

И. Ф. Киричок¹, О. А. Чернюшок²

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ПОДАТЛИВОЙ
НА СДВИГ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ АКТУАТОРАМИ И СЕНСОРАМИ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: term@inmech.kiev.ua;*

²*Национальный университет пищевых технологий,
ул. Владимирская, 68, 01601, Киев, Украина; e-mail: chernyshokolqa@ukr.net.*

Abstract. A problem on the forced resonant vibrations and dissipative heating of the hingedly fixed thermoviscoelastic cylindrical shell with piezoelectric actuators and sensors is stated. The in-plane shear strain and temperature dependence of the electromechanical characteristics of the material are taken into account. The influence of temperature dependence, in-plane shear strain, and heat exchange conditions on the surfaces on amplitude and temperature frequency characteristics of the forced vibration of the shell on the thermal failure of the system as well as the possibility of the active damping of the flexural vibration mode using the piezoactuators and sensors are studied.

Key words: resonance vibration, dissipative heating, inelastic material, piezoelectric actuators, sensors.

Введение.

Тонкостенные элементы (балки, пластинки, оболочки) из неупругих материалов, для которых характерны слоистость, анизотропия механических свойств, высокая податливость на сдвиг, находят широкое применение в качестве функциональных составляющих конструкций современной техники. В большинстве случаев они подвергаются воздействию интенсивных нестационарных и, в частности, гармонических нагрузок, которые сопровождаются высоким уровнем прогибов, механических напряжений и вибронагрева. Для гашения вынужденных колебаний таких элементов наряду с пассивными находят широкое применение методы активного демпфирования, когда в их структуру вводятся пьезоэлектрические составляющие, выполняющие роль сенсоров и актуаторов [4, 7, 18].

Результаты исследований в области активного управления стационарными и нестационарными колебаниями тонкостенных элементов конструкций пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами в изотермической постановке задачи отражены в работах [7, 8, 16 – 18 и др.]. Моделированию электротермомеханического поведения выполненных из неупругих пассивных (без пьезоэффекта) и пьезоактивных материалов слоистых тонкостенных элементов и решению конкретных задач о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве стержней, пластинок и оболочек посвящены многочисленные публикации [5, 12 – 15 и др.], подробный обзор которых представлен в статьях [9, 10]. Обзор работ по исследованию влияния температуры вибронагрева на работоспособность пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов при демпфировании с их помощью вынужденных колебаний тонкостенных элементов конструкций из пассивных вязкоупругих материалов представлен в [11]. В частности, основанные на теории оболочек Кирхгофа – Лява результаты о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих цилиндрических оболочек и их демпфировании пьезоактивными актуаторами и сенсорами содержатся в статьях [5, 13, 15].

В данной статье в рамках уточненной теории оболочек С.П. Тимошенко решается задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве моногармонически нагруженной шарнирно закрепленной цилиндрической оболочки из пассивного (без пьезоэффекта) термовязкоупругого материала и ее демпфирование пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. Исследуется влияние температурной зависимости пассивного и пьезоактивного материалов и учета деформации поперечного сдвига на динамические характеристики оболочки и электрические показатели сенсора при вынужденных осесимметричных колебаниях. Рассмотрена возможность деградации системы при достижении температуры виброразогрева критических значений.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку длины l , состоящую из пассивного слоя толщиной h_0 и жестко скрепленных с его внутренней и внешней поверхностями пьезоэлектрических слоев толщиной h_1 и h_2 , соответственно. Оболочку отнесем к цилиндрической системе координат α, θ, z с началом нормальной координаты $z = 0$ на срединной поверхности радиуса R внутреннего слоя. Пассивный слой h_0 является трансверсально-изотропным. Пьезоактивные слои h_1 и h_2 изготовлены из одной и той же пьезокерамики с противоположной поляризацией по толщине и характеризуются пьезомодулями $+d_{31}$ и $-d_{31}$, соответственно. При этом слой h_1 является актуатором, а слой h_2 – выполняет роль сенсора. Материалы слоев считаем вязкоупругими и их свойства зависимыми от температуры. Внешние и контактирующие с пассивным слоем внутренние поверхности пьезослоев покрыты сплошными бесконечно тонкими электродами. На внутренних электродах заданы электрические потенциалы $\varphi_{1,2}(\pm h_0/2) = 0$. Электродированные поверхности $z = h_0/2 + h_2$ и $z = -(h_0/2 + h_1)$ кольцевыми разрезами с координатами α_1, α_2 ($0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq l$) разделены на отдельные участки. Оболочка нагружена осесимметричным поверхностным давлением $q_z = q'_z(\alpha) \cos \omega t$, гармонически изменяющемся во времени t с амплитудой q'_z и круговой частотой ω , близкой к резонансной. Для нейтрализации его воздействия к электродам актуатора с той же частотой на участках $s = 2\pi R \Delta_\alpha$ ($\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$) противофазно подводится разность электрических потенциалов с амплитудой V_a . На участках $\alpha < \alpha_1, \alpha > \alpha_2$ электроды закорочены ($V_a = 0$). При гармоническом нагружении оболочки на разомкнутых электродах сенсора площадью s возникает разность электрических потенциалов V_s , которую необходимо определить экспериментально или на основании решения задачи электротермомеханики, используя электрическое граничное условие

$$\iint_s D_z ds = 0, \quad (1)$$

в котором D_z – нормальная составляющая электрической индукции.

Примем, что торцы оболочки свободны в тангенциальном и шарнирно закреплены в поперечном направлениях, а на ее граничных поверхностях выполняются условия конвективного теплообмена с внешней средой температуры T_c .

Двумерную модель электротермомеханического поведения рассматриваемой оболочки строим в предположении о справедливости по всему пакету слоев для механических переменных гипотез С.П. Тимошенко, учитывающих деформацию поперечного сдвига и инерцию поворота нормального элемента [2]. Относительно электрических величин в пьезослоях считаем, что составляющими D_α, D_θ вектора электрической индукции можно пренебречь. При этом из уравнения электростатики следует, что нормальная составляющая $D_z = \text{const}$ не зависит от толщинной координаты z [3]. Составляющие E_α, E_θ вектора электрической напряженности находятся из опреде-

ляющих уравнений $D_\alpha = 0$, $D_\theta = 0$. Вязкоупругие свойства материалов описываются концепцией комплексных модулей [3, 4]. Температуру виброразогрева оболочки считаем постоянной по толщине пакета слоев.

С использованием похода [3] и принятых предположений задача о электротермомеханическом поведении рассматриваемой оболочки относительно искомым комплексных величин сводится к решению:

уравнений гармонических колебаний (множитель $e^{i\omega t}$ опускаем)

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \rho_\bullet \omega^2 u = 0; \quad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho_\bullet \omega^2 w + q_z = 0; \quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - Q_\alpha + \rho_{\bullet\bullet} \omega^2 \psi_\alpha = 0; \quad (2)$$

определяющих соотношений для усилий и моментов

$$N_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_\alpha + N_E; \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_\alpha + C_{11}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_\alpha + N_E; \quad Q_\alpha = k_s C_{44}\varepsilon_{\alpha z}; \quad (3)$$

$$M_\alpha = K_{11}\varepsilon_\alpha + K_{12}\varepsilon_\theta + D_{11}\kappa_\alpha + M_E; \quad M_\theta = K_{12}\varepsilon_\alpha + K_{11}\varepsilon_\theta + D_{12}\kappa_\alpha + M_E;$$

зависимостей между амплитудными значениями деформаций и перемещений

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad \kappa_\alpha = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}; \quad \mathcal{G}_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad \varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \mathcal{G}_\alpha; \quad (4)$$

выражений для электрической индукции в пьезослоях

$${}^1D_z = -b_{33}V_a / h_1 + b_{31}(\varepsilon + \tilde{h}_1\kappa_\alpha); \quad {}^2D_z = -b_{33}V_s / h_2 - b_{31}(\varepsilon + \tilde{h}_2\kappa_\alpha); \quad (5)$$

усредненного за период колебаний и по толщине оболочки уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_0) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle \quad (6)$$

с диссипативной функцией

$$\langle W \rangle = N'_\alpha \varepsilon'_\alpha - N'_\alpha \varepsilon''_\alpha + N''_\theta \varepsilon'_\theta - N''_\theta \varepsilon''_\theta + M''_\alpha \kappa'_\alpha - M''_\alpha \kappa''_\alpha + \quad (7)$$

$$+ Q'_\alpha \varepsilon'_{\alpha z} - Q'_\alpha \varepsilon''_{\alpha z} + {}^1D''_z \gamma'_a - {}^1D'_z \gamma''_a.$$

Механические граничные условия таковы:

$$N_\alpha = 0; \quad w = 0; \quad M_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, l). \quad (8)$$

Граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности имеют вид

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (\alpha = 0, l); \quad T = T_0 \quad (t = 0). \quad (9)$$

В уравнениях (2) – (9) введены следующие обозначения:

$$C_{1n} = c_{1n} h_0 + c_{1n}^E (h_1 + h_2) + \gamma_{33} h_2; \quad C_{44} = G_{\alpha z} h_0 + c_{44}^E (h_1 + h_2);$$

$$K_{1n} = c_{1n}^E (h_{12} + h_{22}) + \gamma_{33} h_{22}; \quad D_{1n} = [c_{1n} h_0^3 + c_{1n}^E (h_{13} + h_{23}) + \gamma_{33} (h_1^3 + h_{23})] / 12;$$

$$c_{11} = E / (1 - \nu^2); \quad c_{12} = \nu c_{11}; \quad c_{11}^E = 1 / [s_{11}^E (1 - \nu_E^2)]; \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E; \quad \nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E;$$

$$c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^E); \quad b_{31} = d_{31} / [s_{11}^E (1 - \nu_E)]; \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T - 2d_{31} b_{31};$$

$$h_{n3} = 4h_n^3 + 6h_n^2 h_0 + 3h_n h_0^2; \quad \gamma_{33} = b_{31}^2 / b_{33}; \quad \rho_\bullet = \rho_1 (h_1 + h_2) + \rho_0 h_0; \quad n = 1, 2; \quad (10)$$

$$\rho_{\bullet\bullet} = (\rho_1 (h_{13} + h_{23}) + \rho_0 h_0^3) / 12; \quad \tilde{h}_{1,2} = (h_0 + h_{1,2}) / 2; \quad h_{n2} = \mp h_n (h_0 + h_n);$$

$$H = h_1 + h_2 + h_0; \quad N_E = b_{31} V_a; \quad M_E = -(h_1 + h_0) b_{31} V_a / 2; \quad \varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta;$$

$s_{kk}^E = s_{kk}'(1 - i\delta_{kk}^s)$, $d_{ik} = d_{ik}'(1 - i\delta_{ik}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon_{kk}'(1 - i\delta_{kk}^e)$ – зависящие от температуры комплексные податливости, пьезомодули и диэлектрические проницаемости пьезокерамики; $\nu = \text{const}$ – коэффициент Пуассона; $E = E' + iE''$ и $G_{\alpha z} = G_{\alpha z}' + iG_{\alpha z}''$ – модули Юнга и поперечного сдвига пассивного материала; k_s – коэффициент поперечного сдвига; $w = w' + iw''$ и $u = u' + iu''$ – амплитуды прогибов и продольных перемещений; ψ_x – угол поворота сначала недеформированного нормального элемента; $N_\alpha, N_\theta, Q_\alpha$ и M_α, M_θ – амплитуды усилий и изгибающих моментов; ρ_0, ρ_1 – удельные плотности пассивного и пьезоактивного материалов; λ, a – усредненные коэффициенты тепло- и температуропроводности; $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$; $\alpha_\pm, \alpha_{0,l}$ – коэффициенты теплообмена на соответствующих поверхностях и торцах оболочки; T_0 – начальная температура оболочки. Отметим, что при построении определяющих соотношений (3) для пьезосенсора вместо условия (1) использовано приближенное равенство $D_z = 0$ [13].

Подставляя значения 2D_z из (5) в условие (1), получим выражение

$$\frac{V_s}{h_2} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{31}(\varepsilon + \tilde{h}_2 \kappa_\alpha) d\alpha / \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{33} d\alpha \quad (11)$$

для определения электрического потенциала на электродах сенсора из решения краевой задачи термовязкоупругости.

2. Методика построения решения задачи.

Для решения поставленной задачи разрешающие уравнения (2) – (4) относительно комплексных искомым переменных $N_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha, u, w, \psi_\alpha$ представим в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{dN_\alpha}{d\alpha} &= -\rho_\bullet \omega^2 u; & \frac{dM_\alpha}{d\alpha} &= Q_\alpha - \rho_\bullet \omega^2 \psi_\alpha; \\ \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} &= \frac{1}{R} \left\{ \tilde{C}_{12} N_\alpha + \tilde{K}_{12} M_\alpha + \tilde{C}_{11} \frac{w}{R} + \tilde{N}_E \right\} - q_z - \rho_\bullet \omega^2 w; \\ \frac{du}{d\alpha} &= \hat{J}_c N_\alpha - \hat{J}_{DK} M_\alpha - \hat{\nu}_c \frac{w}{R} + \hat{N}_E; & \frac{dw}{d\alpha} &= -\psi_\alpha + J_{SD} Q_\alpha; \\ \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha} &= -J_{CK} N_\alpha + \hat{J}_D M_\alpha - \hat{\nu}_{KD} \frac{w}{R} + \hat{M}_E, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{J}_C &= 1/[C_{11}(1 - \nu_{KC}\nu_{KD})]; & \hat{J}_D &= 1/[D_{11}(1 - \nu_{KC}\nu_{KD})]; & \nu_{KC} &= K_{11}/C_{11}; \\ \nu_{KD} &= K_{11}/D_{11}; & \nu_C &= C_{12}/C_{11}; & \hat{\nu}_C &= (C_{12} - \nu_{KD}K_{12})\hat{J}_C; & \hat{\nu}_{KD} &= (K_{12} - \nu_C K_{11})\hat{J}_D; \\ J_{CK} &= \nu_{KD}\hat{J}_C; & J_{DK} &= \nu_{KC}\hat{J}_D; & J_{SD} &= 1/k_s C_{44}; & \hat{N}_E &= J_{CK}M_E - \hat{J}_C N_E; \\ \hat{M}_E &= J_{DK}N_E - \hat{J}_D M_E; & \hat{N}_E &= N_E + C_{12}\hat{N}_E + K_{12}\hat{M}_E; \\ \tilde{C}_{12} &= \hat{J}_C C_{12} - J_{CK}K_{12}; & \tilde{K}_{12} &= \hat{J}_D K_{12} - J_{DK}C_{12}; & \tilde{C}_{11} &= C_{11} - \hat{\nu}_C C_{12} - \hat{\nu}_{KD}K_{12}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу зависимости вязкоупругих электромеханических характеристик материалов оболочки от температуры задача термовязкоупругости (6) – (10), (12), (13) является взаимно – связанной и нелинейной. Для ее решения используется шаговый во времени метод [3]. С этой целью уравнения (12), (8) разделяем на действительную и мнимую части и записываем относительно искомым величин $u', u'', w', w'', \psi'_\alpha, \psi''_\alpha$,

$N'_\alpha, N''_\alpha, Q'_\alpha, Q''_\alpha, M'_\alpha, M''_\alpha$ в форме обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида. Полученную систему с граничными условиями на каждом временном шаге интегрируем с помощью типичной программы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На первом шаге решаем линейную задачу при изотермических ($T = T_0$) характеристиках материалов. Затем вычисляем диссипативную функцию (7) и решаем задачу теплопроводности (6), (9) методом конечных разностей с использованием явной схемы. Далее на основе полученного распределения температуры вычисляем жесткостные характеристики (10), (13) и процесс повторяем на следующем временном шаге. При реализации такой методологии решения задачи используются безразмерные пространственная $x = \alpha / l$ и временная $\tau = at / l^2$ координаты, параметр $\gamma_s = \alpha_{\pm,0,l} l / \lambda$, а также принимается $\nu_E = \text{const}$.

В дальнейшем рассмотрим случай механического гармонического нагружения оболочки поверхностным давлением постоянной амплитуды $q'_z(\alpha) = q_0$. При рассмотрении возможности активного демпфирования механических колебаний оболочки с известной амплитудой q_0 компенсирующее значение противофазно подведенного к актуатору электрического потенциала определяется формулой

$$V_a = k_a(\Delta) q_0 \quad (\Delta = \Delta_\alpha / l). \quad (14)$$

В случае неизвестного значения q_0 компенсирующий показатель V_a определяется на основании показателя сенсора V_s с использованием зависимости обратной связи [4]

$$V_a = G_{as} V_s. \quad (15)$$

В равенствах (14), (15) k_a, G_{as} – коэффициенты управления. Значения k_a, G_{as} , отвечающие максимальному подавлению колебаний оболочки, определяются формулами $k_a = |w_{q\max}| / |w_{E\max}|$, $G_{as} = |V_a^1| / |V_s^1|$, в которых $|w_{q\max}|$ и $|w_{E\max}|$ – вычисленные на частоте изотермического резонанса максимальные амплитуды прогиба на основании решения эталонных задач при $q_0 = 1$ Па, $V_a = 0$ и при $q_0 = 0, V_a = 1$ В, соответственно. Эталонные показатели сенсора V_s^1 и актуатора V_a^1 определяются формулами (11), (14) на основании решения задачи при $q_0 = 1$ Па, $V_a = 0$. Противофазность подведенного к актуатору электрического потенциала для демпфирования колебаний оболочки учитывается по закону $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

3. Результаты численных расчетов и их анализ.

Численные расчеты проведены в окрестности частоты первого резонанса изгибной моды колебаний, которая является наиболее энергоемкой при рассматриваемых способах нагружения оболочки. Несущий пассивный слой оболочки изготовлен из полимера [7], а пьезослой актуатора и сенсора – из вязкоупругой пьезокерамики ЦТСтБС – 2 [1]. Температурные аппроксимации экспериментально полученных вязкоупругих электромеханических модулей и теплофизические характеристики указанных материалов таковы:

$$\begin{aligned} E' &= (1672 - 118,6T) \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad E'' = (15,01 - 1,205T) \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad G_{\alpha z} = E / 2(1 + \nu); \\ s'_{11} &= 12,5(1 - 0,3077 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s'_{44} = 39,7(1 + 0,5458 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ \delta_{11}^s &= 0,16(1 + 0,6155 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0,4158 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}; \quad \bar{T} = T - T_0; \quad \nu_E = 0,37; \\ \delta_{44}^s &= 0,14(1 + 8,33 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-2}; \quad d'_{31} = -1,6(1 + 0,219 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ Кл}/\text{м}; \\ \delta_{31}^d &= 0,4(1 + 1,198 \cdot 10^{-2} \bar{T} + 1,823 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}; \quad \nu = 0,3636; \\ d'_{15} &= 4,5(1 + 0,9722 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ Кл}/\text{м}; \quad \delta_{15}^d = 0,35(1 + 0,3571 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= 18,5\varepsilon_0(1+0,4505\cdot 10^{-2}\bar{T})\cdot 10^2; \quad \delta'_{11} = 0,5(1+0,015\bar{T})\cdot 10^{-2}; \\ \varepsilon'_{33} &= 21\varepsilon_0(1+0,111\cdot 10^{-3}\bar{T}+0,8426\cdot 10^{-4}\bar{T}^2)\cdot 10^2; \quad \varepsilon_0 = 8,854\cdot 10^{-12}\text{Ф/м}; \\ \delta'_{33} &= 0,35(1+0,0119\bar{T}+0,119\cdot 10^{-3}\bar{T}^2)\cdot 10^{-2}; \quad \rho_0 = 929\text{кг/м}^3; \quad \rho_1 = 7520\text{кг/м}^3; \\ \lambda &= 0,45\text{Вт/(м}\cdot\text{°С)}. \end{aligned}$$

Пьезоактивные участки выбирались одинаковых размеров для актуатора и сенсора, середина которых совпадает с координатой максимальных прогибов оболочки. Геометрические параметры оболочки и толщины слоев таковы: $R = 0,2\text{ м}$; $l = 0,2\text{ м}$; $h_1 = h_2 = 0,1\cdot 10^{-4}\text{ м}$; $h_0 = 0,04\text{ м}$. Коэффициент поперечного сдвига $k_s = 5/6$ [2].

На рис. 1 в зависимости от безразмерного параметра Δ ширины кольцевого актуатора показаны кривые 1, 2 изменения коэффициента управления k_a (сплошные линии), максимальных прогибов $\tilde{w}_E = |w(0,5l)|\cdot 10^6\text{ м}$ (штриховые линии) при подводе к актуатору разности электрических потенциалов $V_a = 1\text{ В}$ ($q_0 = 0$) и $\tilde{w}_q = |w(0,5l)|\cdot 10^7\text{ м}$ (штрих-пунктирные линии) при поверхностном давлении $q_0 = 1\text{ Па}$ ($V_a = 0$). Кривые 1 получены на основании решения задач о вынужденных колебаниях оболочки в рамках гипотез Кирхгофа – Лява на частоте резонанса $\omega = 9\cdot 10^3\text{ с}^{-1}$, а кривые 2 – при учете деформации поперечного сдвига на частоте резонанса $\omega = 8,8\cdot 10^3\text{ с}^{-1}$. Соответствующие зависимости от параметра Δ для эталонного показателя $\tilde{V}_s^1 = V_s^1\cdot 10^3\text{ В}$ сенсора (штриховые кривые), а также коэффициента обратной связи $\tilde{G}_{as} = G_{as}\cdot 10^{-3}$ (сплошные кривые) показаны на рис. 2.

Анализ кривых на рис. 1, 2 показывает, что по сравнению с результатами решения задачи в классической постановке учет деформации поперечного сдвига приводит к уменьшению резонансной частоты и амплитуды прогиба w_E , обусловленного электрической нагрузкой, и увеличению коэффициентов k_a, G_{as} и амплитуды w_q при действии механической нагрузки. Ниже расчеты проведены для оболочки с актуатором и сенсором относительной ширины $\Delta = 1$.

На рис. 3 – 5 представлены кривые 1, 2 частотных зависимостей максимальных значений безразмерной амплитуды прогиба $\hat{w} = |w(0,5l)|/h_0\cdot 10^4$, установившейся ($\tau = 1,0$) температуры диссипативного разогрева $T_m = T(0,5l)$ и показателя сенсора V_s , соответственно. Расчеты выполнены для амплитуды $q_0 = 0,4\cdot 10^4\text{ Па}$ поверхностного давления и параметра теплообмена $\gamma_s = 5$. Кривые 1 соответствуют решению задачи в классической постановке, а кривые 2 – при учете деформации поперечного сдвига. Штриховые кривые соответствуют изотермическим характеристикам материалов, а сплошные – случаю их зависимости от температуры.

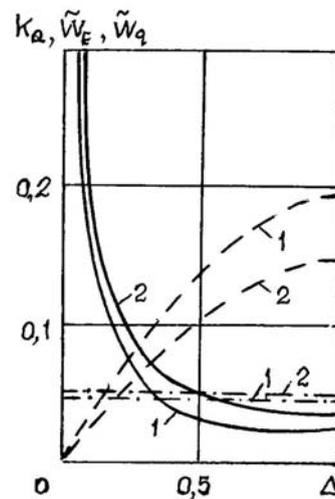


Рис. 1

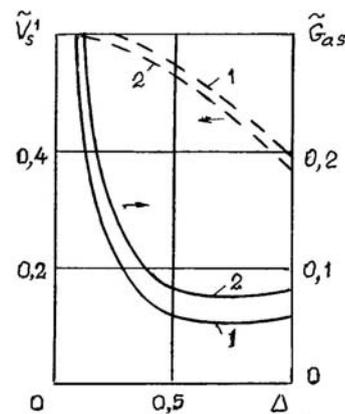


Рис. 2

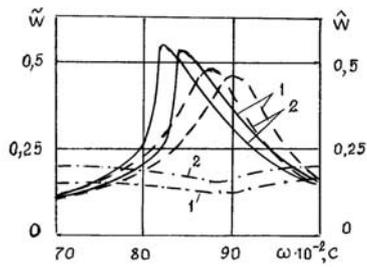


Рис. 3

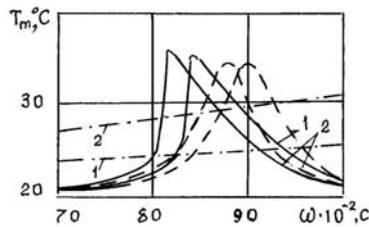


Рис. 4

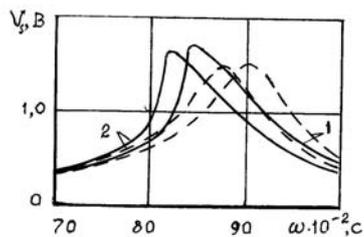


Рис. 5

Штрихпунктирные кривые получены при совместном нагружении оболочки поверхностным давлением указанной амплитуды и компенсирующим его подведенным к актуатору в противофазе электрическим потенциалом $V_a = 95,6$ В (кривые 1) или $V_a = 128,3$ В (кривые 2), рассчитанными по формулам (14), (15). Из рис. 3 – 5 видно, что учет деформации поперечного сдвига характеризуется смещением частотных зависимостей представленных величин в сторону уменьшения частоты резонанса, некоторым повышением прогиба и температуры виброразогрева и снижением показателя сенсора на уточненном резонансе. Учет зависимости электро-механических свойств материалов от температуры приводит к дальнейшему смещению частотных характеристик указанных величин в сторону уменьшения частоты резонанса и увеличению числовых значений прогиба и температуры на этой частоте. Активное демпфирование колебаний оболочки сопровождается существенным снижением прогибов и в меньшей степени температуры виброразогрева, особенно в случае задачи в уточненной постановке. Последнее объясняется вкладом в диссипативную функцию членов с пьезоэлектрическими модулями и большим значением показателя V_a актуатора.

При высоких амплитудах электро-механического гармонического нагружения и определенных условиях теплообмена с окружающей средой температура виброразогрева тонкостенных составных

элементов из неупругих пассивных и пьезоактивных материалов может достигать критического значения T_k , когда система деградирует из-за размягчения пассивного или деполяризации пьезоактивного материалов (точка Кюри). Поэтому необходимо определить критические значения механической q_k или электрической V_k нагрузок, отвечающих критическому значению T_k установившейся температуры, а также критическое время τ_k работоспособности системы при действии нагрузки, превышающей критическую. Для конкретности примем, что деградация системы наступает при достижении температуры $T_k = 120^\circ C$ хотя бы в одной точке оболочки.

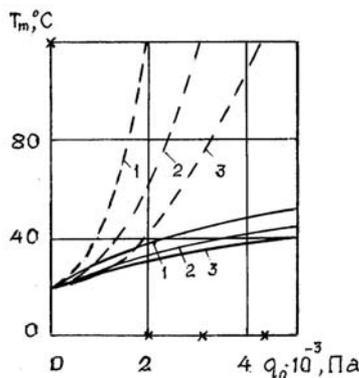


Рис. 6

На рис. 6 показаны кривые 1 – 3 зависимости максимальной стационарной температуры виброразогрева T_m в среднем сечении оболочки от амплитуды механической нагрузки q_0 , рассчитанные на частоте уточненного изотермического резонанса $\omega = 8800 c^{-1}$ для параметров $\gamma_s = 0, 1; 0, 25; 0, 5$ при изотермических (штриховые линии) и температурнозависящих (сплошные линии) характеристиках материалов. Для изотермической задачи критическому значению температуры T_k отвечают обозначенные крестиками на оси абсцисс критические амплитуды механической нагрузки q_k . Зависимость

q_k от параметра γ_s показана кривой на рис. 7. Расчеты этой зависимости в классической постановке задачи на частоте резонанса $\omega = 9000 \text{ с}^{-1}$ совпадают с результатами рис. 7. Из рис. 6, 7 следует, что при осесимметричных колебаниях рассматриваемой оболочки на частоте изотермического резонанса интенсификация условий теплообмена и учет зависимости электромеханических модулей материалов от температуры (сплошные линии) приводит к увеличению критических значений q_k амплитуд механической загрузки, при которой система деградирует.

При нагрузках с амплитудой $q \geq q_k$ существует критическое время τ_k , когда температура виброразогрева достигает критического значения T_k не достигая стационарного режима. На рис. 8 представлены кривые 1–4 эволюции во времени максимальной температуры виброразогрева, рассчитанные в изотермической постановке задачи на частоте $\omega = 8800 \text{ с}^{-1}$ для амплитуд механической нагрузки $q_0 = (0,275; 0,325; 0,375; 0,4) \cdot 10^4 \text{ Па}$ с параметром теплообмена $\gamma_s = 0,4$. Крестиками обозначены критические значения T_k на оси ординат и τ_k – на оси абсцисс. Зависимости амплитуды нагружения $q_0 \geq q_k$ (q_k обозначены штрих-пунктирными линиями) от критического параметра времени τ_k представлены кривыми 1, 2 на рис. 9, рассчитанными с параметрами $\gamma_s = 0,15; 0,4$, соответственно. Эти кривые являются аналогом кривой Велера из теории циклического разрушения материалов и характеризуют процесс тепловой деградации системы при нагрузках, превышающих критические. Сравнение между собой кривых 1 и 2 показывает, что критическое время τ_k увеличивается при интенсификации теплообмена на поверхностях оболочки и уменьшается при увеличении нагрузки.

Закключение.

Представлена постановка и численное решение задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой цилиндрической оболочки с пьезоэлектрическими актуатором и сенсором при учете деформации поперечного сдвига, инерции поворота и зависимости свойств материалов от температуры. Для шарнирно закрепленной оболочки численно исследовано влияние деформации сдвига, температурной зависимости вязкоупругих электромеханических характеристик материалов и условий теплообмена на амплитудно- и температурно-частотные характеристики первой изгибной моды колебаний при гармоническом нагружении, а также критические значения амплитуд механической нагрузки, при которых температура достигает точки деградации и система теряет работоспособность. Показана возможность активного демпфирования оболочки пьезоэлектрическими актуатором и сенсором при неизвестной нагрузке.

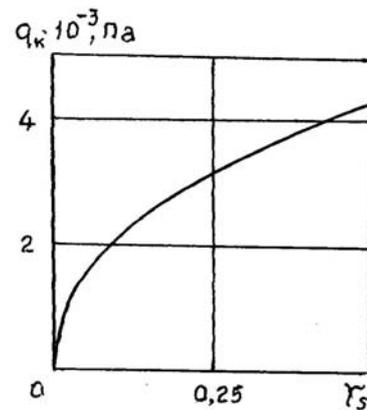


Рис. 7

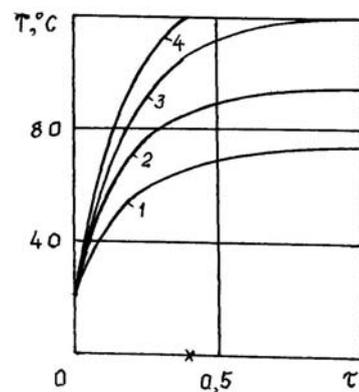


Рис. 8

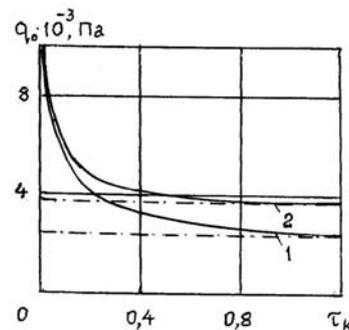


Рис. 9

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет финансирования бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої термов'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними актуатором і сенсором при врахуванні деформації поперечного зсуву і температурної залежності електромеханічних характеристик матеріалів. Досліджено вплив температурної залежності, деформації поперечного зсуву та умов теплообміну на амплітудно- і температурночастотні характеристики вимушених коливань оболонки, теплове руйнування системи та можливість активного демпфування згинної моди коливань за допомогою п'єзоелектричних актуатора і сенсора.

1. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 7. – С. 70 – 74.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 516 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В., Пересунько Н.В. Резонансные осесимметричные колебания и дисипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – **46**. – С. 132 – 140.
6. Нестеренко Н.П., Червинко О.П., Сенченков И.К. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вест. нац. техн. ун-та «ХПИ» – 2002. – № 9. – С. 3 – 8.
7. Blaguenon A., Lene F., Bernadou M. Active control a beam a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – **8**. – P. 116 – 124.
8. Gabbert U., Tzou H.S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 384 p.
9. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F. Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating-Up of Viscoelastic Thin-Walled Elements (Review) // Int. App. Mech. – 2000. – **36**, N 2. – P. 174 – 195.
10. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic Thin-Walled Piezoelements (Review) // Int. App. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 182 – 212.
11. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
12. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V. Forced Vibrations and Dissipative Heating of Hinged Flexible Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators under Shear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 1. – P. 85 – 93.
13. Kirichok I.F. Resonant Axisymmetric Vibrations and Vibrational Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers Subject to Electromechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 567 – 573.
14. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Forced Vibrations and Self-Heating of a Flexible Viscoelastic Beam with Piezoelectric Sensor and Actuators with Account of Shear Strain // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 568 – 576.
15. Kirichok I.F., Karnaukhova T.V. Forced Axisymmetric Vibrations and Self-Heating of Thermoviscoelastic Cylindrical Shells with Piezoelectric Actuators // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 10. – P. 1132 – 1138.
16. Tani J., Takagi T., Qui J. Intelligent material systems: Application of functional materials // App. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N 8. – 505 – 521.
17. Tzou H.S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 400 p.
18. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.

Поступила 07.05.2019

Утверждена в печать 09.07.2020