

Л. В. Мольченко¹, И. И. Лоос²

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА ТЕРМОМАГНИТО-УПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГИБКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ И ДЖОУЛЕВЫМ ТЕПЛОМ

*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net*

Abstract. An effect of the physical properties of isotropic and orthotropic materials on the thermomagnetoelastic behavior of a truncated conical shell with the orthotropic conductivity and Joule heat is considered in a geometrically-nonlinear statement. The Variants of the resolving differential equations of a flexible conical shell are given in the axisymmetric formulation and within the microsecond range. Examples of solution of the thermomagnetoelastic problems of the flexible conical shells made of different materials are considered.

Key words: conical shell, thermomagnetoelasticity, orthotropy, nonlinearity, Joule heat.

Введение.

Действие переменных магнитных полей на металлические упругие элементы вызывает появление объемных электродинамических сил и джоулевой температуры, которые при соответствующих параметрах полей вызывают большие деформации конструкций [4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19]. Отметим, что учет пондеромоторных сил и джоулевого тепла является определяющим в связанных задачах термомагнитоупругости.

Предметное раскрытие эффектов взаимодействия механических полей деформаций с термоэлектромагнитными полями в настоящее время изучено недостаточно. Это в первую очередь касается задач деформирования тонкостенных элементов при конечных перемещениях в сильном магнитном поле, а также в токнесущих тонкостенных элементах. В теоретическом аспекте возникают весьма сложные проблемы магнитоупругости гибких тонких оболочек, изготовленных из реальных, т.е., из конечно проводящих материалов. Отметим также, что в современной технике используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии уже анизотропные, в частном случае ортотропные.

В настоящей работе рассмотрены осесимметричные варианты теории конечно проводящих изотропных и ортотропных конических оболочек в микросекундном диапазоне при действии нестационарных магнитных полей. Разрешающие системы уравнений представлены в лагранжевых переменных. К решению таких столь сложных задач можно подойти лишь численно. Именно с этих позиций и дается формулировка основных разрешающих уравнений электромагнитоупругости гибких конических оболочек переменной жесткости с учетом конечной электропроводности и джоулевого тепла.

1. Постановка задачи. Разрешающие осесимметричные уравнения термомагнитоупругости гибких конических оболочек.

Рассмотрим усеченную коническую оболочку переменной жесткости под действием магнитного поля в геометрически нелинейной постановке. К оболочке подводится внешний электрический ток плотности \vec{J}_{cm} . За координатную поверхность вы-

бираем срединную поверхность оболочки в недеформированном состоянии и отнесем ее к криволинейной ортогональной системе координат (s, θ) , где s – длина меридиана; θ – центральный угол в параллельном круге. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат (s, θ, γ) (рис. 1). Приведем разрешающие системы термомагнитоупругости конической оболочки, изготовленной из изотропного и ортотропного материалов.

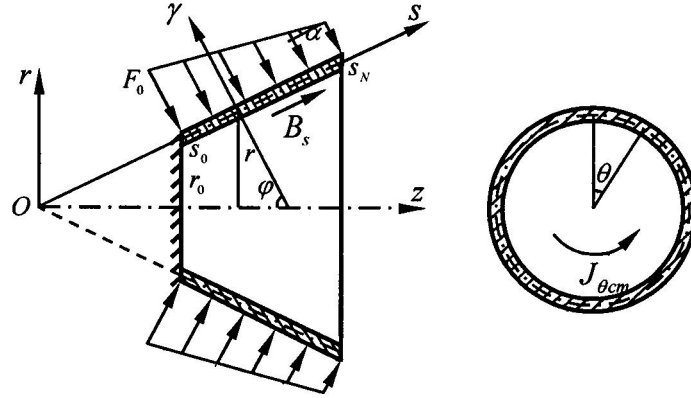


Рис. 1

Изотропный материал. Если использовать вариационный принцип и учесть гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы [1, 3, 6, 7, 17, 18], то можно получить разрешающую систему нелинейных дифференциальных уравнений изотропной конической оболочки в осесимметричной постановке с учетом джоулевой температуры [14, 17, 18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_s - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1+\nu) \varepsilon_T; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\mathcal{G}_s; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_s - \frac{\nu \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu-1) N_s + Eh \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - P_s + h J_{\theta CT} B_\gamma - \\ &\quad - \sigma h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{Eh \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_s + Eh \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - P_\gamma - \\ &\quad - 0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \right. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \Big] + \frac{Eh \sin \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} & = \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu - 1) M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12} \frac{\mathcal{G}_s}{r} \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \\
& - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12} \frac{\mathcal{G}_s}{r} \right] \mathcal{G}_s; \\
\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} & = -\mu \sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\varepsilon_T & = \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma^2 \left[E_\theta^2 + 0,06 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\
& + \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_\Pi}{\partial t}; \quad \chi_T = 0.
\end{aligned}$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения: N_s – нормальное усилие; Q_s – поперечное усилие; M_s – изгибающий момент; u, w – компоненты вектора перемещения; E_θ – составляющая напряженности электрического поля; B_γ – нормальная составляющая магнитной индукции; B_s^\pm – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; P_s, P_γ – компоненты механической силы; \mathcal{G}_s – угол поворота нормали; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; $h(s)$ – толщина оболочки; ρ – плотность материала; φ – угол между осью вращения и нормалью к поверхности оболочки; $r(s)$ – радиус параллельного круга; σ – коэффициент электропроводности; μ – коэффициент магнитной проницаемости; C_ε^{cp} – среднее значение теплоемкости на интервале $[0, T]$; α – коэффициент линейного температурного расширения; λ_T – коэффициент теплопроводности; λ_F – коэффициент теплоотдачи; T_c – температура срединной поверхности оболочки; T_Π – температура на поверхности оболочки.

Ортотропный материал. Рассматривая упругие свойства ортотропного материала гибкой конической оболочки, допускаем, что главные направления упругости совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Электромагнитные свойства материала оболочки и джоулевого тепла также являются ортотропными и характеризуются тензорами электрической проводимости σ_{ij} , магнитной проницаемости μ_{ij} и диэлектрической проницаемости ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

Анализ электромагнитных эффектов исследуем на основании системы уравнений Максвелла в лагранжевых координатах совместно с материальными уравнениями и уравнениями движения. Материальные уравнения связывают между собой магнитную индукцию \vec{B} , электрическую индукцию \vec{D} , напряженность магнитного поля \vec{H} , напряженность электрического поля \vec{E} и плотность электрического тока в теле \vec{J} .

Связь между этими величинами в случае анизотропной электропроводности имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_{ij} \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma_{ij} \vec{E}. \quad (2)$$

При этом, исходя из кристаллофизики [10, 11], для рассматриваемого класса проводящих ортотропных оболочек с ромбической кристаллической структурой тензора σ_{ij} , μ_{ij} , ε_{ij} принимают диагональный вид.

Используя вариационный принцип, учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы [1, 6], с учетом диагонального вида тензоров и согласно результатам работ [4, 6, 7, 10], полная осесимметричная система уравнений магнитоупругости ортотропных конических оболочек в геометрически нелинейной постановке состоит из:

уравнений магнитоупругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_s)}{\partial s} - \cos \varphi N_\theta + r(P_s + \rho F_s^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} + \sin \varphi N_\theta + r(P_\gamma + F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(rM_s)}{\partial s} - \cos \varphi M_\theta - rQ_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s = 0;$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta;$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h};$$

выражений для деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \\ \chi_s &= \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s - \frac{\sin \varphi}{2r} \mathcal{G}_s^2; \end{aligned} \quad (4)$$

соотношений упругости:

$$N_s = \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_s + \nu_\theta \varepsilon_\theta - (1 + \nu_s) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_s - (1 + \nu_\theta) \varepsilon_T]; \quad (5)$$

$$M_s = \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_s + \nu_\theta \chi_\theta - (1 + \nu_s) \chi_T]; \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_\theta + \nu_s \chi_s - (1 + \nu_\theta) \chi_T],$$

где обозначено $\nu_s = \nu_{os}$; $\nu_\theta = \nu_{s\theta}$; $e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s$. Здесь

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma dt$$

– интегральные характеристики температурного поля.

Составляющие силы Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho F_s^\wedge &= -h J_{\theta cm} B_\gamma - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right]; \\ \rho F_\gamma^\wedge &= -0,5 h J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[0,5 (-E_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma) (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношениях (3) – (6), помимо приведенных выше, введены следующие обозначения: N_θ – тангенциальное усилие; M_θ – изгибающий момент; $h(s)$ – толщина оболочки; ρ – плотность материала оболочки; $J_{\theta cm}$ – компонента стороннего тока; σ_1, σ_2 – компоненты удельной электропроводности среды; e_s, e_θ – модули Юнга; ν_s, ν_θ – коэффициенты Пуассона; χ_s, χ_θ – компоненты изгибной деформации; ε_T, χ_T – интегральные характеристики температурного поля; $T(s, \gamma, \theta, t)$ – джоуле-ва температура оболочки; α – коэффициент линейного температурного расширения.

При построении разрешающей системы уравнений термомагнитоупругости усеченной гибкой ортотропной конической оболочки выбираем в качестве искомым функций следующие [4, 6]:

$$u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

Разрешающая осесимметричная система нелинейных дифференциальных уравнений термомагнитоупругости ортотропной конической оболочки с учетом джоулевой температуры принимает вид [7, 14, 17, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1 + \nu_s) \varepsilon_T; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\mathcal{G}_s; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - P_s - h J_{\theta cr} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{e_s h \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - P_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\theta cr} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (7) \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] \mathcal{G}_s; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\mu\sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.$$

Здесь

$$\varepsilon_T = \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_\theta^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_{II}}{\partial t}; \quad \chi_T = 0.$$

Разрешающие системы уравнений (6, 7) являются нелинейными смешанными гипербола-параболическими системами восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Для определения произволов, которые появляются в общем решении систем уравнений (6, 7) после интегрирования, необходимо поставить граничные условия на контурах оболочки. Краевые условия для функций, характеризующие механическую часть задачи, задаются так же, как и в теории оболочек. Краевые условия для электромагнитных параметров могут задаваться через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. Начальные условия задаются в классическом виде.

2. Методика решения задач термомагнитоупругих гибких изотропных и ортотропных конических оболочек с учетом джоулевой температуры.

Методика решения задач термомагнитоупругости изотропных и ортотропных конических оболочек заключается в последовательном использовании схемы Ньюмарка, метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [2, 5, 20].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную конечноразностную схему Ньюмарка [20] интегрирования уравнений термомагнитоупругости.

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи термомагнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [2], с помощью которого нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных краевых задач на каждом временном шаге. Далее каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [5].

Числовой пример. Рассмотрим осесимметричную нелинейную краевую задачу термомагнитоупругости о напряженно-деформируемом состоянии гибкой конической оболочки переменной толщины с учетом джоулевого тепла, изготовленной из изотропного и ортотропного материалов. Отметим, что исходные данные гибкой конической оболочки, условия нагружения и закрепление оболочки являются одинаковыми в случае изотропного и ортотропного материалов.

Полагаем, что на поверхностях оболочки осуществляется теплообмен по закону Ньютона – Рихмана с внешней средой имеющей температуру 0°C (с коэффициентом теплообмена λ_F). Также оболочка является проводником стороннего электрического тока \vec{J}_{cm} .

Пусть стационарная задача магнитоупругости для возмущенного состояния решена, т.е., известны вектора магнитной индукции начального состояния для внешней и внутренней областей.

Рассмотрим случай, когда оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической силы $P_\gamma = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t$ Н/м² и внешнего электрического тока $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м² (ω – круговая частота). Толщина оболочки переменная и принимает значение $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 - 5 \cdot s^2 / b)$ м, $b = 0,4$ м.

Граничные условия выбраны в следующем виде:

$$u = 0; M_s = 0; Q_s = -200; B_\gamma = 0,7 \sin \omega t \quad \text{при } s_0 = 0;$$

$$u = 0; w = 0; M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s_N = 0,4.$$

Гибкая коническая оболочка, изготовленная из алюминия. Алюминий – парамагнетик, кристаллографическая структура гранецентрированная кубическая. По распространению в земной коре алюминий занимает первое место среди металлов. Алюминий широко применяется как конструкционный материал. Его основные достоинства в этом качестве – легкость, податливость штамповке, недовитость его соединений. Алюминий широко применяется в электротехнике для изготовления проводов, их экранирования и даже в микроэлектронике при изготовлении проводников в чипах. Температура плавления – $T_{пл} = 660^\circ\text{C}$.

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,4\text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \varphi = \pi / 10;$$

$$\rho = 2670 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \nu = 0,3; \sigma = 3,13 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1};$$

$$C_\varepsilon^{cp} = 820 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{}^\circ\text{C)}; \alpha = 2,36 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}; \lambda_T = 228 \text{ Вт/(м} \cdot \text{}^\circ\text{C)}; \lambda = 225 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{}^\circ\text{C)}.$$

Гибкая коническая оболочка, изготовленная из бороалюминия. Бороалюминий – парамагнетик, кристаллографическая структура гранецентрированная кубическая. Бороалюминий – композитный материал на основе матрицы из алюминия, армированной борными волокнами, обладающего высокими удельными характеристиками. Особо эффективное применение бороалюминия в ракетно-космической технике. Его использование для деталей ракет «Атлас», космических кораблей «Аполлон» и «Шатл» позволило уменьшить их массу на 20 – 50 %.

Отметим, что в справочной литературе отсутствуют точные данные по анизотропии бора. Поэтому, коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи вынуждены рассматривать как изотропные. Однако, такое допущение хорошо согласуется с экспериментом. Температура плавления – $T_{пл} = 560^\circ\text{C}$.

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,4\text{ м}; e_s = 22,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \rho = 2600 \text{ кг/м}^3;$$

$$\nu_s = 0,262; \nu_\theta = 0,32; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; B_s^\pm = 0,5 \text{ Т}; C_\varepsilon^{cp} = 850 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{}^\circ\text{C)};$$

$$\alpha = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}; \lambda_T = 228 \text{ Вт/(м} \cdot \text{}^\circ\text{C)}; \lambda_F = 225 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{}^\circ\text{C)}; \varphi = \pi / 10.$$

Гибкая коническая оболочка, изготовленная из цинка. Цинк – диамагнетик, кристаллографическая структура гексагональная. Цинк наиболее распространенный металл, применяемый в металлургии, машиностроении, строительстве, медицине. Материал применим не только как защита от коррозии, но и для увеличения прочности, продолжительного срока эксплуатации. Температура плавления – $T_{пл} = 419^\circ\text{C}$.

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,4\text{ м}; e_s = 11,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 3,48 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,169 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \rho = 7130 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$\nu_s = 0,3; \nu_\theta = 0,35; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; B_s^\pm = 0,5 \text{ Т}; C_\varepsilon^{cp} = 400 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{}^\circ\text{C)};$$

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}; \lambda_T = 112,8 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}; \lambda_F = 108 \text{ Вт/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}; \varphi = \pi/10.$$

Гибкая коническая оболочка, изготовленная из бериллия. Бериллий – диамагнетик, кристаллографическая структура гексагональная. Бериллий и его соединения применяют в технике. В ядерной технике его используют в качестве отражателей и замедлителей нейтронов. Бериллий служит для изготовления окон рентгеновских трубок, в качестве присадок к ракетному топливу. Потребителем бериллия являются также электротехника и радиоэлектроника. Температура плавления – $T_{пл} = 1287^\circ\text{C}$.

Параметры оболочки и материала выбраны следующие

$$s_0 = 0; s_N = 0,4 \text{ м}; e_s = 28,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 33,53 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \rho = 1844 \text{ кг/м}^3;$$

$$\sigma_1 = 0,279 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \sigma_2 = 0,321 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \mu = 1256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$\nu_s = 0,03; \nu_\theta = 0,09; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; B_s^\pm = 0,5 \text{ Т}; C_\varepsilon^{\text{cp}} = 1883 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}; \lambda_T = 157 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}; \lambda_F = 153 \text{ Вт/(м}^2 \cdot ^\circ\text{C)}; \varphi = \pi/10.$$

В дальнейшем на рисунках, приведенных ниже, линия 1 отвечает алюминию; линия 2 – бороалюминию; линия 3 – цинку; линия 4 – бериллию. Решения задач получены на интервале $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, временной шаг интегрирования $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$; шаг интегрирования по координате s принят равным $\Delta s = 0,04 \text{ м}$.

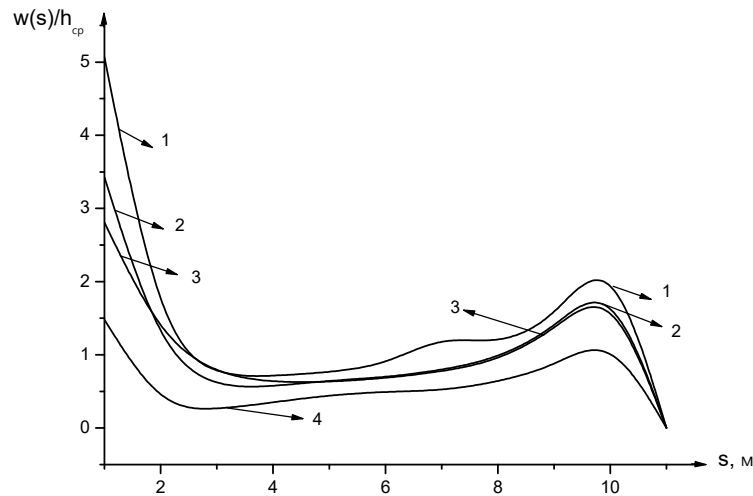


Рис. 2

На рис. 2 представлен безразмерный прогиб $w(s)/h_{cp}$ при $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Максимальные нелинейные значения прогиба достигаются на контуре $s = 0$ для всех рассмотренных материалов. Для алюминия – $w(s)/h_{cp} = 5,07$; бороалюминия – $w(s)/h_{cp} = 3,43$; цинка – $w(s)/h_{cp} = 2,81$; бериллия – $w(s)/h_{cp} = 1,48$. В точке выдачи результатов $s = 0,36 \text{ м}$, безразмерная нелинейность прогибов достигает для алюминия – $w(s)/h_{cp} = 2,54$; бороалюминия – $w(s)/h_{cp} = 2,10$; цинка – $w(s)/h_{cp} = 2,01$; бериллия – 1,30. Нелинейность при $s = 0,36 \text{ м}$, в основном, появляется за счет краевого эффекта оболочки и, естественно, из-за физических свойств материала. Для определения конкретного вклада каждого из перечисленных эффектов, необходимо проводить дополнительные

исследования. Отметим также, что максимальная нелинейность достигается в случае изотропного материала; уменьшение нелинейности наблюдаем в случае использования ортотропных материалов. Исходя из результатов, представленных на рис. 2, можем говорить о влиянии физических свойств материалов на напряженное состояние конической оболочки.

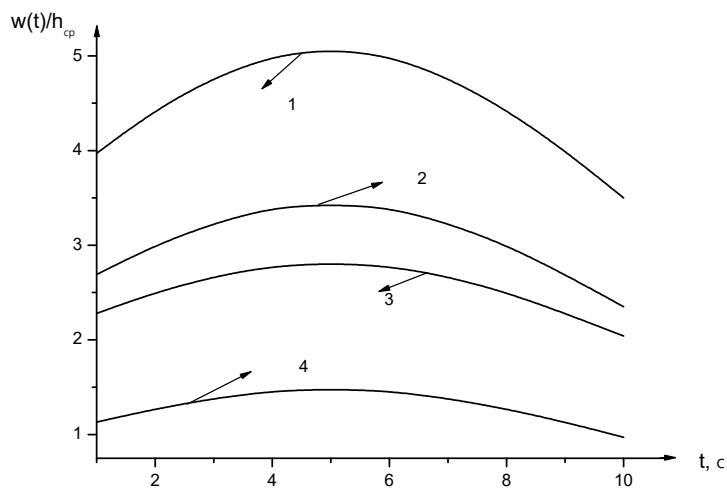


Рис. 3

Рис. 3 представляет $w(t)/h_{cp}$ на контуре $s = 0$, что подтверждает результаты, представленные на рис. 2.

На рис. 4 показано изменение безразмерного прогиба $w(t)/h_{cp}$ при $s = 0,36$ м. Полученные результаты не противоречат данным рис. 2.

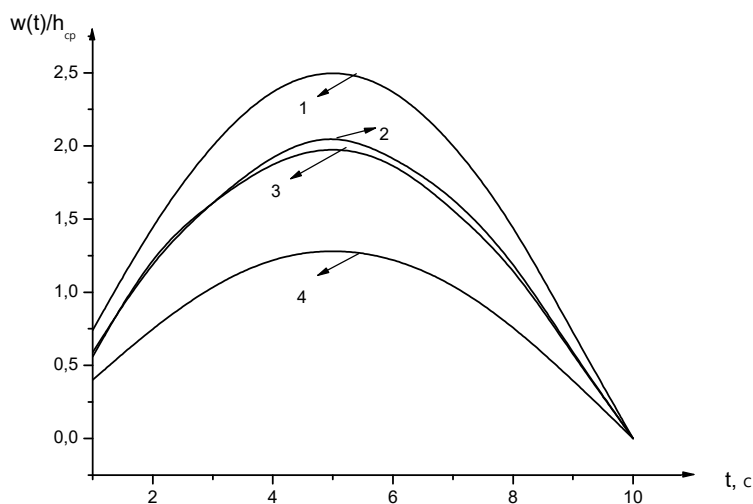


Рис. 4

На рис. 5 представлена продольная компонента силы Лоренца $F_s^{\wedge}(t)$ на контуре $s = 0$. Исходя из представленных результатов, максимальное значение поперечной силы наблюдается в случае изотропного материала из алюминия. Меньшие значения силы, но одного порядка, получены для ортотропных материалов оболочки из бериллия и цинка, соответственно. Значения продольной компоненты силы Лоренца принимают отрицательные значения для всех рассмотренных материалов.

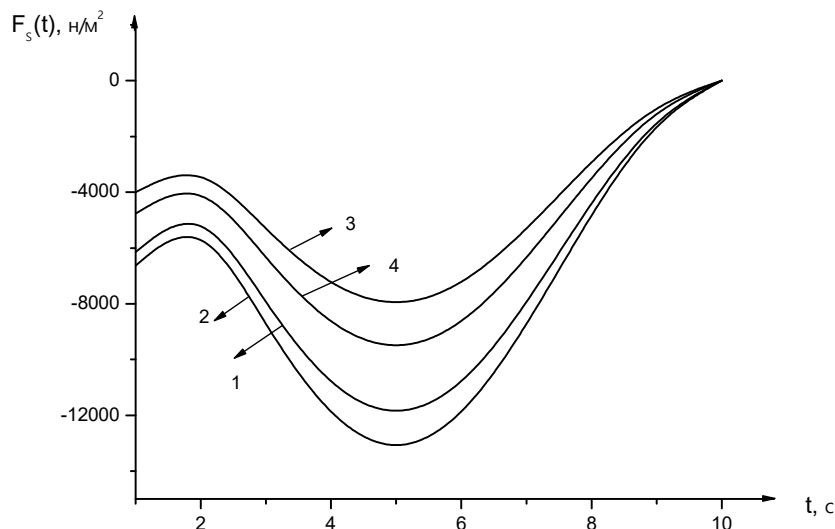


Рис. 5

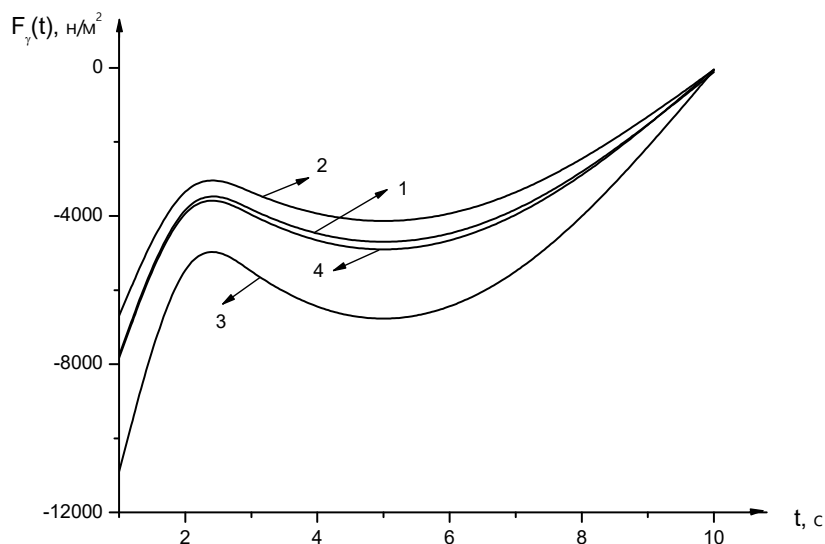


Рис. 6

На рис. 6 показано распределение нормальной составляющей силы Лоренца $F_\gamma^{\wedge}(t)$ на контуре $s = 0$. Здесь максимальные значения наблюдаем в случае ортотропного материала из цинка; минимальные – ортотропного материала из бороалюминия. Все значения нормальной составляющей силы Лоренца принимают отрицательные значения для всех рассмотренных материалов.

На рис. 7 приведено распределение джоулевой температуры $T(t)$ на контуре $s = 0$ при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с. Минимальное значение температуры $T = 39,24^\circ\text{C}$ получено в случае изотропного материала оболочки из алюминия. Максимальное значение – $T = 144,30^\circ\text{C}$ в случае ортотропного материала из цинка. Значения джоулевой температуры $T = 48,21^\circ\text{C}$ и $T = 92,75^\circ\text{C}$ отвечают ортотропным материалам из бороалюминия и бериллия.

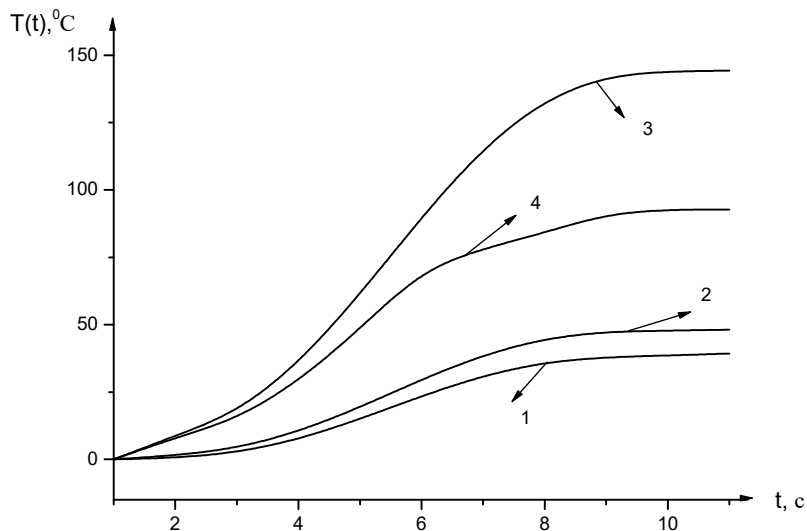


Рис. 7

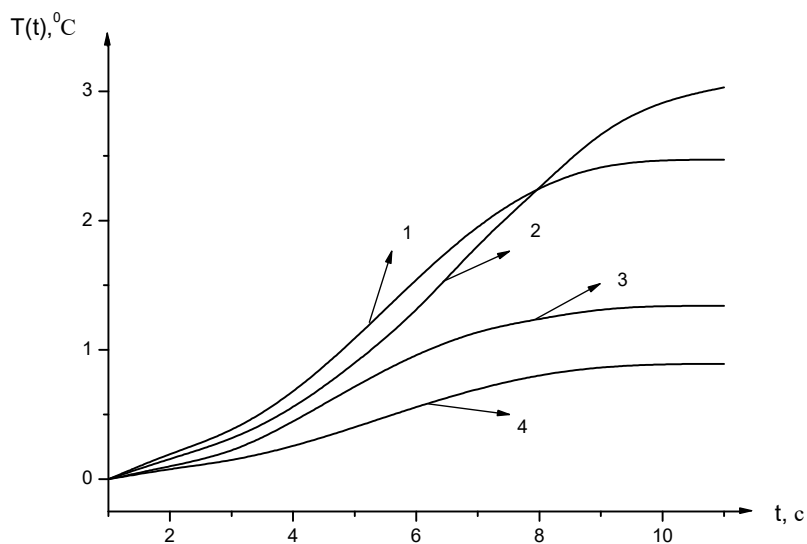


Рис. 8

Рис. 8 иллюстрирует распределение джоулевой температуры по времени в точке выдачи результатов $s = 0,36$ м. Максимальное значение температуры $T = 3,03^\circ\text{C}$ наблюдаем при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с для оболочки из бороалюминия. Минимальное значение температуры $T = 0,89^\circ\text{C}$ получено в случае ортотропного материала из бериллия при том же значении времени. Из рассмотренных случаев делаем вывод, что с уменьшением нелинейности расположение температурных графиков изменяются в зависимости от типа материала оболочки (см. рис. 3, 7, 8).

На рис. 9 показано изменение меридионального усилия $N_s(t)$ при $s = 0$ в зависимости от свойств рассматриваемых материалов. Значения усилия $N_s(t)$ для материалов из бороалюминия и цинка принимают положительные значения; для материалов из алюминия и бериллия принимают отрицательные значения, переходящие в положительные.

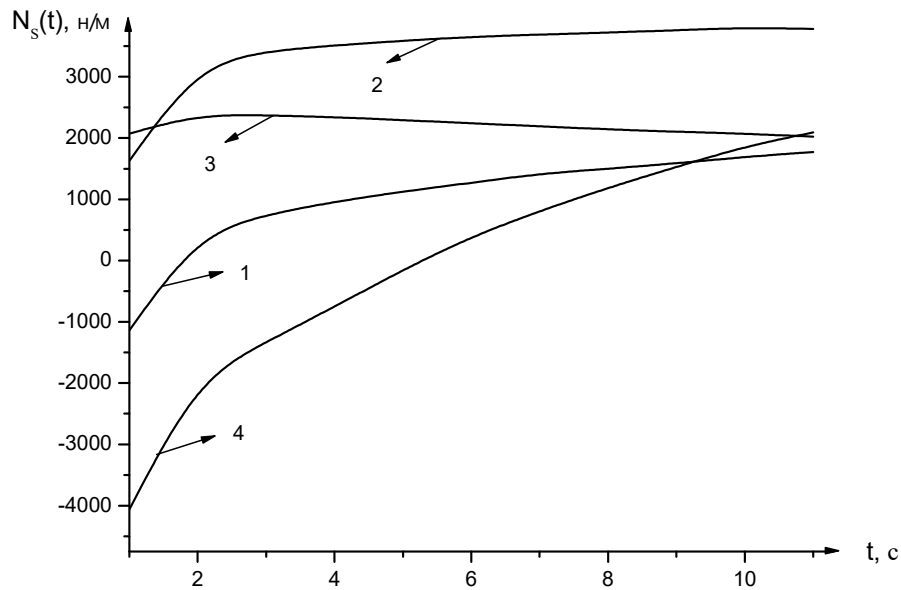


Рис. 9

Рис. 10 иллюстрирует поведение первой производной от перемещения по времени $\partial u(s)/\partial t$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с в зависимости от физических свойств материала конической оболочки. На рисунке наблюдаем максимальные значения производной для ортотропных материалов; значения для изотропного материала (алюминий) колеблются около нуля.

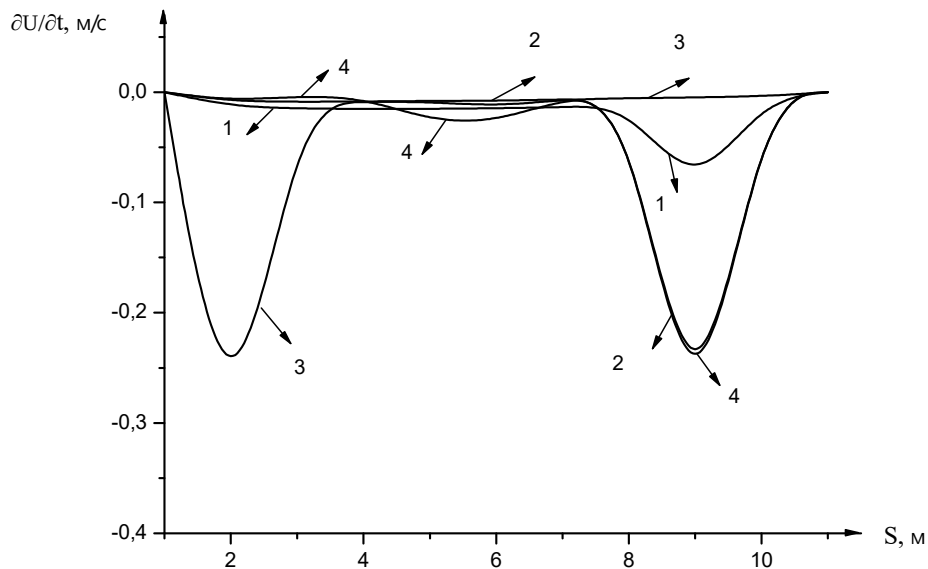


Рис. 10

Заключение.

На основании приведенных нелинейных дифференциальных уравнений термомагнитоупругости для конических оболочек, изготовленных из физически различных материалов, с использованием предложенной методики, исследовано термонапряженное состояние гибких оболочек с учетом джоулевого нагрева. Предложенная методи-

ка позволяет исследовать различные варианты физико-механических параметров оболочек в геометрически – нелинейной постановке. В качестве иллюстрации рассмотрены задачи для осесимметричной усеченной гибкой конической оболочки с учетом джоулевого нагрева. В основном внимание уделяется влиянию физических свойств материалов на напряженное состояние конической оболочки. Дан анализ полученных результатов.

РЕЗЮМЕ. Отримано диференціальні рівняння термомагнітопружності для гнучких осесиметричних конічних оболонок з ізотропного і ортотропного матеріалів із врахуванням джоулевого нагріву. Проведено аналіз термопружності зрізаної конічної оболонки при різних фізичних властивостях її матеріалу в нелінійній постановці.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будаков В. Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Численно-аналитическое решение краевых задач магнитоупругости. – Николаев: Илион, 2016. – 148 с.
4. Будаков В. Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – 16. – вып. 3, № 99. – С. 171 – 174.
6. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. – Киев: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с.
7. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – 19. – С. 32 – 47.
8. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 624 с.
9. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – Москва: Мир, 1967. – 385 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – Москва: Наука, 1976. – 492 с.
11. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – Москва: Наука, 1979. – 639 с.
12. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. – Москва – Ленинград: ГТТИ, 1948. – 540 с.
13. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – Москва: Наука, 1976. – 624 с.
14. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 120.
15. Elhajar R., Saponara V., Muliana A. Smart Composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press., 2013. – 430 p.
16. Hutter K., Van de Ven A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer, 2006. – 403 p.
17. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 68 – 78.
18. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Conical Shell with Electrical Conductivity and Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 534 – 543.
19. Moon F.C. Magneto-Solid Mechanics. – New York: Wiley, 1984. – 448 p.
20. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 06.03.2019

Утверждена в печать 03.03.2020