

А. Я. Григоренко, С. А. Мальцев

О свободных колебаниях ортотропных конических оболочек переменной в двух направлениях толщины

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Пропонується чисельно-аналітичний підхід для дослідження вільних коливань тонких конічних ортотропних оболонок змінної товщини, який базується на сплайн-апроксимації невідомих функцій. Розрахунки виконано для різних типів граничних умов. Досліджено вплив змінної товщини на характер поведінки динамічних характеристик.

Исследование ортотропных конических оболочек переменной толщины представляет большой научный интерес благодаря широкому применению данного класса оболочек в качестве составных элементов различных конструкций. Одним из важных аспектов обеспечения прочности отмеченных упругих тел является получение информации об их свободных колебаниях.

Решение задачи о свободных колебаниях конической оболочки переменной толщины сопряжено со значительными трудностями вычислительного характера. Авторы предлагают эффективную численную методику решения данного класса задач. Исходная система дифференциальных уравнений в частных производных с помощью сплайн-аппроксимации и метода коллокации сводится к краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная система решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1, 2]. Такой подход для решения ряда динамических и статических задач был применен в [3–6]. В данной работе на основе предложенной численной методики проводится исследование свободных колебаний тонких замкнутых ортотропных конических оболочек переменной в окружном и меридиональном направлениях толщины при различных граничных условиях.

Исходные соотношения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях тонкой ортотропной конической оболочки переменной толщины $h(s, \theta)$ в криволинейной ортогональной системе координат (s, θ) , где s — длина дуги меридиана; θ — центральный угол в параллельном круге.

Согласно теории тонких оболочек Кирхгофа–Лява, уравнения, описывающие свободные колебания конических оболочек, будут иметь вид [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) + \frac{\partial S}{\partial \theta} - \cos \varphi N_\theta &= r\rho h \frac{\partial^2 u(s, \theta)}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s}(rS) + \cos \varphi S + \sin \varphi \left(Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial s} \right) &= r\rho h \frac{\partial^2 v(s, \theta)}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi N_\theta &= r\rho h \frac{\partial^2 w(s, \theta)}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) + \frac{\partial H}{\partial \theta} - \cos \varphi M_\theta - rQ_s &= 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(rH) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi H - rQ_\theta = 0,$$

где φ — угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения; r — радиус параллельного круга; t — время; u, v, w — перемещения точек срединной поверхности; ρ — плотность материала; ω — частота свободных колебаний оболочки.

Связь между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; & \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v; \\ \chi_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; & \chi_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}; & \chi_{s\theta} &= \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для нормальных и сдвигающих усилий N_s, N_θ и S , сгибающих и крутильных моментов M_s, M_θ и H при условии ортотропного материала справедливы такие соотношения:

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_\theta; & N_\theta &= C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_\theta; & S &= C_{66}\varepsilon_{s\theta}; \\ M_s &= D_{11}\chi_s + D_{12}\chi_\theta; & M_\theta &= D_{12}\chi_s + D_{22}\chi_\theta; & H &= 2D_{66}\chi_{s\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Жесткостные коэффициенты оболочки задаются формулами:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_{s\theta}h}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; & C_{12} &= \frac{E_{s\theta}\nu_{\theta s}h}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; & C_{22} &= \frac{E_{\theta s}h}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; & C_{66} &= G_{s\theta}h; \\ D_{11} &= \frac{E_{s\theta}h^3}{12(1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}; & D_{12} &= \frac{E_{s\theta}\nu_{\theta s}h^3}{12(1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}; & D_{22} &= \frac{E_{\theta s}h^3}{12(1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s})}; & D_{66} &= \frac{G_{s\theta}h^3}{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $E_{s\theta}, E_{\theta s}, \nu_{s\theta}, \nu_{\theta s}$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона вдоль соответствующих направлений жесткости; $G_{s\theta}$ — модуль сдвига.

В случае малых гармонических колебаний функции перемещений могут представлены в виде:

$$u(s, \theta, t) = u(s, \theta)e^{i\omega t}; \quad v(s, \theta, t) = v(s, \theta)e^{i\omega t}; \quad w(s, \theta, t) = w(s, \theta)e^{i\omega t}.$$

С учетом этого из системы уравнений (1)–(3) получим три эквивалентных дифференциальных уравнения относительно трех перемещений u, v и w точек срединной поверхности оболочки [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= F_u \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \omega \right); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= F_v \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \omega \right); \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= F_w \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}, \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2}, \omega \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где F_u, F_v, F_w — линейные дифференциальные операторы.

На контурах $s = s_0, s_a$ задаются следующие граничные условия, которые определяются через перемещения:

1) жесткое закрепление контуров

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \text{при} \quad s = s_0, s_a; \quad (6)$$

2) шарнирное опирание контуров

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \text{при} \quad s = s_0, s_a. \quad (7)$$

На контурах $\theta = 0, \pi$ задаются условия симметрии:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \quad \text{при} \quad \theta = 0, \pi. \quad (8)$$

Методика решения. Решение системы уравнений (5) будем искать в виде:

$$u = \sum_{i=0}^N u_i(\theta)\varphi_i(s), \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(\theta)\chi_i(s), \quad w = \sum_{i=0}^N w_i(\theta)\psi_i(s), \quad (9)$$

где $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ ($i = 0, \dots, N$) — искомые функции; $\varphi_i(s), \chi_i(s)$ — функции, построенные с помощью В-сплайнов третьей степени ($N \geq 4$); $\psi_i(s)$ — функции, построенные с помощью В-сплайнов пятой степени ($N \geq 6$). Выбор функций $\varphi_i(s), \chi_i(s), \psi_i(s)$ обусловлен требованиями удовлетворить граничные условия (6), (7) при $s = \text{const}$ с помощью линейных комбинаций В-сплайнов 3-й и 5-й степеней соответственно [1].

Подставив (9) в уравнения (5), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [s_a, s_b], k = 0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1, n \geq 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям $\xi_{2i} \in [s_{2i}, s_{2i+1}], \xi_{2i+1} \in [s_{2i}, s_{2i+1}], (i = 0, \dots, N)$, на отрезке $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2i+1}, s_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков s_{2i}, s_{2i+1} точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2i} = s_{2i} + z_1 h, \xi_{2i+1} = s_{2i} + z_2 h, (i = 0, \dots, N)$, где h — шаг сетки; z_1, z_2 — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равняются: $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$ и $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $8(N + 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i, w_i . Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_l &= [\varphi_i^{(l)}(\xi_k)], & X_l &= [\chi_i^{(l)}(\xi_k)], & \Psi_l &= [\psi_i^{(l)}(\xi_k)], \\ i, k &= 0, \dots, N, & l &= 0, \dots, 2, & m &= 0, \dots, 4; \\ \bar{u}^T &= \{u_0, \dots, u_N\}, & \bar{v}^T &= \{v_0, \dots, v_N\}, & \bar{w}^T &= \{w_0, \dots, w_N\}; \\ \bar{a}_{1r}^T &= \{a_{1r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{1r}(\theta, \xi_N)\}, & r &= 1, \dots, 10; \\ \bar{a}_{2r}^T &= \{a_{2r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{2r}(\theta, \xi_N)\}, & r &= 1, \dots, 16; \\ \bar{a}_{3r}^T &= \{a_{3r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{3r}(\theta, \xi_N)\}, & r &= 1, \dots, 15; \end{aligned}$$

$$\bar{a}_{111}^T = \{a_{111}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{111}(\theta, \xi_N, \omega)\};$$

$$\bar{a}_{217}^T = \{a_{217}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{217}(\theta, \xi_N, \omega)\};$$

$$\bar{a}_{316}^T = \{a_{316}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{316}(\theta, \xi_N, \omega)\},$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 0, \dots, N)$, и вектора $\bar{c} = \{c_0, \dots, c_N\}$ обозначить через $\bar{c} \cdot A$ матрицу $[c_i \cdot a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}'' = \Phi_0^{-1} \{(\bar{a}_{12} \cdot \Phi_2 + \bar{a}_{13} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{14} \cdot \Phi_0 + \bar{a}_{111} \cdot \Phi_0)\bar{u} + (\bar{a}_{11} \cdot \Phi_0)\bar{u}' + \\ \quad + (\bar{a}_{17} \cdot X_1 + \bar{a}_{18} \cdot X_0)\bar{v} + (\bar{a}_{15} \cdot X_1 + \bar{a}_{16} \cdot X_0)\bar{v}' + (\bar{a}_{19} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{110} \cdot \Psi_0)\bar{w}\}, \\ \bar{v}'' = X_0^{-1} \{(\bar{a}_{23} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{24} \cdot \Phi_0)\bar{u} + (\bar{a}_{21} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{22} \cdot \Phi_0)\bar{u}' + \\ \quad + (\bar{a}_{26} \cdot X_2 + \bar{a}_{27} \cdot X_1 + \bar{a}_{28} \cdot X_0 + \bar{a}_{217} \cdot X_0)\bar{v} + (\bar{a}_{25} \cdot X_0)\bar{v}' + \\ \quad + (\bar{a}_{214} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{215} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{216} \cdot \Psi_0)\bar{w} + (\bar{a}_{211} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{212} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{213} \cdot \Psi_0)\bar{w}' + \\ \quad + (\bar{a}_{210} \cdot \Psi_0)\bar{w}'' + (\bar{a}_{29} \cdot \Psi_0)\bar{w}'''\}, \\ \bar{w}^{IV} = \Psi_0^{-1} \{(\bar{a}_{31} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{32} \cdot \Phi_0)\bar{u} + (\bar{a}_{33} \cdot X_0)\bar{v}' + (\bar{a}_{311} \cdot \Psi_4 + \bar{a}_{312} \cdot \Psi_3 + \bar{a}_{313} \cdot \Psi_2 + \\ \quad + \bar{a}_{314} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{315} \cdot \Psi_0 + \bar{a}_{316} \cdot \Psi_0)\bar{w} + (\bar{a}_{38} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{39} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{310} \cdot \Psi_0)\bar{w}' + \\ \quad + (\bar{a}_{35} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{36} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{37} \cdot \Psi_0)\bar{w}'' + (\bar{a}_{34} \cdot \Psi_0)\bar{w}'''\}, \end{array} \right. \quad (10)$$

где $u_i^{(k)} = u_i^{(k)}(\theta, \xi_i)$, $v_i^{(k)} = v_i^{(k)}(\theta, \xi_i)$, $w_i^{(l)} = w_i^{(l)}(\theta, \xi_i)$, $k = 0, \dots, 1$, $l = 0, \dots, 3$, $i = 0, \dots, N$.

Полученную систему (10) обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальному виду

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega)\bar{Y} \quad (0 \leq \theta \leq b), \quad (11)$$

где $\bar{Y}^T = \{u_0, \dots, u_N, u_0', \dots, u_N', v_0, \dots, v_N, v_0', \dots, v_N', w_0, \dots, w_N, w_0', \dots, w_N', w_0'', \dots, w_N'', w_0''', \dots, w_N'''\}$; $A(\theta, \omega)$ — квадратная матрица порядка $8(N+1) \times 8(N+1)$.

Граничные условия (8) для системы (11) можно записать в виде

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2\bar{Y}(b) = \bar{0}. \quad (12)$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) с граничными условиями (12) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1, 8].

Решение задачи. Анализ результатов. Упругие характеристики материала исследуемых оболочек соответствуют характеристикам волокнистого стеклопластика VM1: $E_{s\theta} = 4,76 \cdot 10^{10}$ Па, $E_{\theta s} = 2,07 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{s\theta} = 5,31 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{s\theta} = 0,149$, $\nu_{\theta s} = 0,065$, $\rho = 1880$ кг/м³.

Расчеты, проведенные по методу сплайн-коллокации при разном количестве точек коллокации, практически совпадают ($N = 10$, $N = 12$, $N = 14$). Данные расчетов приведены для $N = 12$.

Проверка достоверности получаемых результатов осуществлялась путем сравнения частот свободных колебаний цилиндрической оболочки с частотами близких к ней конических

оболочек эквивалентной массы. При условии шарнирного опирания торцов искомые функции перемещений замкнутой цилиндрической оболочки могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_i \sum_j A_{ij} \cos \frac{m\pi s}{L} \cos n\theta e^{i\omega t}, \\
 v &= \sum_i \sum_j B_{ij} \sin \frac{m\pi s}{L} \sin n\theta e^{i\omega t}, \\
 w &= \sum_i \sum_j C_{ij} \sin \frac{m\pi s}{L} \cos n\theta e^{i\omega t}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Здесь m, n — число полуволн в соответствующем направлении; L — длина образующей; R — радиус срединной поверхности оболочки.

Такое представление дает возможность получения аналитического решения для случая изгибных форм колебаний цилиндрической оболочки [9]. Аналитическое решение сравнивалось с численными решениями, полученными для цилиндрической и близкой к ней конической оболочки эквивалентной массы с помощью метода сплайн-коллокации.

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Цилиндрической оболочке соответствуют следующие геометрические параметры: $L = 0,2$ м, $R = 0,1$ м, $h = 0,004$ м. Геометрические свойства конической оболочки: $L = 0,2$ м; $R_1 = 0,09$ м; $R_2 = 0,11$ м; $h = 0,004$ м. Здесь h — толщина оболочки; R_1, R_2 — радиусы торцевых поверхностей конической оболочки. В таблице введены обозначения: A — задача решалась для случая цилиндрической оболочки с помощью аналитического подхода (13); B — задача решалась для случая цилиндрической оболочки с помощью предложенной численной методики; C — задача решалась для случая конической оболочки.

Отклонения от аналитических значений частот не превышают 0,15% для цилиндрической оболочки и 0,5% — для конической, что свидетельствует о достаточной точности применяемого численного метода.

На основании предлагаемой методики были исследованы свободные колебания замкнутых конических ортотропных оболочек, жестко закрепленных на торцах с переменной в окружном и меридиональном направлениях толщиной со следующими геометрическими параметрами: $R_1 = 0,05$ м, $R_2 = 0,15$ м, $L = 0,2$ м, где L — длина образующей; R_1, R_2 — радиусы торцевых поверхностей.

Толщина исследуемых оболочек изменялась по следующему закону:

$$h = h_0(1 + \alpha_1 \cos \theta) \left(1 + \alpha_2 \left(\frac{2(s - s_0)}{s_a - s_0} - 1 \right) \right),
 \tag{14}$$

где $0,0 \leq |\alpha_1| \leq 0,5$; $-0,4 \leq \alpha_2 \leq 0,4$; h_0 — толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы (в расчетах $h_0 = 0,004$ м). Результаты расчетов собственных частот ука-

Таблица 1

ω_i , Гц	A	B	C
ω_1	1333,0	1331,1	1326,4
ω_2	1334,9	1333,0	1329,0
ω_3	1712,5	1711,1	1706,0
ω_4	1875,7	1874,5	1864,8

занных выше конических оболочек с соответствующими граничными условиями для различных значений параметров α_1, α_2 представлены в табл. 2, 3. В табл. 2 приведены первые частоты свободных колебаний конических оболочек, в табл. 3 — вторые.

На основании данных табл. 2, 3 можно проследить характер различия значений собственных частот конических оболочек с переменной толщиной относительно оболочек с постоянной толщиной. Различие значений частот возрастает при увеличении параметров α_1 и α_2 . При этом для первой частоты свободных колебаний характерно уменьшение значений частот с увеличением значения параметра α_1 , для меридионального направления картина противоположная — большему значению параметра α_2 соответствуют большие значения частот. Для спектра вторых частот собственных колебаний картина более сложная. При значениях $0 \leq \alpha_1 \leq 0,2$ значения частот возрастают. При дальнейшем увеличении значения параметра α_1 соответствующие частоты уменьшаются.

На рис. 1 представлена зависимость значений третьей частоты свободных колебаний оболочек эквивалентной массы от параметра изменения толщины в окружном направлении α_1 для различных значений параметра α_2 .

Аналогичные данные для четвертой частоты свободных колебаний исследуемых оболочек приведены на рис. 2.

На этих рисунках видна зависимость распределения частот свободных колебаний от различного характера изменения толщины в окружном и меридиональном направлении: для более высоких частот характерна более сложная зависимость от параметров изменения толщины. Таким образом за счет незначительных изменений в геометрии поверхности конических оболочек можно добиться существенного влияния на распределение частот свободных колебаний.

Таблица 2

$\omega_1, \text{Гц}$					
α_1	α_2				
	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4
0,0	1353,2	1361,0	1439,0	1550,9	1755,3
0,1	1342,3	1350,4	1426,0	1531,9	1715,3
0,2	1313,6	1322,7	1394,7	1492,6	1659,7
0,3	1272,3	1283,9	1352,3	1442,7	1594,4
0,4	1221,0	1235,4	1300,5	1383,5	1519,6
0,5	1160,4	1177,3	1238,4	1313,8	1434,0

Таблица 3

$\omega_2, \text{Гц}$					
α_1	α_2				
	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4
0,0	1474,3	1439,9	1500,7	1596,0	1765,5
0,1	1473,8	1441,5	1504,7	1604,9	1791,9
0,2	1467,4	1441,0	1508,2	1613,0	1805,1
0,3	1448,8	1431,8	1502,3	1609,1	1797,2
0,4	1416,3	1409,5	1483,0	1588,8	1766,1
0,5	1368,7	1371,6	1446,9	1549,4	1711,4

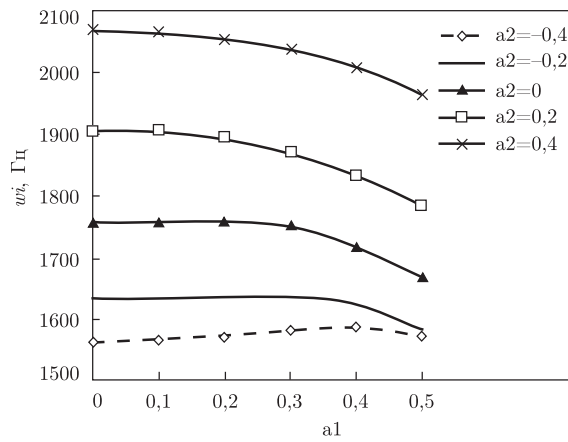


Рис. 1

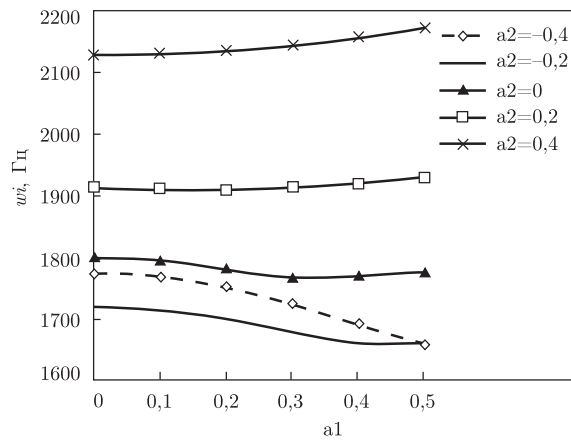


Рис. 2

1. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – Київ: Либідь, 1992. – 152 с.
2. Зав'ялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
3. Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 6. – С. 46–58.
4. Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением // Там же. – 2007. – 43, № 6. – С. 82–92.
5. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П. О напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Там же. – № 10. – С. 80–91.
6. Будає В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Там же. – № 4. – С. 89–98.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
8. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах/ Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.02.2009

A. Ya. Grigorenko, S. A. Maltsev

About free vibrations of orthotropic conical shells with thickness variable in two directions

The paper considers free vibrations of thin orthotropic conical shells with variable thickness basing on the method of spline-approximation of unknown functions. Calculations were carried out for different types of boundary conditions. The influence of the variable thickness of shells on free vibrations is studied. Free vibrations of shells with constant and variable thicknesses are compared.