УДК 533.72

В. Д. Гордевський

Наближені розв'язки рівняння Больцмана в просторі з вагою

(Представлено академіком НАН України Л. А. Пастуром)

Побудовано новий бімодальний наближений розв'язок рівняння Больцмана у випадку моделі пружних куль. За міру розбіжності між частинами рівняння обирається норма їх різниці в деякому функціональному просторі з вагою.

Кінетичне рівняння Больцмана, яке описує еволюцію досить розрідженого газу, у випадку моделі пружних куль має вигляд [1, 2]

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha\, |(v_1 - v, \alpha)[\, f(t, v_1', x) f(t, v', x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \tag{3}$$

$$v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha); \qquad v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha). \tag{4}$$

Тут $t \in \mathbb{R}^1$ — час; $x \in \mathbb{R}^3$ — координата молекули в просторі; $v \in \mathbb{R}^3$ — швидкість молекули; $d > 0$ — її діаметр; $f(t, v, x)$ — функція розподілу молекул; $\partial f/\partial x$ (або просто f') — градієнт цієї функції відносно вектора x; $\alpha \in \Sigma$, де $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, — одинична сфера в $\mathbb{R}^3$; v, v_1, v', v_1' — швидкості молекул перед та після зіткнення відповідно.

Для моделі пружних куль на цей час єдиним відомим точним розв'язком рівняння (1)–(4) є максвеліани, тобто функції вигляду [1, 2]

$$M = \rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v - \widetilde{v})^2}, \tag{5}$$

де гідродинамічні параметри потоку (густина ρ, обернена температура $\beta = 1/(2T)$ та масова швидкість $\widetilde{v}$) здатні, взагалі кажучи, певним чином залежати від t та x. Відомо також, що функції вигляду (5) обертають обидві частини рівняння Больцмана на нуль, тобто

$$D(M) = Q(M, M) = 0. \tag{6}$$

Найбільш загальний вигляд зазначеної залежності знайдено в [2–4], а в [5] проведено детальний аналіз різних типів максвеліанів і досліджено їх фізичний та геометричний сенс.

Один з можливих таких типів, як показано в [5], описує "прискорення-згущення" газу і має вигляд (5) при

$$\rho = \overline{\rho} e^{\beta(\widetilde{v}^2 + 2\overline{u}x)}, \tag{7}$$

$$\widetilde{v} = \overline{v} - \overline{u}t, \tag{8}$$

де $\overline{\rho}$, $\overline{v}$, $\overline{u}$ — деякі сталі скаляри та вектори.

У роботах [6, 7] побудовано явний наближений розв'язок рівняння Больцмана, який має вигляд бімодального розподілу

$$f = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i M_i, \tag{9}$$

де максвеліани M_i, $i = 1, 2$ мають вигляд (5), (7), (8) з різними параметрами $\rho_i = \rho_i(t, x)$, $\overline{\rho}_i$, β_i, $\widetilde{v}_i = \widetilde{v}_i(t)$, $\overline{u}_i$, $\overline{v}_i$, $i = 1, 2$, а коефіцієнтні функції $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$ задовольняють умови

$$\varphi_i \geqslant 0; \qquad \varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^4), \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

У [6, 7] знайдено низку умов, які є достатніми для довільної securing мализни так званого рівномірно інтегрального відхилу Δ, тобто "змішаної" норми різниці між частинами рівняння (1) D та Q (у просторі C за змінними t, x та в сенсі L_1 — за v).

Метою даної роботи є пошук наближених розв'язків (9), (10) рівняння Больцмана з використанням іншого відхилу, що обчислюється як норма різниці $D - Q$ у деякому просторі зі спеціально підібраною вагою, а саме:

$$\overline{\Delta} = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\frac{1}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv \right]. \tag{11}$$

Точна постановка задачі є такою: знайти функції φ_i, $i = 1, 2$, які задовольняють умови (10), і таку поведінку параметрів, що входять до максвеліанів M_i, $i = 1, 2$, щоб вираз (11) для функцій вигляду (5), (7), (8) прямував при цьому до нуля.

Наведемо один з можливих результатів у цьому напрямку.

Теорема. *Нехай*

$$\varphi_i = C_i\left(x + \frac{\overline{u}_i \widetilde{v}_i^2}{2\overline{u}_i^2}\right), \qquad i = 1, 2, \tag{12}$$

де $C_i \geqslant 0$ — довільні функції із $C^1(\mathbb{R}^4)$ з компактним носієм, і виконуються умови

$$\overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$\overline{v}_i = \frac{\overline{v}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}, \qquad i = 1, 2 \tag{14}$$

($\overline{u}_{0i}$, $\overline{v}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ — довільні векторні константи). Тоді є справедливою рівність

$$\lim_{\beta_i, \beta_2 \to +\infty} \overline{\Delta} = 0. \tag{15}$$

Доведення. Використовуючи техніку, розвинуту в [7], і спираючись на (7), (8), (10), (12), можна пересвідчитися в тому, що наведені нижче вирази є обмеженими з вагою $(1 + |t|)^{-1}$ на $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{gathered} t\varphi_i\rho_i(t,x); \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,x); \qquad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i(t,x); \qquad t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\rho_i(t,x); \\ \varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x); \qquad t\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x), \qquad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{16}$$

Це гарантує існування оцінки для відхилу (11), яка здобувається методами, аналогічними тим, які застосовані в [6, 7]:

$$\overline{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}' = \pi^{-2} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \bigg\{ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \bigg(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \widetilde{v}_i(t) \bigg) \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \bigg\} \sqrt{\pi} +$$
$$+ \varphi_1\varphi_2\rho_j(t,x)d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-w^2} dw \Bigg| \rho_i(t,x) e^{-u^2} du +$$
$$+ \varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2-u^2} F_{ij} dw du \Bigg], \tag{17}$$

де

$$F_{ij} = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{v}_j + (\overline{u}_j - \overline{u}_i)t - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \qquad i,j = 1,2, \qquad i \neq j. \tag{18}$$

Умови (13), (14) з урахуванням (7), (8), (10), (12), (16) та (18) дозволяють застосувати лему 1 роботи [8] до виразу (17), тобто перейти до низькотемпературної границі в $\overline{\Delta}'$ під знаком супремумів, інтегралів тощо. Границі кожного з "фрагментів" будуть, очевидно, такими:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \rho_i(t,x) = \overline{\rho}_i e^{\overline{v}_{0i}^2 + 2\overline{u}_{0i}x}, \tag{19}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \varphi_i = C_i\left(x + \frac{\overline{u}_{0i}\overline{v}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2} \right), \tag{20}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{t\overline{u}_i^2 - (\overline{u}_i, \overline{v}_i)}{\overline{u}_i^2} \left(\overline{u}_i, C_i'\left(x + \frac{\overline{u}_i\widetilde{v}_i^2}{2\overline{u}_i^2} \right) \right) = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = C_i'\left(x + \frac{\overline{u}_i\widetilde{v}_i^2}{2\overline{u}_i^2} \right), \tag{22}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \widetilde{v}_i(t) = \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} F_{ij} = 0. \tag{23}$$

Значить,

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \overline{\Delta}' = 0, \tag{24}$$

звідки й випливає (15). Теорему доведено.

Таким чином, використання нового відхилу "з вагою" вигляду (11), який запропоновано в даній роботі, дозволяє пом'якшити умови на коефіцієнтні функції φ_i, $i = 1, 2$, порівняно з роботами [6, 7] (тобто позбутися в (12) додаткових швидкоспадаючих при $t \to \infty$ множників) та забезпечити виконання рівності (15) без допомоги зайвих вимог до інших параметрів та функцій, які входять до бімодального розподілу (9).

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. – Москва: Мир, 1978. – 495 с.
2. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 118 с.

3. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases // Communs Pure and Appl. Math. – 1949. – **2**, No 4. – P. 331–407.
4. *Фридлендер О. Г.* Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана // Прикл. мат. и мех. – 1965. – **29**, вып. 5. – С. 973–977.
5. *Gordevskyy V. D.* On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**, No 2. – P. 231–247.
6. *Гордевський В. Д., Андріяшева Н. В.* Перехідний режим між деякими локально-максвелівськими течіями // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 3. – С. 51–57.
7. *Gordevskyy V. D., Andriyasheva N. V.* Interaction between “accelerating-packing” flows in a low-temperature gas // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – **5**, No 1. – P. 38–53.
8. *Гордевский В. Д.* Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теор. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. – С. 283–300.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

Надійшло до редакції 02.03.2009

V. D. Gordevskyy

Approximate solutions of the Boltzmann equation in a weighted space

A new bimodal approximate solution of the Boltzmann equation for the model of rigid spheres is constructed. As a value of deviation between the sides of the equation, the norm of their difference in some weighted functional space is chosen.