УДК 517.9

Л. В. Фардигола

Проблема керованості крайовими умовами Неймана для рівняння струни на півосі

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

У роботі необхідні та достатні умови 0-керованості та ε-керованості одержано для керованої системи $w_{tt} = w_{xx}$, $w_x(0,t) = u(t)$, $x > 0$, $t \in (0,T)$, де $T > 0$, u — керування, обмежене наперед заданою сталою. Ці проблеми розглянуто в просторах Соболєва. Керування, що розв'язують ці проблеми, знайдено в явному вигляді.

Останнім часом питання керованості для хвильового рівняння вивчалися багатьма дослідниками (див. [1–11] та ін). Як правило, у цих роботах досліджувалася L^p-керованість для хвильового рівняння, де $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Розглянемо керовану систему

$$w_{tt} = w_{xx}, \qquad w_x(0,t) = u(t), \qquad x > 0, \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

де $T > 0$, а керування u задовольняє умову

$$u \in \mathcal{B}^U(0,T) = \{v \in L^2(0,T) \mid |v(t)| \leqslant U \text{ м.с. на } (0,T)\}, \tag{2}$$

де $U > 0$ задано. Керованість для рівняння струни на півосі було раніше вивчено в роботах [2, 11]. У роботі [2] досліджено керованість системи

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad w_x(0,t) = u(t), \qquad x > 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

де $q \geqslant 0$, $T > 0$ зафіксовано, а керування u задовольняє умову (2), тобто розглянуто керованість крайовими умовами Неймана за наперед заданий час T керуваннями, що обмежені наперед заданою сталою. У роботі [11] досліджено керованість крайовими умовами Діріхле за вільний час $T > 0$ для системи

$$w_{tt} = w_{xx}, \qquad w(0,t) = u(t), \qquad x > 0, \qquad t \in (0,T),$$

де $T = T_\varepsilon > 0$ та керування $u = u_\varepsilon \in \mathcal{B}^U(0,T_\varepsilon)$ вибираються з міркувань ε-наближення до нуля кінцевого стану системи (див. нижче означення 1). На жаль, у роботі [2] не вдалося розглянути випадок керованості крайовими умовами Неймана за вільний час $T > 0$ (як це було зроблено в [11]) тому, що у випадку $q > 0$ вплив керування u на кінцевий стан системи (3) описується досить складним оператором, що діє в просторах Соболєва H_0^s, норма якого істотно залежить від величини T.

У даній роботі керованість крайовими умовами Неймана за вільний час $T > 0$ розглянуто за умови $q = 0$, тобто для системи (1), яка є окремим випадком системи (3).

У роботі використано такі простори [12, 13]:

$$\mathcal{S} = \bigl\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, l \in \mathbb{N}\ \sup\{|D^m\varphi(x)|(1+|x|^2)^l \mid x \in \mathbb{R}\} < +\infty\bigr\},$$

$\mathcal{S}'$ — спряжений простір,

$$H_l^s = \bigl\{\varphi \in \mathcal{S}' \mid (1+|x|^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R})\bigr\},$$

$$\widetilde{H}^s = \bigl\{\varphi \in H_0^s \mid \varphi \text{ — парна}\bigr\},$$

$$\mathcal{H}^s = \bigl\{\varphi \in \mathcal{S}' \mid \operatorname{supp}\varphi \subset [0,+\infty) \text{ та } \Xi\varphi \in H_0^s\bigr\},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(1+|x|^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

де $D = -i\partial/\partial x$, $|\cdot|$ — евклідова норма, Ξ — оператор парного продовження, Ω — оператор непарного продовження. Далі ми скрізь вважаємо, що $s \leqslant 1$.

Умови 0- та ε-керованості.

Розглянемо керовану систему (1) за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \qquad w_t(x,0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{4}$$

де $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$. Нехай $\mathrm{W}^0 = \Xi w^0$, $\mathrm{W}(\cdot,t) = \Xi\begin{pmatrix} w(\cdot,t) \\ \partial w(\cdot,t)/\partial t\end{pmatrix}$. Очевидно, $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$, $\mathrm{W}(\cdot,t) \in \widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$ $(t \in (0,T))$. Легко зрозуміти, що керована система (1), (4) еквівалентна такій задачі Коші:

$$\frac{d\mathrm{W}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{W} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\delta(x) \end{pmatrix} u, \qquad t \in (0,T), \qquad \mathrm{W}(\cdot,0) = \mathrm{W}^0, \tag{5}$$

де $\mathrm{W}(\cdot,t) \in \widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$, $t \in [0,T]$, $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$, $u \in \mathcal{B}^U(0,T)$ — параметр. Тут δ — функція Дірака, $\delta = H'$, H — функція Хевісайда: $H(\xi) = 1$, якщо $\xi > 0$, та $H(\xi) = 0$, якщо $\xi < 0$.

Скориставшись [2, твердження 3.2], одержимо

$$\mathrm{W}(x,T) = E(x,T) * \begin{pmatrix} \mathrm{W}_0^0(x) - \partial^{-1}\Omega\mathcal{U}(x) \\ \mathrm{W}_1^0(x) - \Xi\mathcal{U}(x) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $E(x,T) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta(x+T) + \delta(x-T) & H(x+T) - H(x-T) \\ \delta'(x+T) - \delta'(x-T) & \delta(x+T) + \delta(x-T) \end{pmatrix}$, $\mathcal{U}(x) = u(x)(H(x) - H(x - T))$, $\partial^{-1}\Omega\mathcal{U}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Omega\mathcal{U}(\xi)\,d\xi$, $*$ означає згортку за x.

Для заданих $T > 0$ та $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ позначимо через $\mathcal{R}_T^U(w^0)$ множину таких $g \in \widetilde{H}^s$, що існує $u \in \mathcal{B}^U(0,T)$ таке, що розв'язок W задачі (5) задовольняє умову $\mathrm{W}(\cdot,T) = g$; $\mathcal{R}^U(w^0) = \bigcup_{T>0}\mathcal{R}_T^U(0,T)$.

Означення 1. Стан $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ називається 0-керованим, якщо 0 належить $\mathcal{R}^U(w^0)$, та ε-керованим, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}^U(w^0)$ в $\widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$.

Теорема 1. *Стан* $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ *є* ε*-керованим у тому і лише тому випадку, коли виконано три умови*

(i) $w^0 \in \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^0$;

(ii) $w_1^0 = w_0^{0\prime}$;

(iii) $\|w_1^0\|_{L^\infty(0,+\infty)} \leqslant U$.

Якщо умови (i)–(iii) виконано, то існує послідовність $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ *така, що*

$$T_n|_0^0(T_n)|^2 \to 0, \qquad \text{коли} \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

До того ж для послідовності $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, *яка задовольняє* (7), *керування* $u_n(t) = w_1^0(t)$ *м. с. на* $(0, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *розв'язують задачу* ε*-керованості.*

Доведення. Нехай *(i)–(iii)* виконано. Оскільки $w_0^0 \in \mathcal{H}^0$, то $\varliminf\limits_{x\to+\infty} x|w_0^0(x)|^2 = 0$. Знайдемо послідовність $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,+\infty)$ таку, що (7) виконано. Позначимо

$$w_0^n(x) = (H(x) - H(x - T_n))(w_0^0(x) - w_0^0(T_n)), \qquad x > 0,$$
$$w_1^n(x) = (H(x) - H(x - T_n))w_1^0(x), \qquad x > 0.$$

Маємо $w_1^n = w_0^{n\prime}$. Скориставшись [2, теорема 3.3], одержимо, що $0 \in \mathcal{R}_T^U(w^n)$ та керування $u_n(t) = w_1^n(t)$ м. с. на $(0, T_n)$ розв'язує проблему 0-керованості за час T_n. Позначивши $\mathrm{W}_0^n = \Xi w_0^n$, $\mathrm{W}_1^n = \Xi w_1^n$, $\widetilde{\mathrm{W}}_0^n = \mathrm{W}_0^0 - \mathrm{W}_0^n$, одержимо $\mathrm{W}_1^0(x) - \mathrm{W}_1^n(x) = \big(\operatorname{sgn} x \widetilde{\mathrm{W}}_0^n(x)\big)'$ та $\mathrm{W}(\cdot, T_n) = \begin{pmatrix} \delta(x+T_n) + \delta(x-T_n) \\ \delta'(x+T_n) - \delta'(x-T_n) \end{pmatrix} * \widetilde{\mathrm{W}}_0^n$. Отже,

$$|||\mathrm{W}(\cdot, T_n)|||^1 \leqslant 2\|\widetilde{\mathrm{W}}_0^n\|_0^1. \tag{8}$$

Скориставшись (7), матимемо, що $\|\widetilde{\mathrm{W}}_0^n\|_0^1 \to 0$, коли $n \to \infty$, тому $\mathrm{W}(\cdot, T_n) \to 0$, коли $n \to \infty$ в $\widetilde{H}^1 \times \widetilde{H}^0$.

Отже, 0 належить замиканню $\mathcal{R}^U(w^0)$ в $\widetilde{H}^1 \times \widetilde{H}^0$, тим більше, в $\widetilde{H}^s \times \widetilde{H}^{s-1}$. Тобто стан w^0 є ε-керованим.

Нехай стан w^0 є ε-керованим. Міркуючи так само, як у роботі [11, теорема 1.1] та враховуючи (6), робимо висновок, що $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists T_n > 0\ \exists u_n \in \mathcal{B}^U(0,T)$ такі, що $\|\mathrm{W}_0^0(x) - \partial^{-1}\Omega\mathcal{U}(x)\|_0^s + \|\mathrm{W}_1^0(x) - \Xi\mathcal{U}_n(x)\|_0^{s-1} \to 0$, коли $n \to \infty$, де $\mathcal{U}_n(t) = u_n(t)(H(t) - H(t - T_n))$. Отже, $\|\mathrm{W}_0^{0\prime}(x) - \Omega\mathcal{U}_n(x)\|_0^{s-1} \to 0$, коли $n \to \infty$. Тому умову *(ii)* виконано. Оскільки $\Xi\mathcal{U}_n \to \mathrm{W}_1^0$, коли $n \to \infty$ в $\mathcal{H}^{s-1}$, то $\Xi\mathcal{U}_n$ слабко збігається до W_1^0, коли $n \to \infty$ в $\mathcal{S}$ та $\big(L^2(\mathbb{R})\big)'$ (тому, що $\mathcal{S}$ щільно в $L^2(\mathbb{R})$). За теоремою Рісса одержуємо, що $\mathrm{W}_1^0 \in L^2(\mathbb{R}) = H_0^0$. Враховуючи *(ii)*, маємо $\mathrm{W}_0^0 \in \widetilde{H}^s$. Отже, *(i)* виконано. Оскільки $u_n \in \mathcal{B}^U(0,T)$, то звідси також випливає, що *(iii)* виконано. Теорему доведено.

З [2, теорема 3.3] випливає така теорема.

Теорема 2. *Стан* $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ *є 0-керованим у тому і лише тому випадку, коли виконано умови (i)–(iii) теореми 1 та умову:*

(iv) $\exists T > 0 \qquad \operatorname{supp} w_1^0 \subset [0, T]$.

У разі виконання цих умов керування, що розв'язує задачу 0-керованості, має вигляд $u(t) = w_1^0(t)$ м. с. на $(0,T)$.

Аналізуючи доведення теореми 1, одержуємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай стан $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ задовольняє умови (i)–(iii) теореми 1, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність така, що $T_n \to \infty$, коли $n \to \infty$. Нехай також виконано умови*

$$\mathrm{W}_0^n \in \widetilde{H}^1; \qquad \operatorname{supp} \mathrm{W}_0^n \subset [-T_n, T_n]; \qquad \|\Xi w_0^0 - \mathrm{W}_0^n\|_0^1 \to 0, \qquad \text{коли} \qquad n \to \infty. \tag{9}$$

Тоді керування $u_n(t) = \mathrm{W}_0^{n\prime}(t)$ на $(0, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язують проблему ε-керованості для стану w^0.

Далі ми вважаємо, що умови *(i)–(iii)* теореми 1 виконано. Побудуємо послідовність $\{\mathrm{W}_0^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{H}^1$, що задовольняє умови (9). Для цього знайдемо парну функцію $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ таку, що $\psi(x) = 1$, коли, $|x| \leqslant 1$, $\psi(x) = 0$, коли $|x| \geqslant 2$, $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, ψ може бути вибрана так:

$$\psi(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \in (-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty), \\ (x-2)^2(2x-1), & x \in (1,2), \\ -(x+2)^2(2x+1), & x \in (-2,-1). \end{array}\right. \tag{10}$$

Позначимо $\mathrm{W}_0^n(x) = \mathrm{W}_0^0(x)\psi(x/n)$, де $\mathrm{W}_0^0 = \Xi w_0^0$. Тоді, оскільки $(\|f\|_0^1)^2 \leqslant (\|f\|_0^0)^2 + (\|f'\|_0^0)^2$ (див. [13, гл. 1]), маємо

$$(\|\mathrm{W}_0^0 - \mathrm{W}_0^n\|_0^1)^2 \leqslant 2\int_n^{\infty} |\mathrm{W}_0^0(x)|^2 dx + 2\int_n^{\infty} |\mathrm{W}_0^{0\prime}(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{n}(\|\mathrm{W}_0^0\|_0^0)^2 \to \infty,$$
$$\text{коли} \qquad n \to \infty,$$

де $\alpha = \max\limits_{x \in [-2,2]} \{|\psi'(x)|\}$ (для функції (10) $\alpha = 1/4$). Отже, для $(\mathrm{W}_0^n)_{n=1}^{\infty}$ умови (9) виконано, тому за теоремою 3 керування $u_n(t) = (w_0^0(t)\psi(t/n))'$ на $(0, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язують проблему ε-керованості для стану w_0^0.

Релейні керування. Скориставшись результатами розділу 4 роботи [2], побудуємо послідовність релейних керувань, що розв'язують проблему ε-керованості. Інтерес до таких керувань викликано тим, що вони є найпростішими в реалізації.

Означення 2. Керування u називається релейним на $(0,T)$, якщо $|u(t)| = U$ м.с. на $(0,T)$ та u має скінченну кількість точок розриву.

Позначимо

$$\mathcal{B}_N^U(0,T) = \{u \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| = U \text{ м.с. на } (0,T), u(t) = 0 \text{ м.с. на } \mathbb{R} \setminus (0,T)$$
$$\text{та } u \text{ має не більше ніж } N \text{ точок розриву на } (0,T)\}.$$

Таким чином, множина $\bigcup_{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{B}_N^U(0,T)$ є множиною всіх релейних керувань на $(0,T)$.

У роботі [2] релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості за наперед заданий час $T > 0$, побудовано для системи (3) за умови $s < 1/2$. До того ж у цій роботі показано, що обмеження $s < 1/2$ є істотним. Тому ми його застосовуємо і для системи (1), яка є окремим випадком (3).

Нехай $s < 1/2$ та для $w^0 \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ умови *(i)–(iii)* теореми 1 виконано. Нехай також послідовності $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{\mathrm{W}_0^n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють умови теореми 3. Позначимо $\mathrm{W}_1^n(x) = \operatorname{sgn} x \mathrm{W}_0^{n\prime}(x)$. Отже, $\mathrm{W}^n = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_0^n \\ \mathrm{W}_1^n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^s \times \mathcal{H}^{s-1}$ задовольняє умови теореми 2. Позначимо $\omega_j^n = -j \int\limits_0^{\infty} x^{j-1} \mathrm{W}_0^n(x)\, dx$, $j = \overline{0, \infty}$, $n = \overline{1, \infty}$. Далі для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо степеневу проблему моментів Маркова

$$\int\limits_0^{T_n} t^j u(t)\, dt = \omega_j^n, \qquad j = \overline{0, K_n}, \tag{11}$$

де $u \in \mathcal{B}^U(0, T_n)$, $K_n \in \mathbb{N}$.

Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $K_n \in \mathbb{N}$ існує $T_n^* \in (0, T_n)$ таке, що проблема моментів (11) має роз'вязок $u_n \in \mathcal{B}_{K_n}^U(0, T_n^*)$ [14, 15]. Скориставшись [2, теорема 4.5], одержуємо, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існують $K_n \in \mathbb{N}$, $T_n^* \in (0, T_n)$ та роз'вязок $u_n \in \mathcal{B}_{K_n}^U(0, T_n^*)$ проблеми моментів (11) такі, що роз'вязок W_n задачі (5), який відповідає початковому значенню W^n та керуванню u_n на $(0, T_n^*)$, задовольняє умову $|||\mathrm{W}_n(\cdot, T_n^*)|||^s < 1/n$.

Враховуючи (8) та (9), робимо висновок, що релейні керування u_n на $(0, T_n^*)$ розв'язують проблему ε-керованості для стану w^0.

1. *Fardigola L. V.* On controllability problems for the wave equation on a half-plane // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2005. – **1**, No 1. – P. 93–115.
2. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant // SIAM J. Control. Optim. – 2008. – **47**, No 4. – P. 2179–2199.
3. *Фардигола Л. В., Халіна К. С.* Проблеми керованості для рівняння струни // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 939–952.
4. *Fattorini H. O.* Infinite dimensional optimization and control theory. – Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1999.
5. *Gugat M., Leugering G.* L^{∞}-norm minimal control of the wave equation: on the weakness of the bang-bang principle // ESAIM Control. Optim. Calc. Var. – 2008. – **14**, No 2. – P. 254–283.
6. *Gugat M., Leugering G., Sklyar G. M.* L^p-optimal boundary control for the wave equation // SIAM J. Control. Optim. – 2005. – **44**, No 1. – P. 49–74.
7. *Gugat M.* Optimal boundary control of a string to rest in finite time with continuous state // Z. angew. Math. und Mech. – 2006. – **86**. – P. 134–150.
8. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. – 2005. – **60**, № 6. – С. 89–114.
9. *Krabs W., Leugering G.* On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W_0^{1,p}$-controls for $p \in [0, \infty)$ // Math. Methods Appl. Sci. – 1994. – **17**. – P. 77–93.
10. *Negreanu M., Zuazua E.* Convergence of multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation // C. r. Math. Acad. Sci. Paris. – 2004. – **338**, No 5. – P. 413–418.
11. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **276**, No 1. – P. 109–134.
12. *Schwartz L.* Théorie des distributions. Vol. 1, 2. – Paris: Hermann, 1950 – 1951.
13. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. – Москва: Физматлит, 1994. – 336 с.
14. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – Москва: Наука, 1973. – 552 с.

15. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сб. – 1987. – **134**, № 2. – С. 186–206.

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 17.02.2009

L. V. Fardigola

The Neumann boundary control problem for the string equation on a half-axis

Necessary and sufficient conditions for null-controllability and approximate null-controllability are obtained for the control system $w_{tt} = w_{xx}$, $w_x(0,t) = u(t)$, $x > 0$, $t \in (0,T)$, where $T > 0$, u is a control bounded by a hard constant. These problems are considered in the Sobolev spaces. Controls that solve these problems are found explicitly.