УДК 519.85

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай**

Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета

Розглядається оптимізаційна задача упакування максимальної кількості рівних кіл у багатозв'язну область, границя якої складається з дуг кіл та відрізків прямих. Побудовано математичну модель задачі. На підставі властивостей математичної моделі запропоновано метод розв'язання задачі. Метод складається з комбінації алгоритму генерації початкових точок, модифікації методу можливих напрямків та модифікації методу звужувальних околів для пошуку наближення до глобального максимуму. Наводиться чисельний приклад.

Задача размещения одинаковых кругов имеет важное теоретическое и прикладное значение. Рассмотрим постановку рассматриваемой задачи. Пусть имеются конгруэнтные круги C_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, N\}$, радиусом r с центрами $u_i = (x_i, y_i)$ и замкнутое многосвязное множество P, заданное следующим образом: $P = \operatorname{cl}\left(P_0 \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\beta} A_l\right) \subset \mathbb{R}^2$, $A_l = \left(\bigcup\limits_{g=1}^{g_l} C_{lg}\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{h=1}^{h_l} M_{lh}\right)$, $\operatorname{int} A_l \neq \varnothing$, $l \in B = \{1, 2, \ldots, \beta\}$, C_{lg} — круги с центрами (x^0_{lg}, y^0_{lg}) и радиусами ρ^0_{lg}, $g \in G_l = \{1, 2, \ldots, g_l\}$, M_{lh} — выпуклые многоугольники, $h \in H_l = \{1, 2, \ldots, h_l\}$. Граница P_0 формируется отрезками прямых и дугами окружностей.

Задача. Необходимо найти такой вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, который обеспечит размещение в области P максимального числа $n \leqslant N$ кругов C_i, $i \in I$.

В отличие от работы [1], которая также посвящена задаче упаковки одинаковых кругов, в данной работе рассматривается многосвязная область, граница которой формируется отрезками прямых и дугами окружностей. Кроме того, предлагается другая математическая модель и разработан более эффективный метод решения задачи.

Прежде чем построить математическую модель поставленной задачи, построим множество

$$G = \operatorname{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus P_0) = \left(\bigcup_{j=1}^{j_1} Q_{1j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{j_2} Q_{2j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{j_3} Q_{3j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{j_4} Q_{4j}\right),$$

где

$$Q_{1j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \chi_{1j}(x, y) \geqslant 0\},\ j \in J_1 = \{1, 2, \ldots, j_1\},\ \chi_{1j}(x, y) = a_{1j}x + b_{1j}y + c_{1j};$$

$$Q_{2j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \chi_{2jl}(x, y) \geqslant 0,\ l = 1, 2\},\ j \in J_2 = \{1, 2, \ldots, j_2\},$$

$$\chi_{2jl}(x, y) = a_{2jl}x + b_{2jl}y + c_{2jl};$$

$$Q_{3j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \widehat{\omega}_{3j}(x, y) \geqslant 0\},\ j \in J_3 = \{1, 2, \ldots, j_3\},$$

$$\widehat{\omega}_{3j}(x, y) = \widehat{r}_j^{\,2} - (x - \widehat{x}_j)^2 - (y - \widehat{y}_j)^2;$$

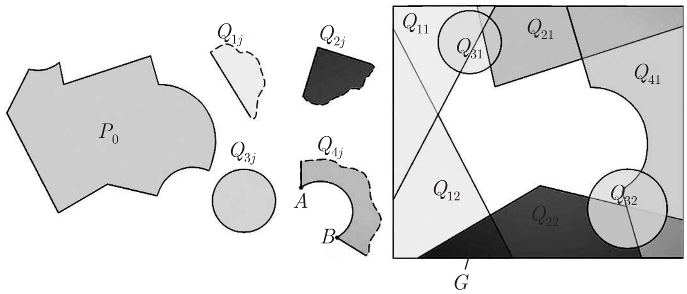


Рис. 1. Представление множества G

$$Q_{4j} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \chi_{4jl}(x,y) \geqslant 0,\ \breve{\omega}_{4j}(x,y) \geqslant 0, l = 1,2\},\ j \in J_4 = \{1,2,\ldots,j_4\},$$

$$\chi_{4jl}(x,y) = a_{4jl}x + b_{4jl}y + c_{4jl},\ \breve{\omega}_{4j}(x,y) = (x - \breve{x}_j)^2 + (y - \breve{y}_j)^2 - \breve{r}_j^2,$$

при этом $\rho(A,B) \geqslant 2r$, $\rho(A,B)$ — расстояние между точками A и B (рис. 1), $\breve{r} \geqslant r$.

Например, для области P_0, представленной на рис. 1, множество G имеет вид

$$G = \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{1j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{2j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{3j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{1} Q_{4j}\right).$$

Решение поставленной задачи сводится к решению следующей последовательности задач:

$$F_n(X^{n*}) = \max_{X^n \in W_n} F_n(X^n), \qquad n \in I_n = \{1,2,\ldots,\tau \leqslant N\}, \tag{1}$$

$$W_n = \{X^n \in \mathbb{R}^{3n} \colon \Phi_{ij}(u_i,u_j,r_i,r_j) \geqslant 0, i,j \in I_n, i<j, \Phi_i(u_i,r_i) \geqslant 0, r - r_i \geqslant 0,$$
$$r_i \geqslant 0, i \in I_n\}, \tag{2}$$

где

$$F_n(X^n) = \sum_{i=1}^{n} r_i, \qquad X^n = (u^n, v^n),$$

$$u^n = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad v^n = (r_1,r_2,\ldots,r_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad r_i \text{ — радиус } C_i,$$

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j,r_i,r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2 \geqslant 0,$$

$$\Phi_i(u_i,r_i) = \min\{\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i), \Phi_{ilh}^{CM}(u_i,r_i), \Phi_i^{CG}(u_i,r_i), l \in B, g \in G_l, h \in H_l\},$$

$$\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i) = (x_i - x_{lg}^0)^2 + (y_i - y_{lg}^0)^2 - (r_i + \rho_{lg}^0)^2,$$

$$\Phi_{ilh}^{CM}(u_i,r_i) = \max_{k=1,2,\ldots,m_{lh}} \{\max\{\min\{\psi_{ilhk}(u_i,r_i), \omega_{ilhk}(u_i,r_i)\}, \chi_{ilhk}^*(u_i,r_i)\}\},$$

$$\Phi_i^{CG}(u_i,r_i) = \min\{\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i), j \in J_1, \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i), j \in J_2, \Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i), j \in J_3,$$
$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i), j \in J_4\},$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i) = \chi_{i1j}^*(u_i,r_i) = -\chi_{1j}(u_i) - r_i,$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)=\max\{\min\{\psi_{ij}(u_i,r_i),\omega_{ij}(u_i,r_i)\},\chi_{i2j1}^*(u_i,r_i),\chi_{i2j2}^*(u_i,r_i)\},$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i)=(x_i-\widehat{x}_j)^2+(y_i-\widehat{y}_j)^2-(r_i+\widehat{r}_j)^2,$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)=\max\{\phi_{ij1}(u_i,r_i),\phi_{ij2}(u_i,r_i),\phi_{ij3}(u_i,r_i),\omega_{ij3}(u_i,r_i),\chi_{i4j1}^*(u_i,r_i),$$
$$\chi_{i4j2}^*(u_i,r_i)\},$$

$$\phi_{ij1}(u_i,r_i)=\min\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\omega_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij3}(u_i,r_i)\},$$

$$\phi_{ij2}(u_i,r_i)=\min\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij4}(u_i,r_i)\},\qquad \phi_{ij3}(u_i,r_i)=\min\{\omega_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij5}(u_i,r_i)\},$$

$$\omega_{ij1}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j1})^2+(y_i-y_{j1})^2-r_i^2,\quad \omega_{ij2}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j2})^2+(y_i-y_{j2})^2-r_i^2,$$

$$\omega_{ij3}(u_i,r_i)=(\breve{r}_j-r_i)^2-(x_i-\breve{x}_j)^2-(y_i-y_j)^2,$$

$$\psi_{ij1}(u_i,r_i)=a_{j1}x_i+b_{j1}y_i+c_{j1},$$
$$a_{1j}=y_{j4}-y_{j3},\qquad b_{j1}=-(x_{j4}-x_{j3}),\qquad c_{1j}=-(a_{1j}x_{j3}+b_{1j}y_{j3}),$$

$$\psi_{ij2}(u_i,r_i)=a_{j2}x_i+b_{j2}y_i+c_{j2},$$
$$a_{j2}=y_{j6}-y_{j5},\qquad b_{j2}=-(x_{j6}-x_{j5}),\qquad c_{j2}=-(a_{j2}x_{j5}+b_{j2}y_{j5}),$$

$$\psi_{ij3}(u_i,r_i)=a_{j3}x_i+b_{j3}y_i+c_{j3},$$
$$a_{j3}=y_{j5}-y_{j4},\qquad b_{j3}=-(x_{j5}-x_{j4}),\qquad c_{j3}=-(a_{j3}x_5+b_{j3}y_5),$$

$$\psi_{ij4}(u_i,r_i)=a_{j4}x_i+b_{j4}y_i+c_{j4},$$
$$a_{j4}=y_{j3}-y_{j7},\qquad b_{j4}=-(x_{j3}-x_{j7}),\qquad c_{j4}=-(a_{j4}x_{j3}+b_{j4}y_{j3}),$$

$$\psi_{ij5}(u_i,r_i)=a_{j5}x_i+b_{j5}y_i+c_{j5},$$
$$a_{j5}=y_{j8}-y_{j6},\qquad b_{j5}=-(x_{j8}-x_{j6}),\qquad c_{j5}=-(a_{j5}x_{j6}+b_{j5}y_{j6}),$$

$$\chi_{i4j1}^*(u_i,r_i)=-\chi_{4j1}(u_i)-r_i,\qquad \chi_{i4j2}^*(u_i,r_i)=-\chi_{4j2}(u_i)-r_i,$$

(x_{j1},y_{j1}), (x_{j2},y_{j2}), (x_{j3},y_{j3}), (x_{j4},y_{j4}), (x_{j5},y_{j5}), (x_{j6},y_{j6}), (x_{j7},y_{j7}) и (x_{j8},y_{j8}) — координаты точек A, B, D, E, F, G, M и N соответственно (рис. 2), $\Phi_i(u_i,r_i)$, $\Phi_i^{CG}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ilh}^{CM}(u_i,r_i)$ — Ф-функции [2] для C_i и $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^2\setminus P)$, C_i и G [3], C_i и Q_{1j}; C_i и Q_{2j} [4]; C_i и Q_{3j}; C_i и Q_{4j}; C_i и C_{lg}; C_i и M_{lh} [4] соответственно.

Если $F_n(X^{n*})<nr$ и $F_{n-1}(X^{(n-1)*})=F_{n-1}(u^{(n-1)*},v^{(n-1)*})=(n-1)r$, где $v^{(n-1)*}=$ $=(r,r,\ldots,r)$, то решение задачи (1)–(2) достигается в точке $u^*=u^{(n-1)*}$.

Рассматриваемая задача относится к классу NP-трудных задач [4].

Для построения начальных точек область P покрывается многоугольной решеткой, у которой основной параллелограмм является квадратом S с длиной сторон, равной r. Пусть $k>n$ — количество квадратов, таких, что

$$S_i=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon a_i-\frac{1}{2}r\leqslant x\leqslant a_i+\frac{1}{2}r,\ b_i-\frac{1}{2}r\leqslant y\leqslant b_i+\frac{1}{2}r\right\}\subset P,$$

где (a_i,b_i) — координаты центра S_i, $i\in\mathrm{K}=(1,2,\ldots,k)$. Каждому S_i поставим в соответствие номер i, $i\in\mathrm{K}$. Сформируем вектор $p^i=(p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_n},\ldots,p_{i_k})\in\mathbb{R}^{2k}$, где

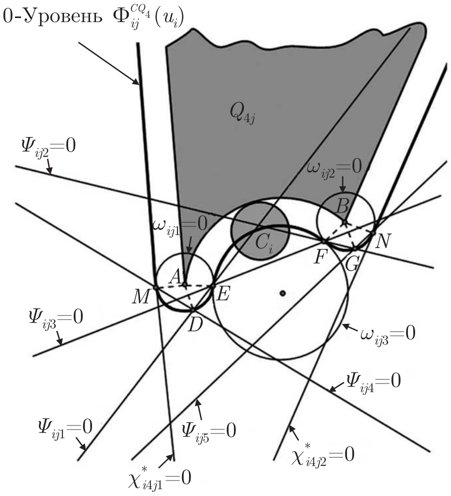


Рис. 2. 0-Уровень $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i)$

$p_{i_j} = (a_{i_j}, b_{i_j})$. Для того чтобы получить точку $X^{ni} \in W_n$, зададим $v^{ni} = (r/2, r/2, \ldots, r/2)$ и сформируем вектор $u^{ni} = (u_1^i, u_2^i, \ldots, u_n^i) \in \mathbb{R}^{2n}$, приравняв компоненты u^{ni} первым n компонентам $p^i = (\underbrace{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}}_{n}, \ldots, p_{i_k})$, т.е. $u^{ni} = ((a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), \ldots, (a_{i_n}, b_{i_n})) \in \mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, взяв (a_{i_j}, b_{i_j}) в качестве координат центра C_j, мы получим размещение C_j радиуса $r/2$, $j \in I_n$, в P без пересечений.

Очевидно, что число векторов $p^i \in \mathbb{R}^{2k}$ равно $k!$, т.е. все p^i формируют множество $\Pi \subset \mathbb{R}^{2k}$ перестановок без повторений. Множеству $\Pi \subset \mathbb{R}^{2k}$ соответствует множество $\mathrm{T} \subset \subset \mathbb{R}^{3n}$ начальных точек и, следовательно, множество $L \subset \mathbb{R}^{3n}$ локальных максимумов задачи (1)–(2). Поэтому перебор локальных максимумов на множестве L может быть сведен к перебору точек на множестве $\Pi \subset \mathbb{R}^{2k}$. Для того чтобы осуществить "направленный" перебор на множестве $\Pi \subset \mathbb{R}^{2k}$, используется следующая модификация метода сужающихся окрестностей (МСО) [6].

Этап настройки МСО. На данном этапе осуществляется поиск перспективных центров для следующего итерационного этапа.

Шаг 1. Генерируется случайная выборка $\Pi_0 \subset \Pi$, $\mathrm{card}(\Pi_0) = \lambda$, строится соответствующее множество $\mathrm{T}_0 = \{X^{nj}, j \in J_\lambda = (1, 2, \ldots, \lambda)\} \subset \mathrm{T}$ начальных точек и формируется соответствующее множество $L_0 = \{X^{nj*}, j \in J_\lambda\} \subset L$ локальных максимумов.

Шаг 2. Выбираются точки $X^{nj_l*} \in L_0$, $l \in \Omega = \{1, 2, \ldots, \omega\}$, такие, что $F_n(X^{nj_1*}) > > F_n(X^{nj_2*}) > \cdots > F_n(X^{nj_\omega*}) \geqslant \max\{F_n(X^{n*}) : X^{n*} \in L_0 \setminus \{X^{nj_l*}, l \in \Omega\}\}$. Таким образом, каждому локальному максимуму X^{nj_l*} соответствует точка $p^{j_l} \in \Pi_0$, $l \in \Omega$. Точки $p^{j_l} \in \Pi_0$ принимаются в качестве центров окрестностей $N_{0l} \subset \Pi_0$, $l \in \Omega$, радиуса $\rho^0 < \beta^*$, где β^* — оценка диаметра множества Π. Расстояние между точками p^i и p^j вычисляется согласно евклидовой метрике. Для того чтобы определить перспективные центры, генерируются случайные выборки $S_{0l} \subset N_{0l}$, $l \in \Omega$, $\mathrm{card}(S_{0l}) = \lambda$. Значение $\rho^0 = 0{,}25\beta^*$ позволяет определить "поведение" F_n вблизи локальных максимумов, соответствующих центрам p^{j_l} окрестностей $N_{0l} \subset \Pi_0$, $l \in \Omega$.

Шаг 3. Формируются множества $\mathrm{T}_{0l} \subset \mathrm{T}$ и $L_{0l} \subset L$, которые соответствуют $S_{0l} \subset N_{0l}$, $l \in \Omega$.

Шаг 4. Для каждого L_{0l} вычисляется математическое ожидание m_{0l} и среднеквадратическое отклонение σ_{0l}, $l \in \Omega$, значений F_n.

Шаг 5. Определяется точка $\widetilde{p}^0$, которая соответствует локальному максимуму $\widetilde{X}^{n0*}$, такому, что $F_n(\widetilde{X}^{n0*}) = \max\left\{F_n(X^{n*}), X^{n*} \in \bigcup\limits_{l=1}^{\omega} L_{0l}\right\}$.

Итерационный этап МСО. Итерационный процесс начинается со счетчика итераций, равного $k = 1$. Будем считать, что после k-итерации сформировано множество L_{ki}, вычислены m_{ki}, σ_{ki}, $i = 1, 2, 3$, и получена точка $\widetilde{p}^k$, которая соответствует локальному максимуму $\widetilde{X}^{nk*}$, такому, что $F_n(\widetilde{X}^{nk*}) = \max\left\{F_n(X^{n*}), X^{n*} \in \bigcup\limits_{i=1}^{3} L_{ki}\right\}$.

Шаг 1. Выбираются центры c_{ki} окрестностей N_{ki}, $i = 1, 2, 3$, следующим образом:

1) $c^{k1} = \begin{cases} \widetilde{p}^{k-1}, & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), \\ \widetilde{p}^{k-2}, & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) \leqslant F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$ если $k = 1$, то $c^{k1} = p^0$;

2) $c^{k2} = \begin{cases} c^{(k-1)1}, & \text{если} \qquad c^{k1} = \widetilde{p}^{k-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{X}^{n(k-1)*} \in L_{(k-1)1}, \\ c^{(k-1)2}, & \text{если} \quad \text{или} \quad c^{k1} = \widetilde{p}^{k-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{X}^{n(k-1)*} \in L_{(k-2)2}, \quad \text{или} \quad c^{k1} = \widetilde{p}^{k-2}, \\ c^{(k-1)3}, & \text{если} \qquad c^{k1} = \widetilde{p}^{k-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{X}^{nk*} \in L_{(k-1)3}, \end{cases}$

если $k = 1$, то $c^{k2} = p^{j_l}$, где p^{j_l} — центр окрестности N_{0l}, в которой получена точка p^0;

3) $c^{k3} = c^{(k-1)i}$, где $c^{(k-1)i}$ — центр окрестности $N_{(k-1)i}$, в которой получено значение $\max\{m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i}, i = 1, 2, 3\}$, $0 < \theta \leqslant 3$, если $k = 1$, то $i = 1, 2, \ldots, \omega$ (данный центр выбирается из гипотезы о том, что значения локальных максимумов F_n распределены по нормальному закону).

Шаг 2. Определяются радиусы ρ_{ki} новых окрестностей N_{ki}, $i = 1, 2, 3$, следующим образом:

$$\rho_{ki} = \begin{cases} \mu\rho_{(k-1)i}, & \text{если} \quad m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i} \leqslant f^*_{k-1}, \\ \dfrac{1}{\mu}\rho_{(k-1)i} \leqslant \rho_k, & \text{если} \quad m_{(k-1)i} + \theta\sigma_{(k-1)i} > f^*_{k-1}, \end{cases}$$

где

$$f^*_{k-1} = \begin{cases} F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}), & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), \\ F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) \leqslant F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \mu_1\rho_{k-1}, & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) \leqslant F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}) \leqslant F_n(\widetilde{X}^{n(k-3)*}), \\ \dfrac{1}{\mu_1}\rho_{k-1} \leqslant \beta^*, & \text{если} \quad F_n(\widetilde{X}^{n(k-1)*}) > F_n(\widetilde{X}^{n(k-2)*}), \end{cases}$$

$\mu = 0{,}8$ — коэффициент уменьшения (увеличения) радиуса окрестностей на каждом этапе МСО, $\mu_1 = 0{,}6$ — коэффициент, который гарантирует быстрое уменьшение радиуса окрестностей в случае отсутствия улучшений $\widetilde{X}^{nk*}$. Если $k = 1$, то $\rho_k = \rho_{k1} = \rho_{k2} = \rho_{k3} = \beta^*$.

Шаг 3. Генерируются случайные выборки $S_{ki} \subset N_{ki}$, строятся соответствующие множества $\mathrm{T}_{ki} \subset \mathrm{T}$, $L_{ki} \subset L$, вычисляются m_{ki}, σ_{ki}, $i = 1, 2, 3$, и определяется $\widetilde{p}^k$.

Шаг 4. Проверяются условия критерия остановки. Если число одинаковых значений F_n в каждой L_{ki}, $i = 1, 2, 3$, больше чем $0{,}6\lambda$, то процесс поиска новых перестановок заканчивается (следует отметить, что если радиус окрестностей приближается к минимальному, то количество локальных максимумов с равными значениями функции цели значительно увеличивается).

Шаг 5. Увеличивается счетчик итераций: $k \leftarrow k+1$.

Точки вида $X^{ni} = (u^{ni}, v^{ni}) \in \mathbb{R}^{3n}$ берутся в качестве начальных точек для вычисления локальных максимумов задачи (1)–(2). Вычисление локального максимума задачи (1)–(2) может быть сведено к решению последовательности задач нелинейного программирования вида

$$F_n(X^{nj*}) = \max_{X^n \in W_{ni_j}} F_n(X^n), \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad m \ll \eta, \tag{3}$$

где $W_{ni_j} \subset W_n$, $W_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\eta} W_{ni}$.

Для решения задачи (3) используется модификация метода возможных направлений [7] вместе со стратегией ε-активных неравенств [8, 9].

Для отыскания локального максимума используется стандартный итерационный процесс $X^{n(k+1)} = X^{nk} + tZ^k$, $k = 1, 2, \ldots, \zeta$, где $Z^k \in \mathbb{R}^{3n}$ — решение следующей задачи:

$$\max_{(\alpha^k, Z^k) \in G^k} \alpha^k, \tag{4}$$

$$G^k = \bigl\{(\nabla F_n(X^{nk}),\ Z^k) \geqslant \alpha^k,\ (\nabla \Psi_{k_j}(X^{nk}), Z^k) \geqslant w_{k_j},\ j = 1, 2, \ldots, \varsigma_k(\varepsilon_k),$$
$$-1 \leqslant z_i^k \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, 3n\bigr\}, \tag{5}$$

где $\Psi_{k_j}(X^{nk})$ — левая часть ε-активных неравенств из системы, которая выделена из системы (2) в точке X^{nk} и описывает текущую подобласть W_{ni_j}; $w_{k_j} = \alpha^k$, если $\Psi_{k_j}(X^{nk})$ — вогнутая функция, иначе $w_{k_j} = 0$. Задача (4)–(5) решается методом внутренней точки [10]. Переход от одной задачи типа (3) к другой осуществляется следующим образом. Пусть $\overline{X}^{n1} \in W_n$ — начальная точка. Тогда из системы (2) выбирается система, которая определяет подобласть $W_{ni_1} \subset W_n$, такую, что $X^{n1} \in W_{ni_1}$. Используя точку $\overline{X}^{n1}$ в качестве начальной точки, решаем задачу

$$F_n(X^{n1*}) = \max_{X^n \in W_{ni_1}} F_n(X^n).$$

Полученная точка X^{n1*} может быть локальным максимумом либо относительно всей области W_n, либо только относительно подобласти W_{ni_1}. Для того чтобы определить, является ли X^{n1*} локальным максимумом относительно W_n, необходимо исследовать все W_{ni_j} с $X^{n1*} \in W_{ni_j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, \eta\}$. Для этой цели из системы (2) выбираются все ε-активные неравенства в точке X^{n1*} и решается задача вида (4)–(5). В результате, если $\alpha > 0$, то X^{n1*} не является локальным максимумом задачи (1)–(2) и тогда вычисляется новая точка $\overline{X}^{n2} = (X^{n1*} + tZ) \in W_n$, в которой $F_n(X^{n1*}) < F_n(\overline{X}^{n2})$. После этого формируется новая система неравенств, которая определяет подобласть $W_{ni_2} \subset W_n$, такую, что $\overline{X}^{n2} \in W_{ni_2}$. Используя $\overline{X}^{n2}$ в качестве начальной точки, решаем задачу

$$F_n(X^{n2*}) = \max_{X^n \in W_{ni_2}} F_n(X^n).$$

Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен локальный максимум задачи (1)–(2).

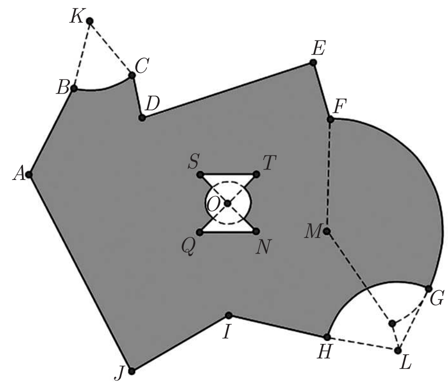
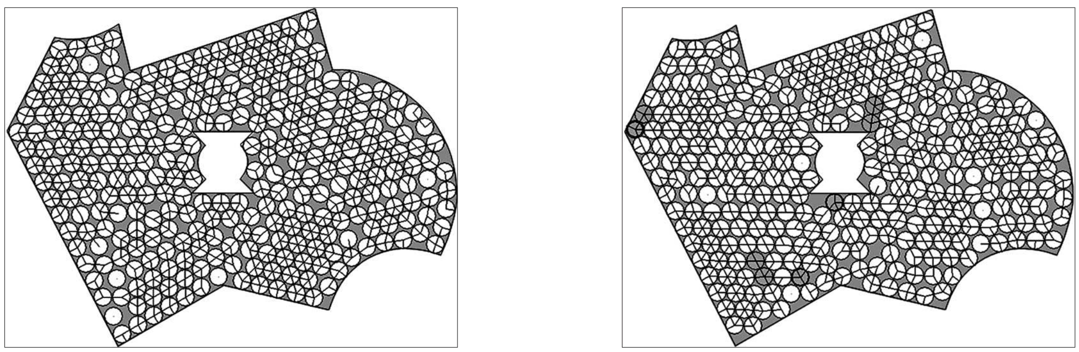


Рис. 3. Заданная невыпуклая область с зоной запрета



а *б*

Рис. 4. Результат упаковки кругов, $r = 1{,}5$

Численный пример. Пусть даны равные круги и невыпуклая область P с одной зоной запрета (рис. 3).

Вершины P_0 (см. рис. 3) имеют такие координаты: $A(10; 60)$, $B(17{,}6; 75{,}19)$, $C(28{,}15; 77{,}41)$, $D(30; 70)$, $E(60; 80)$, $F(62{,}88; 70)$, $G(80{,}26; 39{,}84)$, $H(62{,}34; 30{,}95)$, $I(45; 35)$, $J(28; 25)$. Граница P_0 формируется отрезками AB, CD, DE, EF, HI, IJ, JA прямых и следующими дугами: BC окружности радиусом 15 с центром $K(20; 90)$, FG окружности радиусом 20 с центром $M(63; 50)$ и GH окружности с радиусом 13 и центром $L(75; 28)$ (см. рис. 3). Зона запрета A_1 задана объединением кругов радиусом 4 с центром $O(45; 55)$ и треугольниками ONQ и OTS, заданными координатами вершин $O(45; 55)$, $N(50; 50)$, $Q(40; 50)$ и $O(45; 55)$, $T(50; 60)$, $S(40; 60)$ соответственно (рис. 3).

На рис. 4, *а* показана упаковка кругов при $r = 1{,}5$, соответствующая точке $u^* = u^{290*}$, а на рис. 4, *б* — упаковка кругов, соответствующая лучшему локальному максимуму X^{291*} задачи (1)–(2). Радиусы затемненных кругов на рис. 4, *б* не равны 1,5.

Таким образом, анализ исследований, посвященных задачам упаковки одинаковых кругов, показал, что большинство авторов в качестве области размещения рассматривают в основном области правильной формы, т. е. такие фигуры как квадрат, прямоугольник, треугольник и круг. Ни в одной из известных нам работ в качестве области размещения не рассматривается невыпуклая область с зонами запрета, граница которой образована отрезками прямых и дугами окружностей. Вычислительные эксперименты показали, что построенная математическая модель и предложенный метод решения позволяют получать результаты высокого качества. Сравнение полученных результатов с мировыми аналогами говорит об эффективности предложенного подхода. Следует отметить, что, используя разработанный подход, мы получили многие результаты, которые в мировой литературе приводятся как эталонные в задачах упаковки одинаковых кругов в квадрат и прямоугольник [11]. При этом, нам удалось улучшить результаты упаковок в трех задачах, приведенных в [12].

1. *Стоян Ю. Г., Чугай А. М.* Оптимизация упаковки одинаковых кругов в многосвязную область // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 64–68.
2. *Stoyan Yu. G.* Φ-function and its basic properties // Там само. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
3. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T.* Φ-function for complex 2*D* objects // 4OR Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Operat. Research Societies. – 2004. – **2 (1)**. – P. 69–84.
4. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G. et al.* Φ-function for 2*D* primary objects // Studia Informatica. – 2002. – **2 (1)**. – P. 1–32.
5. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – Москва: Мир, 1985. – 512 с.
6. *Стоян Ю. Г., Соколовский В. З.* Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наук. думка, 1980. – 208 с.
7. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 176 с.
8. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – Москва: Мир, 1985. – 509 с.
9. *Stoyan Yu., Chugay A.* Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region // Europ. J. of Operat. Research. – 2009. – **197**. – P. 446–455.
10. *Gondzio J.* HOPDM (version 2.12) – A Fast LP Solver Based on a Primal-Dual Interior Point Method // Ibid. – 1995. – **85 (1)**. – P. 221–225.
11. *Specht E.*, http://www.packomania.com.
12. *Birgin E. G., Martinez J. M., Ronconi D. P.* Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container // Europ. J. of Operat. Research. – 2005. – **160 (1)**. – P. 19–33.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 17.04.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. M. Chugay**

A mathematical model and a solution method of the packing problem of a maximal number of equal circles into a non-convex region with prohibited areas

The paper deals with the optimization packing problem of equal circles into a multiply connected region, whose frontier consists of arcs of circles and segments of straight lines. A mathematical model of the problem is constructed. On the ground of the characteristics of the mathematical model, a solution method is offered. The method consists of a combination of an algorithm generating starting points, a modification of the method of feasible directions to search for local maxima, and a modification of the decremental neighborhood method to search for an approximation to the global maximum. A numerical example is given.