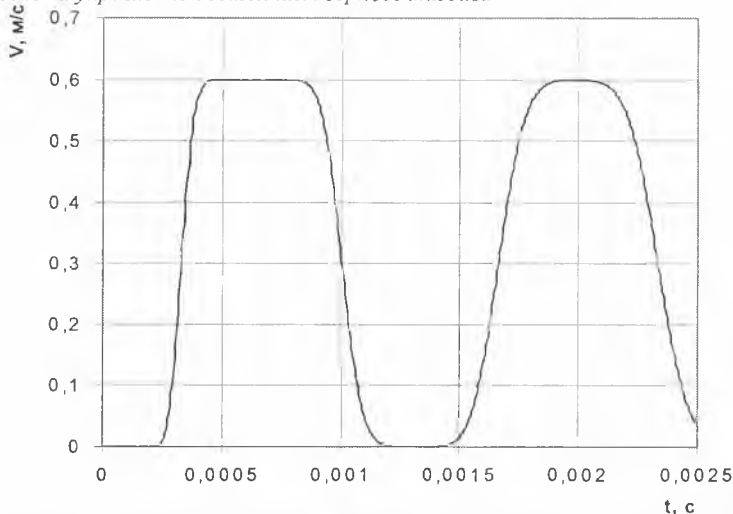


Рис. 3. Скорость движения жидкости: решение по методу Эйлера-Коши с уточнением по методу Абарбанеля и Цваса, противоположная граница – жесткая, профиль волны – ступенька.

Результаты тестирования для вязкой жидкости.

Расчет проводился для двух видов течения: Пуазейля и Куэтта.

Принимались следующие условия:

- дилатация равна 0;
- турбулентная вязкость равна 0;
- потоки тепла отсутствуют.

Течение Куэтта возникает между двумя бесконечно длинными пластинами в случае, когда одна из них мгновенно начинает движение с постоянной скоростью относительно другой - неподвижной. Боковые границы – свободная поверхность. Скорость движения нижней границы принята в расчетах 1 м/с, верхняя граница – жесткая, то есть $u=0, v=0$. Расстояние между пластинами - 0,001 м. Для этих условий получено семейство кривых, показывающих развитие установившегося течения между параллельными пластинами из состояния покоя при их относительном движении (семейство кривых отношения скорости течения жидкости к максимальной скорости для различных координат представлено на рис.4). Было проведено сравнение полученных результатов с теоретическими данными [4] (сравнение их представлено на рис.5).

Течение Пуазейля вызывается приложенным градиентом давления. Верхняя и нижняя границы приняты жесткими. Перепад давления принят равным 1 Па на длине 0,001 м, расстояние между верхней и нижней границей 0,001 м. Расчетные данные профилей скоростей в различные моменты времени для 10 и 20 точек по диаметру представлены на рис.6. Результаты показали хорошую сходимость данной расчетной схемы.

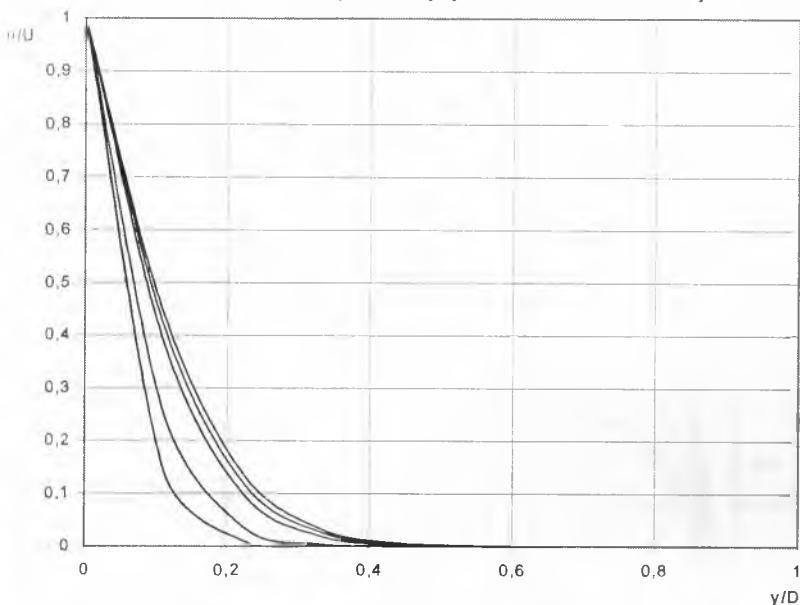


Рис. 4. Развитие из состояния покоя установившегося течения между параллельными пластинами (начальный этап): крайняя левая – 3,9 мс, крайняя правая – 20 мс.

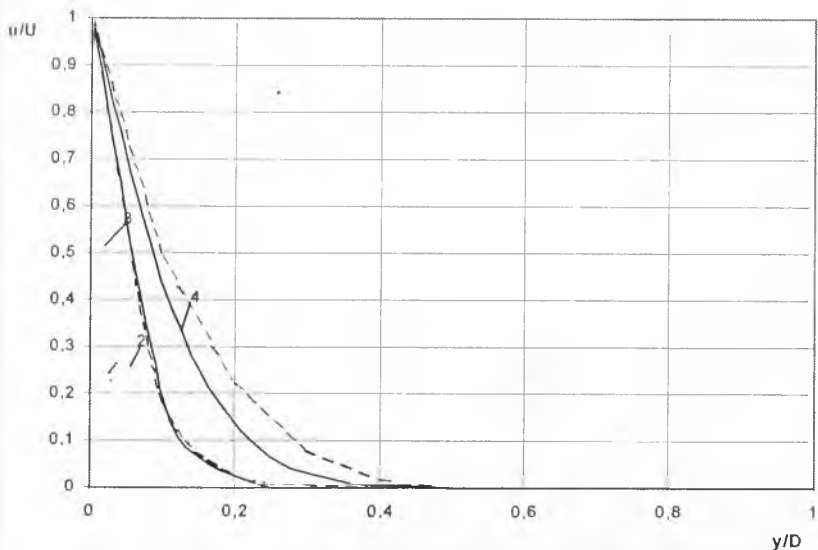


Рис. 5. График сравнения полученных результатов с теоретическими данными: 1, 2 – расчет по данной схеме и расчет [4] при $t=3,9$ мс; 3, 4 – при $t=15,5$ мс.

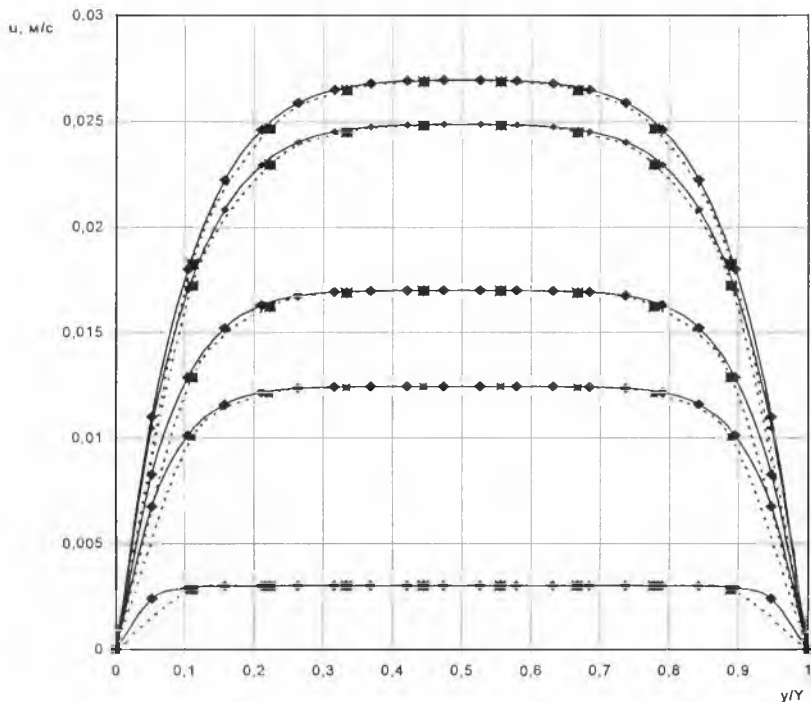


Рис. 6. Профили скоростей течения в трубе, вызванного градиентом давления на моменты времени: 3 мс, 12,45 мс, 17 мс, 24,9 мс, 27 мс снизу вверх соответственно для двух режимов расчета: ---■--- 10 расчетных точек по диаметру; —◆— 20 расчетных точек по диаметру.

Вывод.

Результаты работы показали целесообразность применения полуневязного метода, основанного на комбинации методов Эйлера-Коши и Абарбанеля и Цваса для решения нестационарных уравнений газовой динамики, как для невязкой, так и для вязкой жидкости. К его достоинствам можно отнести хорошую устойчивость и сходимость, а также относительную простоту алгоритма решения.

СНИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т.2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т.: Т.2. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
3. Пирунов У.Г. Численные методы. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.