

Б. Н. Кифоренко, Я. В. Ткаченко

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖЕНИЕМ В АТМОСФЕРЕ**

*Институт механики им. С.П Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: bkifor@ukr.net*

Abstract. The problems of motion control of the different types of aircraft in the atmosphere are studied. It is found that the use of the invariant control properties increases significantly the efficiency of the functioning of the jet propulsion system, especially for the aircraft with high values of coefficients of the aerodynamic resistance.

Key words: invariant control, singular control, aircraft, rockets, jet propulsion system.

Введение.

Формулировка любой вариационной задачи содержит как информацию о функционировании управляемого объекта, представленную его уравнениями движения, так и конкретные граничные условия и функционал, величина которого используется для оценки качества управления. Если указанная цель достижима, управляющие функции, обеспечивающие ее достижение, зависят как от краевых условий, так и от функционала задачи. Вместе с тем существует несколько классов вариационных проблем, необходимые условия оптимальности которых содержат соотношения между управляющими функциями, инвариантные по отношению к изменению краевых условий и функционала, составляющих телеологическую часть информации любой вариационной задачи [4].

Инвариантность указанных соотношений нарушает всеобщий принцип причинной обусловленности решения каждой конкретной задачи. Это противоречие требует как специального анализа причин этой инвариантности, так и выяснения природы тех свойств объекта, которые эти соотношения выражают. Отсутствие ответов на эти вопросы вызывает недоверие к полученному решению, обоснованное *principium sive lex rationis sufficientis* Лейбница: «Ни одно явление не может оказаться истинным или действительным, ни одно утверждение справедливым, – без достаточного основания, почему именно дело обстоит так, а не иначе ...», позволивший получить решения практически интересных задач ракетодинамики [4, 6]. Анализ полученных с использованием именно этого метода классических задач ракетодинамики [10] позволил сформулировать принцип конструктивного совершенствования ракет, устанавливающий рациональный выбор типа ракетного двигателя в процессе улучшения удельных характеристик как двигателя, так и аэродинамических характеристик корпуса ракеты [14].

Понятие «инвариантность» в качестве научного термина введено в теорию автоматического управления Г.И. Щипановым в 1939 г. [13]. В [8, 9] получены условия инвариантности, т.е. независимости одной или нескольких регулируемых величин от внешних возмущений, проанализированы причины появления инвариантных свойств в оптимальном управлении динамическими системами и обсуждены теоретические и прикладные аспекты проблемы. Введем в рассмотрение новое понятие – *общесистемная инвариантность как способ согласования управляющих воздействий, не зависящий от цели и оценки качества управления* в каждом конкретном случае.

Исследование эффективности инвариантного управления проведем путем оценки результатов управления с энергетическими затратами, обеспечивающими получение этих результатов. Ведь еще В. И. Вернадский [2] отмечал: «Каждое природное тело и каждое природное явление имеет свое материально-энергетическое специфическое пространство». Особенно эффективными инвариантные управления оказались при управлении избыточно управляемыми динамическими системами, у которых число управляющих функций не меньше количества уравнений движения, в которые эти управления входят. Решение ряда практически интересных задач механики полета, полученное, например, в работах, [1, 3, 7, 15, 17 – 19], подтвердило эффективность использования инвариантного управления. В этих публикациях установлено, что использование инвариантных управлений особенно эффективно при движении ракет в атмосфере.

В работах [4, 5] проанализирована природа инвариантных соотношений и указано, что за повышение эффективности управления приходится платить усложнением процесса вычисления оптимальных траекторий, поскольку соответствующие задачи оказываются вырожденными по Тихонову [11]. Указанные трудности удалось преодолеть путем использования теории сингулярных управлений [15].

В разделе 1 исследуется использование инвариантного управления космическим аппаратом при движении в центральном гравитационном поле. В разделе 2 приведен анализ особенностей управления движением тела переменной массы под воздействием гравитационных сил и силы атмосферного сопротивления. Результаты исследования эффективности инвариантного управления при подъеме – разгоне самолета вертикального взлета и посадки приведены в разделе 3.

1. Инвариантные управления.

Инвариантные управления эффективны при управлении движением тела переменной массы в произвольных силовых полях. Рассмотрим динамическую систему, описывающую изменение состояния объекта $\mathbf{x} \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ под действием управления $\mathbf{u} \in U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

Определение. Динамическая система называется избыточной по управлению, если количество управляющих функций r больше числа уравнений движения ($r > n$).

Избыточные системы весьма часто встречаются в задачах механики, робототехники, в экономических и экологических модельных задачах, в теории дифференциальных игр, при моделировании биологических процессов.

1.1. Исследование инвариантных управлений в вариационных задачах. Пусть для системы (1) сформулирована вариационная задача о переводе объекта из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в конечное состояние $\mathbf{x}(t_f)$ с минимальным значением функционала $J(\mathbf{x}(t_f), t_f)$. Для определения оптимальных управлений по принципу максимума из условия: $\mathbf{u}(t) = \arg \max H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ необходимо решить систему r уравнений:

$$\frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial u_r} = 0, \quad (2)$$

где $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ – гамильтониан системы (1):

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3)$$

Система (2) линейна и однородна относительно компонент вектора $\boldsymbol{\psi}$, поскольку компоненты этого вектора входят в выражение функции $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ в первой степени.

Из постулируемой принципом максимума нетривиальности этих компонент следует необходимость выполнения условия $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_r} & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}.$$

По определению $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq r$, следовательно при $r < n$ условие $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$ выполнено. При $r \geq n$ для выполнения условия $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$ необходимо:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{n-1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{n-1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{n+1}} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_r} & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_r} & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Указанные выражения не зависят от краевых условий и функционала задачи. Более того, они могут быть выписаны даже без формулировки какой-либо вариационной проблемы для объекта, функционирование которого описывается системой дифференциальных уравнений (1), достаточно иметь в распоряжении уравнения (1). Следовательно, неравенство $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$ инвариантно относительно условий оптимизируемого маневра. Таким образом, если $r \geq n$, уравнения Эйлера этой задачи имеют $r - n + 1$ первых интегралов с нулевыми значениями постоянных интегрирования вида (4).

2. Исследование инвариантных управлений движением тела переменной массы.

Оценка эффективности инвариантного управления особенно актуальна для ракет-носителей. Современные и перспективные носители должны начинать подъем в плотных слоях атмосферы. Их двигатели на конечном этапе выведения спутника на низкие монтажные орбиты работают в практически полностью разряженной атмосфере. Последнее особенно актуально для одноразовых носителей. Анализ результатов решения многих практически интересных задач, в частности, для ракет-носителей Ариан 5, 6 (см. напр. [16]), показал, что преодоление указанных трудностей требует включения в состав оптимальной траектории сингулярных дуг [15]. Проиллюстрируем сказанное на примере классической задачи Годдарда о подъеме ракеты до максимальной высоты при вертикальном движении в атмосфере. Уравнения движения представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v; \quad h(0) = 0; \quad -h(t_f) \rightarrow \min; \\ \dot{v} &= \frac{a_0 T - F(h, v)}{m} - g(h); \quad v(0) = 0; \quad v(t_f) = \text{opt}; \\ \dot{m} &= -a_0 T / V_0; \quad m(0) = 1; \quad m(t_f) = m_\pi + \gamma a_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где V_0 – максимальная скорость реактивной струи; g_0 – гравитационное ускорение в точке старта; γ – удельная масса двигательной системы.

Высота h в системе (5) отнесена к $V_0^2 g_0^{-1}$, скорость v – к V_0 , время – к $V_0 g_0^{-1}$, $g(h)$ – к g_0 . Тяга T и сила сопротивления F отнесены к максимальной тяге T_0 , при этом $a_0 = T_0 / (g_0 M_0)$. Время подъема t_f , максимизируемая конечная высота и скорость не заданы. Соответствующие условия трансверсальности: $H(t_f) = 0$; $\psi_h(t_f) = 1$; $\psi_v(t_f) = 0$. Функция H задачи линейна по управлению

$$H = H_0 + a_0 H_1 T; \quad H_0 = \psi_h v - \psi_v \left(\frac{F}{m} + g \right); \quad H_1 = \frac{\psi_v}{m} - \frac{\psi_m}{V_0}. \quad (6)$$

На особом участке должны выполняться соотношения

$$H_0 = 0; \quad H_1 = 0; \quad \dot{H}_1 = \left[\frac{\psi_h}{m} - \psi_v \left(\frac{F}{v} F_v \right) \right] = 0; \quad (7)$$

$$S(m, h, v) = F(h, v)(v-1) + v F'_v(h, v) - m g(h) = 0. \quad (8)$$

Из условия $\ddot{H}_1 = 0$ определяется величина особого управления T_s

$$T_s a_0 = F + \frac{m^2 g'_h + m [g(F'_v + F''_{vv}) + F'_h(1-v) - v F''_{vh}]}{F + 2F'_v + F''_{vv}}. \quad (9)$$

Вдоль особой дуги должно выполняться условие оптимальности сингулярного управления Келли

$$\frac{\partial}{\partial u} \dot{H}_1 = \psi_v L(F) \geq 0; \quad L(F) = F + 2F'_v + F''_{vv}. \quad (10)$$

Уравнение (8) поверхности особого управления не содержит компонент сопряженного вектора Ψ и условия трансверсальности $\psi_h(t_f) = 1$. Это уравнение определяет оптимальное значение v скорости движения ракеты массы m на высоте h . Движение с меньшей скоростью не выгодно из-за увеличения гравитационных потерь, с большей – из-за роста потерь на преодоление аэродинамического сопротивления. Отметим, что эта особенность оптимального подъема указана еще в работе [10] и получена при решении задачи методом непосредственного исследования вариации функционала. Инвариантна также формула (9) вычисления величины тяги ракетного двигателя и условие Келли (10).

Для оценки влияния включения участка особого управления тягой в состав оптимальной траектории подъема на высоту $h(t_f)$ на рис. 1 приведены результаты

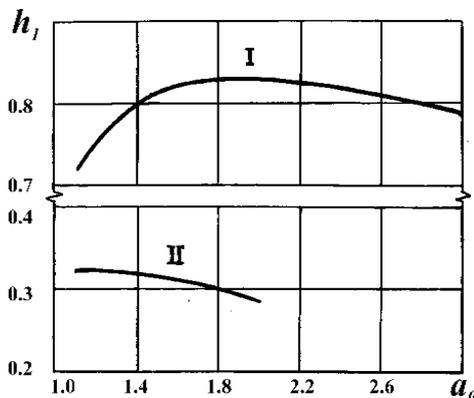


Рис. 1

вычисления достигнутой ракетой высоты при оптимальном управлении – кривая I, и при подъеме по траектории, состоящей из активного участка максимальной тяги, на котором расходуется все топливо, и заключительного пассивного участка – кривая II.

Сравнение кривых указывает на заметное увеличение высоты подъема $h(t_f)$ при включении особого участка в состав оптимальной траектории и на увеличение оптимального значения a_0 . Уве-

личение начальной тяги $T_0 = a_0 g_0 M_0$ позволяет быстрее достичь скорости оптимального подъема, определяемой из соотношения (8). Если поверхность $S(m, h, v) = 0$ не достигается при подъеме с $T = T_0$, особое управление не оптимально. Необходимо отметить также, что снижение скорости прохождения плотных слоев атмосферы на особом участке подъема уменьшает аэродинамические нагрузки на поверхность ракеты и тепловой поток к корпусу, что давно используется практиками [12].

3. Подъем – разгон самолета вертикального взлета и посадки.

Уравнения движения самолета в вертикальной плоскости представим следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \theta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \theta; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{T \cos \gamma - X(\alpha, r, v)}{m} - \frac{\sin \theta}{r^2}; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{T \sin \gamma + Y(\alpha, r, v)}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{vr^2} \right) \cos \theta; \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{V}. \end{aligned} \quad (11)$$

В системе (11) r и φ – полярные координаты центра масс аппарата; v – скорость полета; θ – угол наклона траектории к местной линии горизонта; α – угол атаки; m – масса самолета; V – скорость истечения продуктов сгорания двигателя; X – сила сопротивления; Y – подъемная сила; γ – угол между вектором тяги и местным горизонтом. Аэродинамические силы определяются следующим образом: $X = c_x(\alpha) S \rho(r) v^2 / 2$, $Y = c_y(\alpha) S \rho(r) v^2 / 2$. Здесь S – характерная площадь летательного аппарата, плотность атмосферы аппроксимируется формулой $\rho(r) = \rho_0 \exp[-\beta(r-1)]$. Поляра летательного аппарата аппроксимируется формулами $c_x(\alpha) = c_{x_0} + B\alpha^2$; $c_y(\alpha) = A\alpha$. Управляющие функции ограничены: $0 \leq T \leq T_{\max}$; $|\alpha| \leq \alpha_0$; $|\gamma| \leq \gamma_0$. Для системы (11) сформулирована терминальная задача Майера, краевые условия маневра фиксированы, маневр состоит в подъеме на заданную высоту с максимальной горизонтально направленной скоростью.

Управление углом атаки самолета α и направлением тяги двигателя γ связаны инвариантным соотношением [3]:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\alpha B}{A} \right), \quad (12)$$

где A и B – коэффициенты, аппроксимирующие поляру.

Инвариантность соотношения (12), справедливого в случае $\mathbf{u} \in \operatorname{int} U$, упрощает вычисление оптимальных управлений по принципу максимума. Теперь необходимо определять лишь одну управляющую функцию при исследовании гамильтониана $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ на максимум по \mathbf{u} , вторая управляющая функция вычисляется из соответствующего инвариантного соотношения. Анализ численных результатов, полученных с использованием указанного упрощения, позволил установить интересную особенность сингулярного управления. Для самолёта с параметрами, приведенными в работе [1], достижение цели маневра оказалось невозможным не только с использованием граничных управлений, но и при включении особой дуги в состав оптимальной траектории. Множество достижимых конечных состояний в этой задаче приведено на рис. 2.

Разрывы кривых на этом рисунке иллюстрируют множество точек недостижимости в данном случае. Штриховые кривые представляют динамику зависимостей массы самолета и полярного радиуса от угла наклона вектора тяги в начальный момент времени при простейшем варианте управления – максимальной постоянной тяге до полного выгорания топлива. Сплошные линии соответствуют сингулярному управлению.

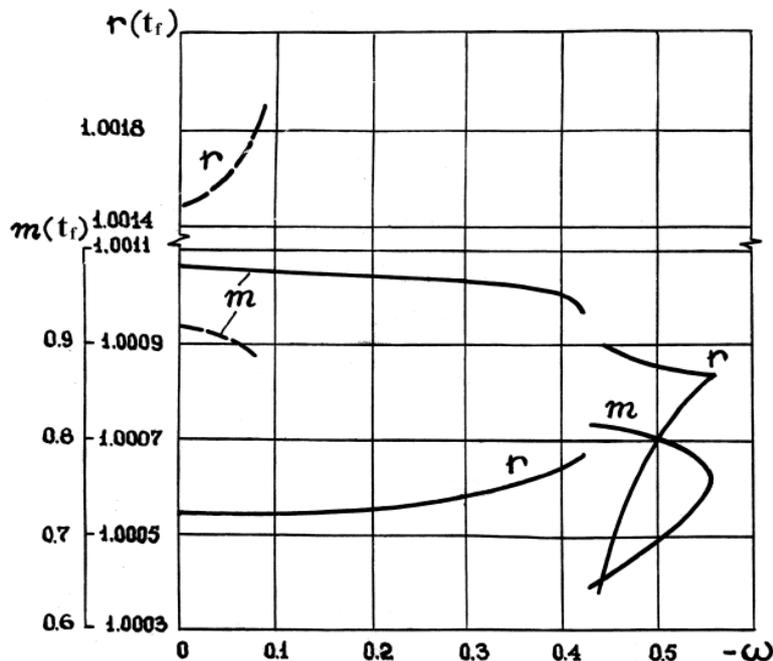


Рис. 2

Практический вывод из анализа приведенных результатов состоит в невозможности выполнения заданного маневра таким аппаратом. Необходимо менять полетное задание, например, снижением заданной высоты, либо менять аппарат из имеющегося парка, если достижение этой высоты необходимо. Если же и это невозможно – такой аппарат отсутствует, приходится проинформировать заказчика о невозможности выполнения задачи.

Выводы.

При исследовании проблем управления величиной тяги реактивных двигателей при движении летательных аппаратов в атмосфере установлено, что в состав оптимальных траекторий могут входить участки особого управления. Анализ сингулярных управлений выявил наличие инвариантных свойств управляющих воздействий. Инвариантными оказываются уравнения поверхностей особых управлений и формулы для вычисления тяги, обеспечивающие движение вдоль этих поверхностей. Использование инвариантных управлений особенно эффективно при управлении движением летательных аппаратов со сравнительно высокими коэффициентами аэродинамического сопротивления. Уменьшение удельной массы двигательной системы приводит к повышению указанной эффективности.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. При дослідженні проблем керування рухом літальних апаратів різних типів в атмосфері встановлено, що використання інваріантних властивостей керування суттєво збільшує ефективність роботи реактивної рушійної системи, особливо для літальних апаратів з високими значеннями коефіцієнтів аеродинамічного опору.

1. Букреев В.З. Определение оптимальных процессов управления для крылатых аппаратов с учетом ограничений типа неравенств. В кн.: Исследования по динамике полета. – Москва: Машиностроение, 1975. –С. 148 – 179.

2. Вернадский В.И. Философские мысли натуралиста. – Москва: Наука, 1988. – 520 с.
3. Злацкий В.Т. Исследование вырожденных вариационных задач механики полета: Дисс. канд. физ.-матем. наук. – Киев, 1982. – 178 с.
4. Кифоренко Б.Н. Инвариантные соотношения в теории оптимальных систем. – Киев, 1989. – 21 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 21).
5. Кифоренко Б.Н. Оптимальные траектории с участками особого управления. В кн.: Сложные системы управления. – Киев: ИК АН УССР. – 1974. – С. 45 – 55.
6. Кифоренко Б.Н., Кузьменко В.В., Березенко В.Н. Деякі задачі механіки польоту з малою тягою // Вісн. Київського ун-ту. Сер. Математики та механіки. – 1971. – № 13. – С. 44 – 47.
7. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – Москва: Наука, 1973. – 448 с.
8. Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике. – Киев: Гос. тех. издат., 1963. – 376 с.
9. Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автомат. и телемех. – 1940. – № 5. – С. 3 – 66.
10. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // Прикл. математика и механика – 1946. – 10, № 2. – С. 251 – 272.
11. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления // Докл. АН СССР. – 1955. – 162, № 4. – С. 763.
12. Хорольский П.Г. Баллистическая целесообразность глубокого гибкого регулирования маршевых двигателей ракет-носителей // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 10. – С. 11 – 13.
13. Щипанов Г.В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автомат. и телемех. – 1939. – № 1. – С. 49 – 66.
14. Kiforenko B.N. Problems of the Mathematical Description of Rocket Engines as Plant // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 5. – P. 608 – 612.
15. Kiforenko B.N. Singular Optimal Controls of Rocket Motion (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 237 – 286.
16. Martinon P., Bonnans F., Laurent-Varin J., Trelat E. Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher // J. of Guidance, Control and Dynamics. – 2009. – 32, N 1. – P. 51 – 55.
17. Tkachenko Ya.V. Method of Optimizing Maneuvers of an Orbital Transfer Vehicle in a Strong Central Field of Gravity // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 544 – 551.
18. Tunik A.A., Nadsadnaya O.I. A Flight Control System for Small Unmanned Aerial Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 239 – 247.
19. Vinh N.X. Integrals of the Motion for Optimal Trajectories of Atmospheric Flights // JOTA. – 1973. – 11, N 2. – P. 189 – 202.

Поступила 04.03.2019

Утверждена в печать 09.07.2020