УДК 519.21

І. В. Малик

Експоненційний ріст розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу в скалярному випадку

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано критерій в інтегральній формі для визначення показника експоненти Ляпунова розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння.

Нехай на імовірнісному базисі [1] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано випадковий процес, який задовольняє лінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу (НСДФР)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) \tag{1}$$

за невипадковою початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут випадковий процес $x(t) = x(t, \omega)\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$; $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0 \in \in C([-h, 0]); \varphi \in C([-h, 0])$; $w(t) = w(t, \omega)$ — одновимірний випадковий вінеровий процес, що узгоджений з $\Im$; D, L, G — функціонали, що задані на просторі функцій $\psi \in C([-h, 0])$ співвідношеннями [2, 3]

$$\begin{aligned} D\psi &\equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_1(s)\psi(s); \\ L\psi &\equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_2(s)\psi(s); \\ G\psi &\equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_3(s)\psi(s), \end{aligned} \tag{3}$$

де r_i, $i = 1, 2, 3,$ — функції обмеженої варіації на відрізку $[-h, \epsilon]$, для яких виконується умова $r_i(t) = c_i$ при $t \in (0, \epsilon]$; $\epsilon > 0$.

Для задачі (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in \mathbb{R}^1$, для якого існує $E\{x^2(t)\} < \infty$ [4].

Поряд з рівнянням (1) розглянемо відповідне детерміноване диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу (НДДФР) [3]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}dt \tag{4}$$

за невипадковою початковою умовою

$$y_0 = \varphi. \tag{5}$$

Наведемо спочатку деякі твердження, які будуть необхідні надалі.

Лема 1 [3]. *Якщо*

$$Var_{[-h,0)} r_1 < 1, \tag{6}$$

то розв'язок $y(t) \equiv 0$ *лінійного НДДФР* (4), (5) *є експоненціально стійкісний тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома*

$$V(z) \equiv z\left\{\int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_1(s)e^{zs}\right\} - \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_2(s)e^{zs} \tag{7}$$

лежать в лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, *тобто*

$$\exists\, \rho > 0, \forall\, z \in \mathbf{C}\colon\ V(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < -\rho. \tag{8}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [2] як розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Зауважимо, що вірне твердження щодо зображення функції Коші $X(t)$ за допомогою характеристичного квазіполінома:

Лема 2 [2]. *Функція Коші* $X(t)$ *має вигляд*

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} z = \mu} e^{zt} V^{-1}(z)\, dz, \tag{10}$$

де $\mu > -\rho$.

Лема 3 [5]. *Розв'язок НСДФР* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_{0}^{t} X(t-s) G x_s\, dw(s), \tag{11}$$

де $y(t)$ — *розв'язок* (4), (5).

Дамо означення експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку НСДФР (1), (2).

Означення 1. Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) назвемо експоненціально стійким в середньому квадратичному, якщо існують сталі $M > 0$ і $c > 0$, такі що $\forall\, t \geqslant 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$

$$E|x(t)|^2 \leqslant M e^{-ct} \|\varphi\|^2, \tag{12}$$

де $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-h \leqslant t \leqslant 0} |\varphi(t)|$, $E\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання.

Теорема 1 [5]. *Нехай виконується умови* (6) *і* (8) *для коефіцієнтів НДДФР і коренів його характеристичного квазіполінома* (7).

Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку (1), (2) *є виконання інтегральної нерівності*

$$B \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |G(is)|^2|V(is)|^{-2}ds < 1, \tag{13}$$

де $G(z) \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_3(s)e^{zs}$, $i = \sqrt{-1}$ *— уявна одиниця.*

Відомий факт [6], що другий момент розв'язку задачі (1), (2) поводить себе як $K_1 t^l e^{kt}$ при $t \to \infty$, де $K_1 \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $k \in \mathbb{R}^1$ — деякі сталі.

Задача полягає у знаходженні числа

$$k = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln E|x(t)|^2}{t}, \tag{14}$$

яке називають показником Ляпунова для НСДФР [6].

Теорема 2. *Показник Ляпунова* k *задачі* (1), (2) *визначається з умови*

$$B_k = 1,$$

де

$$\begin{gathered} B_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |G_k(is)|^2|V_k(is)|^{-2}ds; \qquad G_k(z) \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_3(s)e^{-s(z+k)}; \\ V_k(z) \equiv z\int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_1(s)e^{-s(z+k)} - \int\limits_{-h}^{\epsilon} d(r_1(s) - kr_1(s))e^{-s(z+k)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу для випадкового процесу $z(t)$, який визначається з рівності

$$x(t) = e^{pt}z(t), \qquad p \in \mathbb{R}^1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &dx(t) = d(e^{pt}z(t)) = px(t)dt + e^{pt}dz(t) = e^{pt}(pz(t)dt + dz(t)), \\ &dx(t-\tau) = d(e^{p(t-\tau)}z(t-\tau)) = px(t-\tau)dt + e^{p(t-\tau)}dz(t-\tau) = \\ &\qquad = e^{p(t-\tau)}(pz(t-\tau)dt + dz(t-\tau)). \end{aligned}$$

Підставимо $x(t)$ в рівняння (1) і отримаємо НСДФР відносно $z(t)$, так зване, збурене стохастичне диференціально-функціональне рівняння

$$d\{D_p z_t\} = \{L_p z_t\}dt + \{G_p z_t\}dw(t), \tag{16}$$

де

$$D_p\psi \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} \psi(s)e^{ps}dr_1(s); \quad L_p\psi \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} \psi(s)e^{ps}d(r_2(s) - pr_1(s)); \quad G_p\psi \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} \psi(s)e^{ps}dr_3(s).$$

Для стійкості розв'язку рівняння (16), (2) необхідно та достатньо виконання умов теореми 1. Визначимо через $V_p(z)$ характеристичний квазіполіном відповідного детермінованого рівняння до рівняння (16):

$$V_p(z) \equiv \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_1(s)e^{-s(z+p)} - \int\limits_{-h}^{\epsilon} d(r_1(s) - pr_1(s))e^{-s(z+p)}. \tag{17}$$

Лема 4. *Мають місце наступні рівності:*

$$\lim_{p\to 0} D_p\psi = D_0\psi \equiv D\psi,$$

$$\lim_{p\to 0} L_p\psi = L_0\psi \equiv L\psi,$$

$$\lim_{p\to 0} G_p\psi = G_0\psi \equiv G\psi,$$

$$\lim_{p\to 0} V_p(z) = V_0(z) \equiv V(z)$$

для $\forall\,\psi \in C([-h, 0])$, $z \in \mathbb{C}$.

Доведення очевидне за рахунок неперервності функції ψ.

Лема 5. *При* $\rho < p$*:*

1) B_p *— неперервна незростаюча функція;*

2) $B_p \to 0$ *при* $p \to \infty$.

Доведення 1. Неперервність випливає безпосередньо з леми 4 та обмеженості B_p рівномірно по p для $\rho < p$.

Доведемо, що B_p — незростаюча. Це випливає з того, що функція $|G_p(is)|^2$ є незростаючою по p, а функція $|V_p(is)|^2$ — неспадна по p.

Доведення 2. Для доведення пункту 2 леми слід зауважити, що $|G_p(is)|^2 = O(f^2)$ і $|V_p(is)|^2 = O((\alpha - p)^2)$ при $p \to \infty$, де $O(p)$ –функція, яка задовольняє співвідношення

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{O(p)}{p} = C \equiv \text{const}.$$

Лема 5 доведена.

Для остаточного доведення теореми 2 зауважимо, що при $B_p > 1$ розв'язок НСДФР (16) є нестійким в $l.i.m.$, при $B_p < 1$ — експоненційно стійким в $l.i.m.$ [5]. При $B_p = 1$ виконується умова теореми 2. Справді, в цьому випадку розв'язок $z(t)$ поводить себе на ∞ як Kt^n, $n \in \mathbb{N}$, тобто

$$k = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{lnE|z(t)|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{2nln(t)}{t} = 0,$$

що і доводить теорему 2.

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради проф. В. К. Ясинському.

1. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – Москва: Физматизд, 1994. – Т. 2. – 473 с.
2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
5. *Малик І. В., Ясинський В. К.* Експоненціальна поведінка в середньому квадратичному розв'язку стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 22–27.
6. *Xuerong Mao, Yi Shen, Chenggui Yuan.* Almost surely asymptotics of neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stoch. Proc. and their Appl. – 2008. – **118**. – P. 1385–1406.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 20.03.2009

I. V. Malyk

Exponential rising of the solution of the stochastic functional differential equation of the neutral type in the scalar case

The criterion is obtained in the integral form to define Lyapunov's exponent power of the solution of the stochastic functional differential equation.