УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

О неустойчивости решений динамических уравнений на временной шкале

В роботі наведено результати аналізу нестійкості динамічних рівнянь на часовій шкалі. Застосовність отриманого результату ілюструється на прикладі системи другого порядку.

Известные теоремы А. М. Ляпунова [1] и Н. Г. Четаева [2] о неустойчивости невозмущенного движения сформулированы и доказаны в терминах существования скалярной вспомогательной функции V. Эта функция должна быть убывающей и такой, чтобы начальные значения $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ величин x можно было выбирать такими, что $V_0 = V(t_0, x_0) > 0$. Динамические уравнения на временной шкале [3] являются предметом возрастающего интереса в последние два десятилетия в связи с тем, что они описывают широкий класс непрерывно дискретных по времени систем и допускают единую методологию их анализа.

Необходимые для данной работы результаты из математического анализа на временной шкале изложены в статье [3], а их доказательства — в [4]. Здесь лишь напомним следующие понятия.

Временной шкалой $\mathbb{T}$ является произвольное непустое замкнутое подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для любого $t \in \mathbb{T}$ оператор скачка вперед определяется формулой $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon s > t\}$. Оператор зернистости шкалы $\mathbb{T}$ имеет вид $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Под интервалом $[t_0, \infty)$ будем понимать множество $[t_0, \infty) \bigcap \mathbb{T}$. На $\mathbb{T}$ определяется Δ-производная вектора состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$: $x^\Delta(t)$ так, что при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ имеем $x^\Delta(t) = dx/dt$ и при $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ имеем $x^\Delta(t) = x(t+1) - x(t)$. Заметим также, что $x(\sigma(t)) = \mu(t)x^\Delta(t) + x(t)$. Если $G^\Delta(t) = g(t)$, то интеграл Коши от функции g на $\mathbb{T}$ определяется формулой

$$\int_a^t g(s)\Delta s = G(t) - G(a).$$

Постановка задачи. Рассматривается динамическое уравнение

$$x^\Delta = f(t, x), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \geqslant 0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $f\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция x и $t \in \mathbb{T}$. Предполагается, что $f(t, x) = 0$, если и только если $x = 0$ и решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ существует при всех $t \in [t_0, \infty] \bigcap \mathbb{T}$. Интервал $t \in [t_0, \infty]$ рассматривается замкнутым, так как исследуется неустойчивость невозмущенного движения.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $x^\Delta = dx/dt$ и задача (1), (2) является начальной задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \geqslant 0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $x^\Delta = \Delta x$ и задаче (1), (2) соответствует начальная задача для системы разностных уравнений

$$x(n+1) - x(n) = f(n, x(n)), \tag{5}$$

$$x(n_0) = x_0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Целью этой работы является получение условий неустойчивости нулевого решения динамических уравнений (1) на основе матричнозначной вспомогательной функции и ее Δ-производной на временной шкале.

Способ применения матричнозначной функции. Вместе с уравнениями (1) рассматривается матричнозначная функция

$$U(t, x) = [u_{ij}(t, x)], \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m, \qquad m < n, \tag{7}$$

где $u_{ii} \in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ и $u_{ij} \in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ при всех $i \neq j$. Построим функцию

$$V(t, x, \theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(t, x) \theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}^m_+, \tag{8}$$

и предположим, что $V\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ является Δ-дифференцируемой по t и непрерывно дифференцируемой по x в обычном смысле. В этом случае Δ-производная функции (8) вдоль решения $x(t)$ системы динамических уравнений (1) определяется формулой (ср. [5])

$$V^\Delta(t, x, \theta) = V_t^\Delta(t, x(\sigma(t)), \theta) + \int\limits_0^1 V_x'(t, x(t) + \omega\mu(t) x^\Delta(t), \theta)\, d\omega x^\Delta(t) =$$

$$= V_t^\Delta(t, x(\sigma(t)), \theta) + \int\limits_0^1 V_x'(t, x(t) + \omega\mu(t) f(t, x), \theta)\, d\omega f(t, x), \tag{9}$$

где V_t^Δ — Δ-производная функции (8) относительно $t \in \mathbb{T}$; V_x' — обычная частная производная функции (8) по $x \in D$, $D = \{\|x\| < H,\ H = \mathrm{const} > 0\}$.

Если элементы матричнозначной функции (7) не зависят от $t \in \mathbb{T}$, то в выражении (9) $V_t^\Delta(t, x(\sigma(t)), \theta) \equiv 0$ и вычисление Δ-производной функции $V(x, \theta)$ упрощается.

Например, пусть $V(x, \theta) = \sum\limits_{i=1}^n \theta_i x_i^2$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Введем вектор $w(x) = (\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \ldots, \theta_n x_n)$, тогда согласно формуле (9) получим

$$V^\Delta(x, \theta) = 2w(x) f(t, x) + \mu(t) w(f(t, x)) f(t, x).$$

Если $\theta_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $V(x) = \|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, то

$$V^\Delta(x) = 2x f(t, x) + \mu(t) \|f(t, x)\|^2.$$

Далее функцию (8) вместе с Δ-производной (9) будем называть функцией Ляпунова, если она разрешает задачу о неустойчивости состояния $x = 0$ динамических уравнений (1).

Теоремы о неустойчивости. Неустойчивость нулевого решения динамического уравнения (1) понимается в следующем смысле.

Определение 1. Нулевое решение $x = 0$ динамического уравнения (1) неустойчиво на $\mathbb{T}$, если существует $a \in \mathbb{T}$, $a \geqslant t_0$, и постоянная $b < \infty$ такие, что для любой пары чисел (δ, ε), не зависимых друг от друга ($\varepsilon \leqslant b$, $\delta < \varepsilon$), найдутся число $\tau > a$ и значения x_0, удовлетворяющие условию $\|x_0\| \leqslant \delta$ при $t = a$ и приводящие к соотношению $\|x(\tau)\| = \varepsilon$.

Теорема 1. *Если функция* (8) *является убывающей и ее* Δ*-производная* (9) *в силу уравнений* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$V^{\Delta}(t, x, \theta) \geqslant \psi^{\mathrm{T}}(\|x\|) D(t) \psi(\|x\|) \tag{10}$$

в области значений $(t, x) \in \mathbb{T} \times S$, $S \subset \mathbb{R}^n$, *где* $\psi \in K$*-классу Хана и* $m \times m$*-матрица* $D(t)$ *такова, что минимальное собственное значение* λ_m *матрицы* $(D^{\mathrm{T}}(t) + D(t))/2$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_m(s) \Delta s \to \infty \qquad \text{\textit{при}} \qquad t \to \infty,$$

то состояние $x = 0$ *динамических уравнений* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Неустойчивость состояния $x = 0$ уравнений (1) будет доказана, если установить, что при сколь угодно малом значении δ найдется решение $x(t)$, которое, начавшись в области $\|x_0\| < \delta$, за конечное время достигнет границы поверхности сферы $\|x\| = \varepsilon$. Пусть такое значение δ задано. Выберем начальные значения $x(t_0) = x_0$ так, что при $t = t_0$ верно неравенство $\|x_0\| < \delta$ и $V(t_0, x_0, \theta) > 0$. Далее выберем постоянную H_1 так, чтобы $V(t, x, \theta) < V(t_0, x_0, \theta)$ внутри сферы $\|x\| = H_1$. Решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ динамического уравнения (1) с такими начальными значениями либо достигнет поверхности сферы $\|x\|^2 = \varepsilon$ ($\varepsilon < H_2 < \infty$) за конечное время, либо останется в кольце $H_1 \leqslant \|x\|^2 \leqslant H_2$ при всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что сколь угодно долгое пребывание решения $x(t)$ в кольце невозможно. В самом деле, из неравенства (10) следует, что

$$V^{\Delta}(t, x, \theta) \geqslant \psi^{\mathrm{T}}(\|x\|) D(t) \psi(\|x\|) \geqslant \frac{1}{2} \psi^{\mathrm{T}}(\|x\|)(D^{\mathrm{T}}(t) + D(t)) \psi(t) \geqslant \lambda_m(t) \overline{\psi}(\|x\|), \tag{11}$$

где $\overline{\psi}(\|x\|) \leqslant \psi^{\mathrm{T}}(\|x\|) \psi(\|x\|)$ при всех $x \in \{x \colon H_1 \leqslant \|x\|^2 \leqslant H_2\}$ и функция $\psi \in K$-классу Хана. Из неравенства (11) находим, что

$$V(t, x, \theta) - V(t_0, x_0, \theta) = \int\limits_{t_0}^{t} V^{\Delta}(s, x(s), \theta) \Delta s \geqslant \overline{\psi}(\|x_0\|) \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_m(s) \Delta s. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $V(t, x, \theta)$ неограниченно возрастает с течением времени, что противоречит свойству убывающей функции $V(t, x, \theta)$. Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если функция* (8) *ограничена и ее* Δ*-производная* (9) *в силу уравнений* (1) *приводится к виду*

$$V^{\Delta}(t, x, \theta) = \chi(t) V(t, x, \theta) + W(t, x, \theta), \tag{13}$$

где $\chi(t) \in \mathcal{R}$ *и* $\liminf\limits_{t\to\infty} \chi(t) > 0$, *а* $W(t,x,\theta)$ *или тождественно равна нулю или в окрестности* S *состояния* $x = 0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{V(t,x,\theta)\to 0} \frac{W(t,x,\theta)}{V(t,x,\theta)} = 0 \tag{14}$$

равномерно по $t \in \mathbb{T}$, *то решение* $x = 0$ *динамического уравнения* (1) *неустойчиво на* $\mathbb{T}$.

Доказательство. При выполнении условия (14) и условия $\liminf\limits_{t\to\infty} \chi(t) > 0$ найдутся величины $\overline{\chi} > 0$ и $t_1 \in [t_0,\infty)$ такие, что $\chi(t) \geqslant \overline{\chi}$ при всех $t \in [t_1,\infty)$ и если $0 < \varepsilon < \overline{\chi}$, то существует $\delta_1 > 0$ такое, что $|W(t,x,\theta)| \leqslant \varepsilon V(t,x,\theta)$ при всех $t \in [t_0,\infty)$, если только $|V(t,x,\theta)| < \delta_1$. Учитывая это, условие (13) приведем к виду

$$V^{\Delta}(t,x,\theta) \geqslant \chi(t)V(t,x,\theta) + \varepsilon V(t,x,\theta) \geqslant (\chi(t)-\varepsilon)V(t,x,\theta) \geqslant (\overline{\chi}-\varepsilon)V(t,x,\theta) \tag{15}$$

при всех $t \in [t_1,\infty)\bigcap\mathbb{T}$. Так как функция $V(t,x,\theta)$ ограничена по условию теоремы, а функция $\chi(t)$ положительно регрессивная, то из неравенства (15) следует оценка

$$V(t,x,\theta) \geqslant e_{\overline{\chi}-\varepsilon}(t,t_1)V(t_1,x_1,\theta) \tag{16}$$

при всех $t \in [t_1,\infty)\bigcap\mathbb{T}$. Неравенство (16) ведет к противоречию с предположениями теоремы 2 о функциях $V(t,x,\theta)$ и $W(t,x,\theta)$ и, следовательно, при любых сколь угодно малых x_1, при которых $V(t_1,x_1,\theta) > 0$, наступит момент $t \geqslant t_1$, в который решение $x(t;t_1,x_1)$ достигнет границы сферы $\|x\| = \varepsilon$. Если $W(t,x,\theta) \equiv 0$, то неравенство (15) обращается в равенство и

$$V(t,x,\theta) = e_{\chi(t)}(t,t_1)V(t_1,x_1,\theta),$$

которое, как и выше, ведет к противоречию. Этим теорема 2 доказана.

Обсуждение результатов и примеры. Заметим, что теоремы 1 и 2 являются аналогом первой и второй теорем Ляпунова о неустойчивости для динамических уравнений на временной шкале. Они получены с помощью функции (7), которая определяется на плотных справа подмножествах временной шкалы $\mathbb{T}$. Ясно, что теоремы 1, 2 верны и в случае применения обычной вспомогательной функции из этого класса функций. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= y(x+y),\\ y^{\Delta}(t) &= -x(x+y). \end{aligned} \tag{17}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\mu(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и система (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(x+y),\\ \frac{dy}{dt} &= -x(x+y). \end{aligned} \tag{18}$$

Для функции $V(x,y) = x^2 + y^2$ имеем

$$\dot V(x(t),y(t))|_{(18)} = 0 \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения следует, что нулевое решение системы (18) устойчиво. В то же время на $\mathbb{T}$ имеем

$$V^{\Delta}(x(t),y(t))|_{(17)} = \mu(t)(x+y)^2(x^2+y^2). \tag{19}$$

Так как $0 < \mu(t) < \infty$ для любой временной шкалы $\mathbb{T}$, то из теоремы 1 следует, что состояние $x = y = 0$ системы (17) неустойчиво на $\mathbb{T}$.

П р и м е р 2. Пусть на временной шкале $\mathbb{T}$ задана система динамических уравнений

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= -p(t)y - q(t)x(x^2+y^2),\\ y^{\Delta}(t) &= p(t)x - q(t)y(x^2+y^2), \end{aligned} \tag{20}$$

где $q(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $p \in C_{\mathrm{rd}}$. Вместе с системой (20) рассмотрим функцию $V(x,y) = x^2+y^2$ и ее полную Δ-производную $V^{\Delta}(x,y)|_{(\cdot)}$, для которой нетрудно получить следующее выражение

$$V^{\Delta}(x,y)|_{(20)} = -2q(t)(x^2+y^2)^2 + \mu(t)[p^2(t)(x^2+y^2) + q^2(t)(x^2+y^2)^2], \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{21}$$

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\mu(t) = 0$ и

$$\frac{dV}{dx}(x,y) \leqslant -2q(t)(x^2+y^2)^2. \tag{22}$$

Отсюда следует, что решение $x = y = 0$ системы (20) на $\mathbb{R}$ асимптотически устойчиво. В то же время на временной шкале $\mathbb{T}$ динамика системы (20) более разнообразна. А именно, для зернистости $0 < \mu(t) < \mu^*$, при которой

$$-2q(t)(x^2+y^2)^2 + \mu(t)[p^2(t)(x^2+y^2) + q^2(t)(x^2+y^2)^2] < 0,$$

нулевое решение $x = y = 0$ системы (20) будет асимптотически устойчивым на $\mathbb{T}$. Для зернистости $\mu^* < \mu(t) < +\infty$, при которой

$$-2q(t)(x^2+y^2)^2 + \mu(t)[p^2(t)(x^2+y^2) + q^2(t)(x^2+y^2)^2] > 0,$$

нулевое решение $x = y = 0$ системы (20) неустойчиво на $\mathbb{T}$.

П р и м е р 3. Рассмотрим линейную систему динамических уравнений

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= x + y,\\ y^{\Delta}(t) &= x + y. \end{aligned} \tag{23}$$

Для функции $V(x,y) = xy$ на $\mathbb{R}$ имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2xy + (x^2+y^2) = 2V + (x^2+y^2) \tag{24}$$

и по теореме Ляпунова решение $x = y = 0$ системы (23) неустойчиво. На временной шкале $\mathbb{T}$ имеем

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(x,y) &= (xy)^{\Delta} = xy^{\Delta} + x^{\Delta}[y + \mu(t)y^{\Delta}] = 2xy + (x^2+y^2) + \mu(t)(x+y)^2 =\\ &= 2V + (x^2+y^2) + \mu(t)(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Так как $0 < \mu(t) < +\infty$, то решение $x = y = 0$ системы (23) неустойчиво при любой зернистости временной шкалы.

Теоремы об устойчивости, равномерной устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения динамического уравнения (1) приведены в работе [6].

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: в 6 т. – Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР. – 1956. – Т. 2. – С. 7–264.
2. *Четаев Н. Г.* Одна теорема о неустойчивости. – Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 221–224.
3. *Bohner M., Martynyuk A. A.* Elements of stability theory by A. M. Liapunov for dynamic equations on time scales // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory. – 2007. – **7**. – P. 225–251.
4. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: introduction with applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
5. *Peterson A., Tisdell C. C.* Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales // J. Differen. Equat. and Appl. – 2004. – **10**. – P. 1295–1306.
6. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* К теории устойчивости движения нелинейной системы на временной шкале // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**. – С. 776–782.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.01.2009

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On the instability of the solutions of dynamical equations on time scales

We present new results on the instability for dynamic equations on time scales. To demonstrate the applicability, we use some examples of dynamic equations of the second order.