

**Н. В. Никитина**

## АТТРАКТОРЫ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ В БАЗОВЫХ МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The theorems (statements) on the existence of an attractor are given. A generalized Shil'nikov theorem is formulated. The generalized theorem includes in the expression of the saddle value of a homoclinic loop an additional term, which has qualitative value in the formation of a strange attractor. The bifurcation program of synchronization of the coupled identical three-dimensional generators are considered. The cause for the appearance of new movements in a bunch of generators is established.

**Key words:** two-disk dynamo model, attractor, bifurcation, strange attractor, symmetry principles, synchronization, multistable system.

### **Введение.**

Научная информация в монографиях о хаотической динамике [2, 3, 6, 8, 9, 14, 20, 28, 29] показывает продолжительный интерес к тематике, связанной с аттракторами трехмерных систем дифференциальных уравнений. Обратимся к классической форме исследования динамики трехмерных систем – геометрической теореме Шильникова [29]. На основе этой теоремы в данной работе сформулировано и доказано три теоремы (с примерами к каждой). В итоге можно сформулировать обобщенную теорему Шильникова. Поскольку теорема Шильникова геометрическая (не сопровождается доказательством, но верная), то аналитическая запись теоремы (обобщенной) различает седловую величину точки  $\sigma_0$  и седловую величину петли  $\sigma$ . Обсуждаются подходы, которые привели к созданию стандартных форм полученной качественной информации анализа в виде теорем, утверждений и принципов.

Рассмотрим бифуркации трехмерных систем, которые образуют регулярные и хаотические аттракторы. Один подход доказательств теорем о существовании аттракторов связан с применением теоремы Шильникова и расширением теоремы на больший спектр рассматриваемых базовых моделей. При развитии принципа симметрии для трехмерных систем производится разбиение системы на двумерные подсистемы и применяется теория замыкания двумерных траекторий, развитая в прошлом веке, а также принцип симметрии, приведенный в классической работе [21]. Математические модели, определяемые трехмерными системами, являются моделями генераторов электромагнитных колебаний, связанных твердых тел, транспортных средств и другими моделями различных физических явлений в природе и технике [10, 12, 16, 17, 20, 27, 29]. Приведенные в работе теоремы содержат конструктивный способ установления отрицательного знака седловой величины и анализ механизмов потери устойчивости орбиты.

Идентификация бифуркационного процесса связана с качеством движения, которое происходит в поле движения изображающей точки. Первые работы о бифуркациях многомерных систем не содержали формулировок в виде теорем. Это затрудняло восприятие конечных результатов. Представим следующий перечень вопросов, затронутых в статье.

1. Теоремы о существовании аттрактора в трехмерных базовых моделях.
2. Принцип симметрии в трехмерных системах.
3. Обобщение теоремы Шильникова.
4. Синхронизация связанных генераторов и проблема появления новых движений.

### 1. Постановка задачи.

В динамических системах гомоклинические траектории свидетельствуют о присутствии траекторий со сложным поведением. Эти траектории играют важную роль в теории бифуркаций. Проблема рождения регулярных и странных аттракторов из гомоклинических петель (ГП) в трехмерных системах обсуждалась в работах [17, 23, 28, 29]. В данной работе приведены условия существования периодических орбит в диссипативных трехмерных системах в виде принципов симметрии. Рассмотрено приложение теорем к установлению существования странных аттракторов. Зарождение странных аттракторов связано с рассмотрением механизма потери устойчивости орбиты.

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), x(t) \in R^3, \mu \in R^m, \quad (1)$$

где  $F(x, \mu)$  – гладкая функция;  $R^m$  – пространство параметров. Введем малое отклонение в окрестности частных решений  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):  $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) уравнений (1). Рассмотрим  $\delta x_i$  в качестве новых координат. Линейная система, соответствующая системе (1) в координатах  $\delta x_i$

$$d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x, \delta x \in R^n, \quad (2)$$

где  $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x |_{x=\bar{x}}$ , называется *системой уравнений в вариациях* [28]. При помощи анализа корней характеристического уравнения, которое соответствует матрице  $A(\bar{x})$ , можно изучить механизм образования периодических и сложных движений. Представим матрицу  $A(\bar{x})$  системы (2) в виде суммы двух матриц

$$A(\bar{x}) = N + M(\bar{x}), \quad (3)$$

где матрица  $N$  соответствует спектру линейной системы (1), не содержащей частных решений. Матрица  $M(\bar{x})$  соответствует той части спектра уравнений (2), которая содержит частные решения  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ .

Приведем некоторые обозначения к теореме Шильникова [29]. Обозначим характеристические показатели (ХП) особой точки  $O$  в начале координат системы (1)  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$ , так что  $\gamma > 0 > \text{Re}\lambda_{1,2}$ . Неустойчивое многообразие  $W^u$  седла  $O$  одномерное, устойчивое многообразие  $W^s$  двумерные. Неустойчивое многообразие состоит из трех орбит: самого седла  $O$  и двух сепаратрис:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Предполагаем, что система имеет петлю сепаратрис, т.е.  $\Gamma_1$  стремится к  $O$  при  $t \rightarrow \infty$ . Рассмотрим седловую величину в точке седлофокусе, которую обозначим  $\sigma_o = \gamma + \text{Re}\lambda_1 + \text{Re}\lambda_2$ . Будем различать седловую величину точки  $\sigma_o$  и седловую величину петли  $\sigma$ .

Теорема 13.6 (Шильников [29]). *Когда седловая величина  $\sigma$  отрицательна, из гомоклинической петли рождается единственная устойчивая периодическая орбита  $L$ .* В данной работе также речь идет о гомоклинической петле. Теорема Шильникова сосредоточена на существовании ГП, на которой седловая величина имеет отрицательный знак. В работе [11] рассматривался принцип симметрии в трехмерных системах. Было установлено, что существуют ГП, которые замыкаются в силу симметрии (кососимметрии). Таким образом, можно с помощью принципа симметрии указать на существование периодической орбиты в гомоклинической петле. С помощью конструктивного подхода устанавливаются знак седловой величины и притяжение на

петле. Приведенные ниже теоремы предполагают и доказывают существование аттрактора. В одном случае – это замкнутая траектория. Изменение параметров либо начальных условий может перенести замыкание траектории на  $t \rightarrow \infty$ , тогда зарождается странный аттрактор.

Вернемся к теореме 13.6 Шильникова Л.П. [29]. Теорема обсуждалась в научных публикациях [2]. В данной работе рассмотрен конструктивный принцип определения знака седловой величины гомоклинической петли. Это связано с притягивающим характером точек траектории и образованием предельных циклов и странного аттрактора в трехмерных системах. Принцип определения знака седловой величины накладывает определенные условия на значения параметров. Приложение приведенных ниже теорем охватывает некоторую часть парка базовых математических моделей, образующих аттракторы.

Принципы симметрии [21] кососимметрии [12] для двумерных систем могут быть применены для анализа бифуркаций и установления симметрии аттракторов и замыкания траекторий в трехмерных системах. Критерии устойчивости (замыкания) орбиты в трехмерных системах изложены в работе [11]. Запишем двумерную систему в следующем виде:

$$dx_1/dt = F_1(x); \quad dx_2/dt = F_2(x), \quad (4)$$

где  $x_1, x_2 \in R$  и  $F_1 \in C(R^2, R)$ ,  $F_2 \in C(R^2, R)$  и  $F_i(0) = 0 (i = 1, 2)$ .

Приведем геометрический принцип симметрии на основе которого можно установить условия замыкания траектории.

*В системе (4) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции  $F_1(x)$  относительно  $x_1$  и нечетности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_1$ , т. е.*

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \quad (5)$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости  $Ox_1x_2$  ось  $Ox_2$  является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси  $x_2$  является зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что в системе (4) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_2$  и нечетности  $F_1(x)$  относительно  $x_2$ , т.е.

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2); \quad F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2). \quad (6)$$

Здесь (согласно [21]) ось  $Ox_1$  является осью симметрии.

Принцип кососимметрии для нелинейных систем был сформулирован в работе [12]. В нелинейной системе (4) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (4), связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); \quad F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \quad (7)$$

Кососимметрия связана с двумя осями координат. т. е., если ось  $Ox_1$  является осью кососимметрии, то ось  $Ox_2$  также является осью кососимметрии.

*В нелинейной системе (4) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1) связаны следующими условиями*

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (8)$$

**Примечание.** Кососимметрией обладают линейные осцилляторы с положительной и отрицательной диссипацией, но траектории таких систем незамкнуты.

## 2. Теоремы о существовании аттракторов в трехмерной системе.

Ниже доказываются теоремы для гладких систем. О системе (1) сделаем следующие предположения.

**Предположение 1.** В системе (1) имеет место особая точка  $O(0,0,0)$ , так что характеристические показатели точки  $O$  имеют вид  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$  с отрицательной седловой величиной. Существует окрестность особой точки  $O$ , заполненная седлоузловыми точками.

**Предположение 2.** Характеристическое уравнение, соответствующее системе  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ , где  $E$  – единичная матрица, имеет такие собственные значения: одно нулевое, и два мнимых.

**Теорема 1.** Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2 и сумма собственных значений характеристического уравнения системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$  равна нулю:  $\sigma_{\bar{x}} = \bar{\lambda}_1(\bar{x}) + \bar{\lambda}_2(\bar{x}) + \bar{\lambda}_3(\bar{x}) = 0$ . Тогда в окрестности особой точки  $O(0,0,0)$  системы (1) ГП образует аттрактор.

**Доказательство.** При выполнении условий Предположений 1, 2 седловая величина петли определяется системой  $|A(\bar{x}) - \lambda E| = 0$  из уравнения (согласно (3))

$$|A(\bar{x}) - \lambda E| = |N - \lambda E| = 0.$$

Дифференциальная система уравнений (1) при  $\bar{x} \neq 0$  образует ГП. Бифуркационный процесс в поле трехмерной системы (1) происходит в соответствие с теоремой Гробмана – Хартмана. Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, так что  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ , переходит в седлофокусный континуум с отрицательным знаком седловой величины. Для седлофокусной области  $-Re\lambda_1 < 0, Re\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$  седлофокусная петля имеет седловую величину  $\sigma = Re\lambda_1 + Re\lambda_2 + \lambda_3 < 0$  во всех точках петли. Эта величина определяется корнями линейной системы, тогда  $\sigma = \sigma_O = \sigma_A = \sigma_B$ , где  $\sigma_A, \sigma_B$  – величины любых точек  $A, B$ , включая особые. ГП имеет отрицательную седловую величину во всех точках. Из гомоклинической петли с отрицательной величиной  $\sigma$ , так что  $Re\lambda_1 < 0, Re\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ , зарождается аттрактор.

**Следствие.** Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2, и в системе (1) образуются две седловые петли. Тогда из петель рождаются аттракторы, если орбиты петель не пересекаются.

**Теорема 2.** Пусть дифференциальная система (1) образует ГП. Пусть особая точка  $O(0,0,0)$  системы (1) – седлофокус с седловой величиной равной нулю ( $\sigma_O = 2Re\lambda_{1,2} + \lambda_3 = 0$ ). Пусть седловая величина  $\sigma_{\bar{x}}$ , определяемая характеристическим уравнением системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$  – отрицательна. Тогда в окрестности особой точки  $O(0,0,0)$  системы (1) существует аттрактор.

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы матрица  $A(\bar{x})$  имеет собственные значения, удовлетворяющие уравнению  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ . Тогда образуется ГП с отрицательной седловой величиной и притяжением в каждой точке петли. Такая петля порождает аттрактор.

**Теорема 3.** Пусть дифференциальная система (1) образует ГП. Пусть особая точка  $O(0,0,0)$  системы (1) – седлофокус с седловой величиной  $\sigma_O = 2Re\lambda_{1,2} + \lambda_3 \geq 0$ ; седловая величина  $\sigma_{\bar{x}}$  точек, определяемых характеристическим уравнением системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$  – отрицательна. Тогда, если алгебраическая сумма  $\sigma = \sigma_O + \sigma_{\bar{x}} < 0$ , система (1) порождает аттрактор.

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы особая точка  $O(0,0,0)$  – седлофокус с положительной седловой величиной. Тогда, учитывая равенство (3), имеем ГП с отрицательной седловой величиной и притяжением в каждой точке. Эта петля порождает аттрактор.

Доказанные теоремы 1, 2, 3 опираются на теорему 13.6 Шильникова Л.П. [29] и имеют одну конструкцию доказательств. В приложении реализуются два вопроса:

установление отрицательного значения седловой величины; в случае странного аттрактора – следует рассмотреть механизм потери устойчивости орбиты. Оригинальным является определение отрицательного знака седловой величины ГП, с помощью выражению (3). Подробное рассмотрение выражения (3) позволяет установить для каких значений параметров имеет место неустойчивость орбиты и преодоление системой неустойчивости.

Принцип симметрии в трехмерных системах можно рассматривать как частный случай приведенных выше теорем. Нужно обусловить значения параметров в трехмерной системе, при которых на координатных плоскостях показаны проекции, обладающие определенной симметрией (кососимметрией). Таким образом, теоремы указывают общий случай существования аттракторов; симметрия указывает на существование периодических движений в трехмерной системе.

### 3. Приложения теорем. Принцип симметрии.

Пусть трехмерная система имеет вид

$$dx/dt = f_1(x) + f_1(y) + f_1(z); \quad dy/dt = f_2(x) + f_2(y) + f_2(z); \quad dz/dt = f_3(x) + f_3(y) + f_3(z), \quad (9)$$

где  $x, y, z \in R$ .

Систему (9) можно представить в виде трех двумерных подсистем

$$\begin{aligned} dx/dt &= f_1(x) + f_1(y); & dy/dt &= f_2(x) + f_2(y); \\ dx/dt &= f_1(x) + f_1(z); & dz/dt &= f_3(x) + f_3(z); \\ dy/dt &= f_2(y) + f_2(z); & dz/dt &= f_3(y) + f_3(z). \end{aligned} \quad (10)$$

**Пример 1.** Рассмотрим систему Лоренца

$$dx/dt = s(-x + y); \quad dy/dt = rx - y - xz; \quad dz/dt = -bz + xy, \quad (11)$$

где  $b, r, s$  – положительные параметры ( $r > 1$ ). Введем малые отклонения  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  в системе Лоренца от частных решений  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  и составим уравнения в вариациях системы (11)

$$\delta \dot{x} = -s\delta x + s\delta y; \quad \delta \dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \delta \dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y.$$

Система Лоренца имеет следующие особые точки:

$$O(0, 0, 0); \quad A(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1); \quad B(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Из характеристического уравнения системы в вариациях (11)

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0$$

можно определить характеристические показатели точек в поле трехмерного пространства системы (9). В точке  $O(0, 0, 0)$  характеристическое уравнение принимает вид

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + \lambda(1 + s) + s(1 - r)) = 0,$$

из которого находим

$$\lambda_{1,2} = -(s + 1)/2 \pm \sqrt{((s + 1)/2)^2 + s(r - 1)}; \quad \lambda_3 = -b. \quad (12)$$

Согласно (12) особая точка  $O$  – седлоузел с седловой величиной  $\sigma_O = -(s + 1) - b$ .

Запишем матричное равенство на основе уравнений в вариациях. Выпишем соотношение (3) в виде

$$\begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r - \bar{z} & -1 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В левой части равенства (13) находится матрица системы в вариациях. Первая матрица в правой части равенства (13) представляет спектр линейной системы, соответствующей системе (9). Вторая матрица  $M(\bar{x})$  соответствует той части уравнений в вариациях, которая содержит частные решения  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и имеет корни характеристического уравнения:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}, \bar{\lambda}_3 = 0.$$

Заметим, что частные решения  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  системы уравнений (9) неизвестны. Согласно Теореме 1 в системе Лоренца существует аттрактор. По качеству в системе Лоренца могут быть разные аттракторы.

Представим систему (11) в виде трех двумерных уравнений (вида (10))

$$\frac{dx}{dt} = s(-x + y); \quad \frac{dy}{dt} = rx - y; \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dt} = -sx; \quad \frac{dz}{dt} = -bz; \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = -bz. \quad (16)$$

С помощью подсистем (14) – (16) можно определять симметрию на координатных плоскостях системы (11) (подсистемы не совпадают с системой (11)).

Подсистемы (14) – (16) определяют симметрию системы (11) (для некоторых значений параметров), что тождественно замыканию траектории. Подсистема (14) удовлетворяет условиям (7) (либо (8)). Обозначим правые части в подсистеме (15):  $F_x = -sx, F_z = -bz$ . В подсистеме (15) выполняются условия четности функции  $F_x$  относительно  $z$  и нечетности функции  $F_z$  относительно  $z$ , т. е.

$$F_x(x, -z) = F_x(x, z); \quad F_z(x, -z) = -F_z(x, z).$$

В системе (15) ось  $Oz$  на плоскости  $Oxz$  является осью симметрии (см. (6)). Обозначим правые части в системе (16):  $F_y = -y, F_z = -bz$ . В системе (16) выполняются условия четности функции  $F_y$  относительно  $z$  и нечетности функции  $F_z$  относительно  $z$ , т. е.

$$F_y(x, -z) = F_y(x, z); \quad F_z(y, -z) = -F_z(x, z).$$

В системе (16) ось  $Oz$  на плоскости  $Oyz$  является осью симметрии (см. (6)).

В системе (14) выполняются условия (7) (либо (8)). В системах (14) – (15) выполняются условия вида (8) и в этих системах ось  $Oz$  является осью симметрии. На трех координатных плоскостях имеет место выполнение условий симметрии и кососимметрии. Это указывает на то, что в трехмерной системе существуют значения параметров, которым соответствуют трехмерные аттракторы с симметрией.

При значениях параметров  $(b, r, s) = (9,5/3; 280; 7)$  (рис. 1, а, б, в) траектория Лоренца превращается в «бабочку». «Бабочка» имеет замыкание траектории в силу Теоремы 1. При определенных значениях параметров «бабочка» обладает симметрией, либо кососимметрией на каждой координатной плоскости. Тогда, согласно принципа симметрии, траектория замыкается. Таким образом, существует область значений параметров, при которых траектория замыкается и образует регулярные аттракторы, имеющие симметричные (кососимметричные) портреты на координатных плоскостях. Система Лоренца (11) может вписаться в следующий принцип симметрии.

**Принцип симметрии.** Пусть справедливы предположения 1, 2. Если на каждой двумерной координатной плоскости систем (10) правые части удовлетворяют условиям кососимметрии (7) (либо (8)) и симметрии (5) (либо (6)), то траектория, образуя кососимметрию либо симметрию на координатных плоскостях, замыкается.

При значениях параметров  $(b, r, s) = (8/3; 153; 10)$  (рис. 1, *з, д*) жирными линиями отмечены совокупности точек траектории седлоузлового характера, тонкими линиями – узлофокусные, для которых  $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ . Уменьшение параметра  $r$  приводит к появлению дополнительных периодических движений (тип этих движений имеет название «кратное увеличение периода»). Параметр  $r$  связан с изменением топологии трехмерного пространства в окрестности нуля и особых точек  $O, A, B$ . Изображающая точка замыкает траекторию; модель Лоренца саморегулирует процесс за счет дополнительных регулярных движений (рис. 1, *з, д*). Альтернативой регулярного аттрактора является странный аттрактор, который возникает при потере устойчивости орбиты изображающей точки (вследствие неравномерности движения). В этом случае также выполняется условие теоремы Шильникова: седловая величина петли  $\sigma$  отрицательна. Примем следующие значения параметров:  $(b, r, s) = (8/3; 28; 10)$ . Особая точка  $O$  – седлоузел. Плоскость  $xu$  разделена на области влияния особых точек  $A, B$ . На рис. 1, *е* представлен фрагмент вращения траектории относительно особой точки  $A$ , а также переход и вращение относительно особой точки  $B$ . В случае регулярного аттрактора вращение относительно особой точки  $B$  должно иметь определенную повторяемость относительно особой точки  $A$ . Поведение изображающей точки обусловлено топологией пространства в окрестности особых точек  $A, B, O(0, 0, 0)$ . Полупетля пытается компенсировать периодическими колебаниями неравномерность решения при движении в окрестности особых точек  $A, B$ . Таким образом, путь к хаосу лежит через кратное увеличение периода. Если периодические траектории не компенсируют неустойчивость движения, то происходит бесконечное неповторяющееся периодическое движение, которое образует хаотический аттрактор. Хаосу, причина которого неустойчивость орбиты, предшествует регулярное движение с кратным увеличением периода (рис. 1, *з, д*).

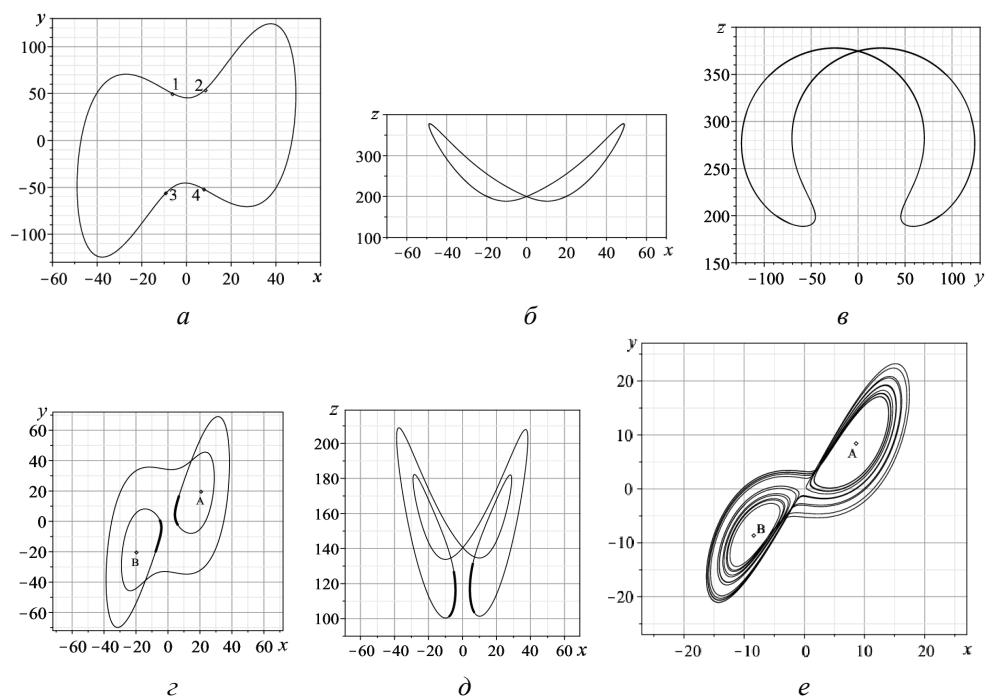


Рис. 1

Итак, вначале может возникнуть кратное увеличение периода, которое идентифицируется как реакция саморегулирования модели на определенную топологию в окрестности особых точек. Хаотические движения появляются в том случае, когда сис-

тема не может стабилизировать кратными периодическими движениями неравномерность движения в целом. Топология многомерного (в данном случае трехмерного) пространства задает программы кратного периода и хаоса. В целом образуются аттракторы – регулярные и хаотические.

Система уравнений Лоренца, полученная в результате упрощения уравнений Навье – Стокса, описывает термоконвекцию в тонком слое вязкой жидкости. Система представляет собой недостаточно реалистичную, но поучительную модель турбулентности в жидкости. Возможно, что она реализуется в лазерах и спиновых системах. Модель Лоренца в виде «бабочки» может быть также моделью устойчивой средней фирмы [7].

Уравнения в вариациях Лоренца отличаются от одномерного пространства системы в вариациях генератора Чуа [10]. В задаче Лоренца уравнение в вариациях зависит от трех частных решений. Седловая величина, определяемая уравнением  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$  равна нулю, поэтому к виду (10) приводится линейная система и эта система определяет принцип симметрии в таких системах. В системе Чуа трехмерная система вида (10) – нелинейная. Она также определяет симметрию подобных систем. Хаотический аттрактор Чуа (как и аттрактор Лоренца) в точке перехода от одной особой точки к другой обнаруживает несимметрию решения. Траектория при переходе из одной области в другую образует хаотическую траекторию. Поле генератора Чуа, порожденное системой в вариациях, зависит от одной переменной.

**Пример 2.** Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений (генератор с экспоненциальной инерциальной нелинейностью [2, 16, 18])

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - e^x + 1), \quad (17)$$

где  $m, b$  – положительные параметры. Система (17) имеет одну особую точку  $O(0, 0, 0)$ . Составим систему, соответствующую уравнениям в вариациях системы (17).

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x).$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$(\lambda + b)(\lambda(\lambda - m + \bar{z}) + 1) + \lambda b \bar{x} e^{\bar{x}} = 0.$$

Системе  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ , где матрица

$$M(\bar{x}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -be^{\bar{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствует характеристическое уравнение  $\lambda(\lambda^2 + \lambda\bar{z} + b\bar{x}e^{\bar{x}}) = 0$ , корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\bar{z}/2 \pm \sqrt{(\bar{z}/2)^2 - b\bar{x}e^{\bar{x}}}; \quad \lambda_3 = 0.$$

Седловая величина имеет вид

$$\sigma_{\bar{x}} = -\bar{z} < 0.$$

Корни в особой точке  $O(0, 0, 0)$   $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ . Седловая величина гомоклинической петли имеет вид  $\sigma = \sigma_o + \sigma_{\bar{x}}$ , где  $\sigma_o = m - b$ .

В работе [16] проведен топологический анализ системы (17) и найдены значения параметров, при которых траектория замыкается и образует на плоскости  $xz$  почти симметричную кривую; построены сепаратрисы, которые разделяют плоскость  $xz$  на области с определенным качеством точек; рассматривается задача, которая содержит



мультистабильность. В радиофизике мультистабильность указывает на сосуществование в трехмерном пространстве нескольких аттракторов, обусловленных определенными начальными условиями [5]. Физическое явление мультистабильности связано с несимметричным полем, которое порождает как предельный цикл, так и странный аттрактор при разных начальных условиях.

Возникновение замкнутой траектории на плоскости  $xz$  связано со следующими значениями параметров:  $(m, b) = (0, 7; 0, 2)$ . Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  образуют положительную седловую величину:  $\sigma_o = m - b; \sigma_o > 0$  и  $|\sigma_{\bar{x}}|$  превышает  $\sigma_o$ . Согласно Теореме 3: если алгебраическая сумма  $\sigma_o + \sigma_{\bar{x}} < 0$ , тогда система (17) порождает аттрактор. На рис. 2, а, б, в приведены координатные портреты предельного цикла системы (17). Рассмотрим три случая изменения параметров и влияние этих изменений на качество аттрактора.

1. При значениях параметров  $(m, b) = (0, 8; 0, 2)$  особая точка увеличивала положительное значение  $\sigma_o$ :  $\sigma_o = m - b = 0, 6$ . Система (17), стремясь сохранить статус-кво, показывает удвоение периода (рис. 2, з). Траектория организовала верхнюю ветвь, которая увеличила отрицательную составляющую  $|\bar{z}|$ .

2. При значениях параметров  $(m, b) = (1; 0, 2)$  особая точка еще более увеличивала положительное значение  $\sigma_o = m - b = 0, 8$ . Траектория системы (17) не только удваивает период, но и захватывает весьма далекие области на плоскости  $xz$  с целью сохранить условие Теоремы 3 и построить аттрактор (рис. 2, д). Этот аттрактор пока регулярный.

3. При значениях параметров  $(m, b) = (1, 2; 0, 2)$  седловая величина  $\sigma_o = m - b = 1$ . Система (17) увеличивает отклонения в сторону возрастания отрицательной составляющей  $|\bar{z}|$ . Аттрактор реализуется в виде хаоса (рис. 2, е). Здесь принимались малые начальные возмущения (порядка 0,01). Качественный анализ ХП точек на плоскости  $xz$  показывает, что аттрактор не имеет симметрии. Область, в которой ХП точек имеют периодическую составляющую, растет с увеличением параметра  $m$ . Эта область сильно несимметрична относительно оси  $Oz$ .

Выполнение условия  $\sigma_o + \sigma_{\bar{x}} < 0$  в случаях 1 – 3 изменяет поведение траектории. Аттрактор из регулярного становится хаотическим (рис. 2, е). Начало теории колебаний трёхмерных систем сильно отличается от теории колебаний двумерных [1].

При параметрах  $(m, b) = (0, 7; 0, 2)$  на плоскости  $xz$  (рис. 2, ж) приведены аттрактор и сепаратрисы системы (17). Выбор плоскости  $xz$  связан с тем, что в характеристическом уравнении системы в вариациях, соответствующих (17), содержатся частные решения  $\bar{x}, \bar{z}$ . Плоскость  $xz$  содержит область точек с периодической составляющей в окрестности особой точки  $O$ . Пунктирной линией (рис. 2, ж, з, и) показаны границы области с периодической составляющей в окрестности особой точки  $(0, 0, 0)$ . За пределами границы точки имеют место действительные корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Плоскость  $xz$  разделена жирной линией (рис. 2, ж). Ниже жирной линии –  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ . Выше жирной сплошной линии –  $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 < 0$ . На жирной сплошной линии  $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 < 0$ .

На рис. 2, з, и приведены аттракторы (предельный цикл и странный аттрактор), которые появляются в зависимости от начальных условий  $x_0$  и связаны с мультистабильностью генератора.  $((m, b) = (1; 0, 2))$ .

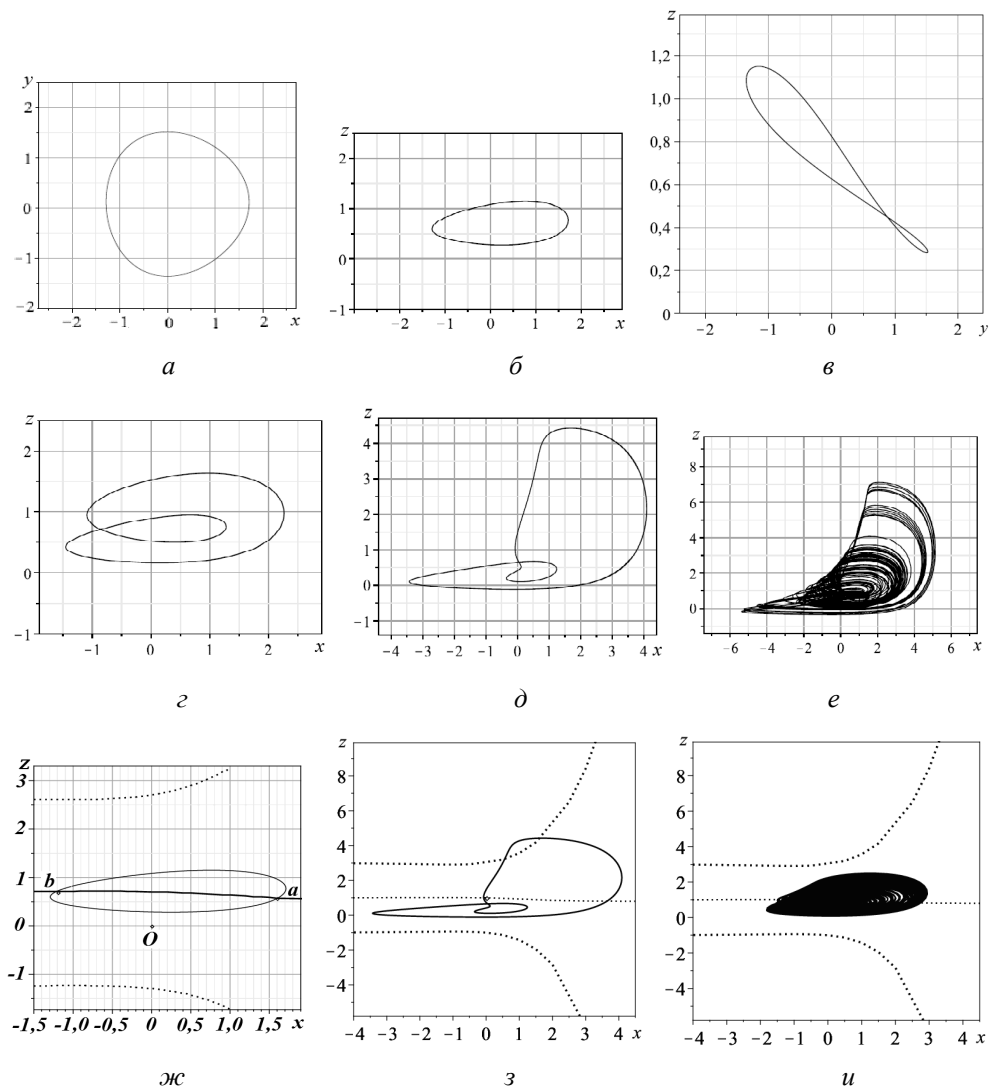


Рис. 2

Колебательный контур генератора с экспоненциальной инерционной нелинейностью описывается уравнением  $\ddot{x} - (m - z)\dot{x} + (z + 1)x = 0$ , инерционный преобразователь представлен оператором  $\dot{z} = -b(z - e^x + 1)$ .

**О мультистабильности.** Физическое явление мультистабильности связано с несимметрией поля относительно оси  $z$  и состоит в следующем. Несимметричная функция, входящая в инерционный преобразователь, порождает несимметричное поле (рис. 2, з, и), которое формирует несимметричную притягивающую область. В одном случае формируются предельные циклы (при сравнительно слабой отрицательной диссипации). В другом случае – предельный цикл и странный аттрактор (при сильной отрицательной диссипации).

Знаки и величины начальных возмущений также влияют на характер аттрактора  $((m, b) = (1; 0, 2))$ . На рис. 2 приведены аттракторы, имеющие различную геометрию (вследствие мультистабильности).

В заключение отметим, что качественный анализ бифуркаций для трехмерных систем может также описывать механизм возникновения сложных движений [16, 17]. Таким образом, в случае одной особой точки с привлечением исследований бифуркаций представлен последовательный анализ возникновения странных движений. Здесь

также как и в работе [16] рассматривалась проблема мультистабильности. Знаки и величина начальных возмущений системы (17) связаны с типом аттрактора.

В примере 2 (генератор с экспоненциальной инерциальной нелинейностью) координатные портреты имеют вид на рис. 2. Возникает проблема замыкания траектории. Если система не может компенсировать неустойчивость орбиты кратными периодическими движениями, тогда на бесконечном времени появляются неповторяющиеся движения, которые носят хаотический характер и организуют странный аттрактор. Отметим, что как бы не организовывался процесс стабилизации движения, главный результат состоит в получении отрицательной седловой величины ГП. Этим заканчивается как регулярный так и хаотический процесс образования аттрактора.

**Пример 3.** Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений (генератор с квадратичной нелинейностью [2])

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - x^2), \quad (18)$$

где  $m, b$  – положительные параметры. Система имеет одну особую точку  $O(0, 0, 0)$ . Введем малые отклонения  $\delta x, \delta y, \delta z$  от частных решений  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  системы (30) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - 2\bar{x}\delta x).$$

Запишем характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^3 + \lambda^2(b - m + \bar{z}) + \lambda(b(-m + \bar{z} + 2\bar{x}^2) + 1) + b = 0.$$

В точке  $O(0, 0, 0)$  характеристическое уравнение примет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 - \lambda m + 1) = 0$ . Характеристические показатели точки  $O(0, 0, 0)$  запишутся следующим образом:  $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ . Примем следующие значения параметров:  $(m, b) = (1, 1)$ . Точка  $O$  имеет тип седлофокуса с седловой величиной  $\sigma_O = 0$ . Матрице

$$M(\bar{x}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2b\bar{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует характеристическое уравнение  $\lambda(\lambda^2 + \lambda\bar{z} + 2b\bar{x}^2) = 0$ , корни которого  $\lambda_{1,2} = -\bar{z}/2 \pm \sqrt{(\bar{z}/2)^2 - 2b\bar{x}^2}$ ,  $\lambda_3 = 0$ . Седловая величина имеет вид  $\sigma_{\bar{x}} = -\bar{z}$ . Покажем, что матрице  $M(\bar{x}, \bar{z})$  соответствует диссипативный осциллятор. Рассмотрим линейную систему  $dX/dt = -\bar{z}X - \bar{x}Z$ ,  $dZ/dt = -2b\bar{x}X$ , которая идентична диссипативному осциллятору  $(d^2Z)/(dt^2) + dZ/dt + 2b\bar{x}^2Z = 0$ .

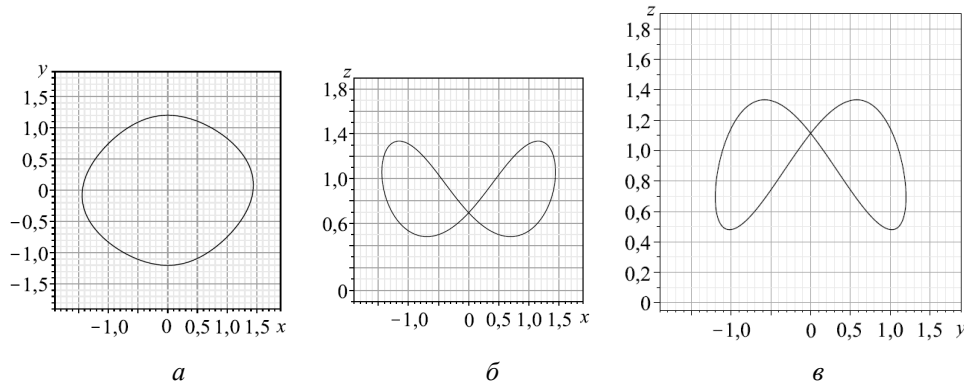
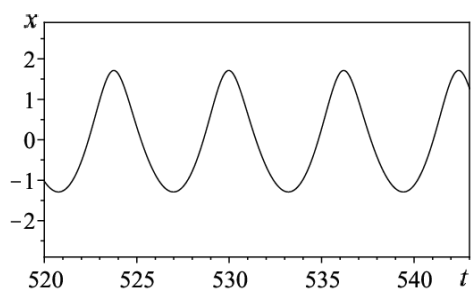


Рис. 3

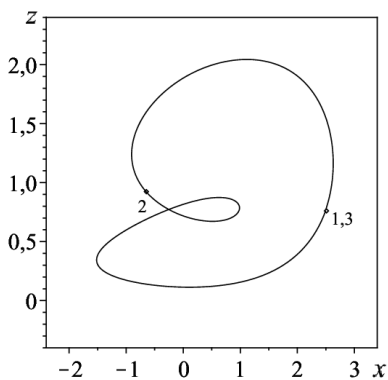
В примере 3 с помощью Теоремы 2 устанавливается существование замкнутой траектории. В трехмерной системе (18) существует одна особая точка  $O(0,0,0)$ . На плоскости  $xu$  имеет место симметрия относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ . На плоскостях  $xz$ ,  $yz$  симметрия относительно оси  $Oz$ . В случае  $\sigma < 0$  ГП образует замкнутую траекторию – регулярный аттрактор. Согласно Теореме 2 в системе (18) существует периодическая орбита. На рис. 3, *a*; 4, *б* приведена замкнутая кривая системы (18) в проекциях на координатные плоскости. Этот результат можно получить с помощью принципа симметрии для трехмерных систем [11].

#### 4. Неустойчивость орбиты. Эффект Перрона.

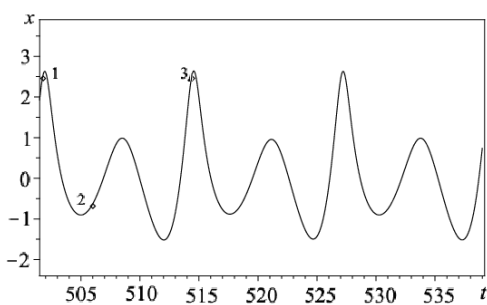
Во время обсуждения результатов, связанных с существованием аттракторов, образование аттракторов связывалось с эффектом Перрона [9, 14]. Численное решение системы (1) подставляется в характеристическое уравнение системы в вариациях.



*a*



*б*



*в*

Рис. 4

Последнее дает возможность определить точки, в которых решение изменяет качество. Создается картина изменения знака и качества ХП. Эффект Перрона [26] в системе дифференциальных уравнений связан со сменой значения характеристических показателей решений дифференциальных уравнений.

Характеристические показатели в точках образуют поле, в котором движется изображающая точка. Для аттрактора с одной особой точкой путь к хаосу может лежать через бифуркации кратного увеличения периода. Рассматриваем это явление как соморегуляцию системы, которая создает аттрактор. На рис. 4, *a* приведена временная реализация предельного цикла системы (17) (генератора с экспоненциальной нелинейностью) при значении параметров  $(m, b) = (0, 7; 0, 2)$ . При увеличении параметра  $m$  ( $m, b) = (0, 93; 0, 2)$ , который связан с отрицательной диссипацией колебательного контура системы (17), увеличиваются размахи колебаний. Траектория сохраняет периодичность и увеличивает период (рис. 4, *б*, *в*). На рис. 4, *б* от точки 1 до точки 2 (против часовой стрелки) все точки узлофокусные, характеристические показатели  $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 < 0$ ; от точки 2 до точки 3 все точки седлофокусные, характеристические показатели  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ ; ХП –  $(0, +, -)$ . В указанных точках происходит смена значения характеристических показателей решений.

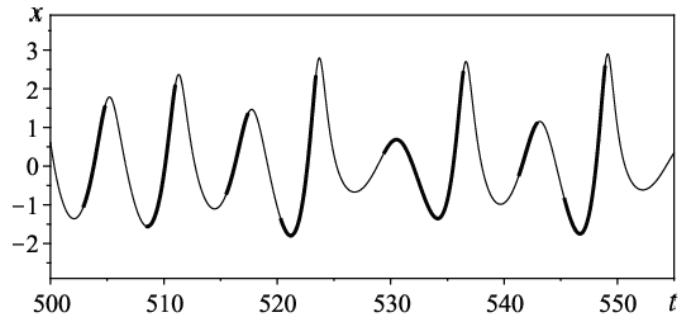


Рис. 5

При значениях параметров  $(m, b) = (1; 0, 2)$  траектория хаотична (рис. 5). Периодичность колебаний сохраняется. Жирной линией отмечены интервалы, точки которых имеют седлофокусную характеристику:  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ ; сумма седловых величин  $\sigma_j = \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{3j}$ ; равна  $S^+ > 0$ . (рис. 5). Тонкой линией – участки траектории заполненные седлофокусными и узлофокусными точками с  $\sigma_j < 0$ . Чередование седлофокусных точек с положительным значением  $\sigma$  носит нерегулярный характер, что порождает неустойчивую орбиту (рис. 5) и неравномерность движения. Чередование наблюдается на интервале  $\rightarrow \infty$ . Здесь смена знака не нарушает периодичность движения, однако, аттрактор становится хаотичным. На рис. 1, а приведен кососимметричный координатный портрет системы Лоренца. Характеристические показатели точек на траектории имеют седлофокусные значения и меняют их на седлоузловые в ограниченных пределах точек 1–2; 3–4. Таким образом, эффект Перрона имеет место при качественном анализе бифуркаций решений.

В работе представлен бифуркационный процесс хаотических движений. В примере генератора с экспоненциальной нелинейностью (система (17)) наблюдается смена нерегулярных интервалов точек с положительными и отрицательными седловыми величинами, что порождает орбитную неустойчивость и хаос. Несмотря на определенный опыт исследования нелинейных систем [2, 4, 6, 7, 14, 28, 29] причина существования регулярных и странных аттракторов в многомерных системах остается слабо изученной и связана с механизмов возникновения аттракторов.

#### 5. Теорема о существовании аттрактора, несвязанная с теоремой Шильникова.

В восьмидесятых годах прошлого века несколько многомерных моделей было предложено О.Рёсслером [3, 20, 27]. Две модели получили распространение и их можно причислить к базовым, часто используемых для тестов различных численных методов хаотической динамики [2]. В многомерных системах (четырёхмерных, например) сложно осуществить качественный анализ в силу большой размерности. В случае численного анализа исчезает физическая сторона явления и прогноз становится весьма слабым. Рассмотрим задачу существования аттрактора (регулярного и странного) в трехмерной системе, которая получена из четырехмерной системы. Представим следующий вариант исследования: определяются особые точки системы; составляются уравнения движения в новых координатах; доказывается теорема, которая не связана с теоремой Шильникова.

**Пример 4.** Запишем систему четырех уравнений О. Рёсслера [27].

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta - \zeta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + a\eta + \psi; \quad \frac{d\zeta}{dt} = b + \xi\zeta; \quad \frac{d\psi}{dt} = c\psi - d\zeta.$$

Примем следующие значения параметров  $(a, b, c, d) = (0, 25; 3; 0, 05; 0, 5)$ . Приравняем правые части четырехмерной системы нулю. Система алгебраических уравнений

$$-\eta - \zeta = 0; \quad \xi + a\eta + \psi = 0; \quad b + \xi\zeta = 0; \quad c\psi - d\zeta = 0$$

имеет такие решения:

$$\xi_* = -\sqrt{b\frac{d-ac}{c}}; \quad \zeta_* = \sqrt{\frac{bc}{d-ac}}; \quad \eta_* = -\zeta_*; \quad \psi_* = d\sqrt{\frac{b}{c(d-ac)}}.$$

Вводим систему координат  $Ox_1x_2x_3x_4$ , в которой особая точка находится в нуле

$$x_1 = \xi - \xi_*; \quad x_2 = \eta - \eta_*; \quad x_3 = \zeta - \zeta_*; \quad x_4 = \psi - \psi_*.$$

Система уравнений Рёсслера в новых координатах примет следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2 + x_4; \quad \frac{dx_3}{dt} = \zeta_*x_1 + \xi_*x_3 + x_1x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = -dx_3 + cx_4. \quad (19)$$

Рассмотрим систему трех уравнений, которая получена из системы (19)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \zeta_*x_1 + \xi_*x_3 + x_1x_3. \quad (20)$$

Система (20) также принадлежит О.Рёсслеру и качественное исследование подобных систем имеет свое значение в динамике химических реакций с перемешиванием [27]. Систему (20) можно представить в виде трех двумерных подсистем

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad (21)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_3); \quad (22)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \xi_*x_3, \quad (23)$$

где

$$f_3(x_1, x_3) = \zeta_*x_1 - |\xi_*| x_3 + x_1x_3.$$

Система (20) разделена на три подсистемы таким образом, чтобы линейная подсистема (21) определяла процесс на плоскости  $x_1x_2$ . Подсистема (22) содержит нелинейное уравнение трехмерной системы (20) и определяет процесс на плоскости  $x_1x_3$ . Подсистема (21) является диссипативным осциллятором  $\ddot{x}_1 - ax_1 + x_1 = 0$ , траектория которого уходит из нуля плоскости  $x_1x_2$ . Рассмотрим подсистему (22), которую представим в виде нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + (|\xi_*| - x_1(t))\frac{dx_3}{dt} + \zeta_*x_3 + x_3^2 = 0. \quad (24)$$

В системе (24)  $x_1(t)$  выступает в виде параметра, зависящего от  $t$ . Обозначим  $x_5 = (dx_3)/dt$  и рассмотрим поведение осциллятора на плоскости  $x_3x_5$ . Осциллятор (24) можно представить в виде двух уравнений  $(dx_3)/dt = x_5$ ,  $(dx_5)/dt = -(|\xi_*| - x_1(t))x_5 - \zeta_*x_3 + x_3^2$ , которые запишутся в общем виде так:

$$\frac{dx_3}{dt} = F_3(x_3, x_5); \quad \frac{dx_5}{dt} = F_5(x_3, x_5). \quad (25)$$

На плоскости  $x_3x_5$  траектория подсистемы (25) удовлетворяет условию кососимметрии (7), (8) и поэтому замкнется.

Два связанных осциллятора (на плоскости  $x_1x_2$  – линейный, на плоскости  $x_1x_3$  – нелинейный) не уходят на  $\infty$  и не попадают в нуль  $(0, 0, 0)$ . Пусть поведение нелинейного осциллятора доминирует и оба осциллятора ведут себя как нелинейные связанные системы. Тогда подсистемы (21), (22) образуют замкнутые траектории на плоскостях. Кососимметрия просматривается на плоскости  $x_1x_2$ . Обратимся к Примечанию первого раздела данной работы, где указано, что линейные осцилляторы обладают кососимметрией, но траектории таких систем не замкнуты. Поскольку решение  $x_1(t)$  входит в подсистему (22), то оно приобретает нелинейный характер и образует замкнутую траекторию. Решения подсистемы (23)  $x_2(t), x_3(t)$  не стремятся к  $\infty$  и не попадают в нуль, но формально удовлетворяют условиям (7), (8), следовательно, траектория на плоскости  $x_2x_3$  замыкается.

Рассмотрим подсистему (21). Обратимся к Примечанию первого пункта (п. 1) данной статьи, где указано, что линейные осцилляторы обладают кососимметрией, но траектории таких систем не замкнуты. Поскольку решение  $x_1(t)$  входит в подсистему (22), то оно приобретает нелинейный характер и образует замкнутую траекторию.

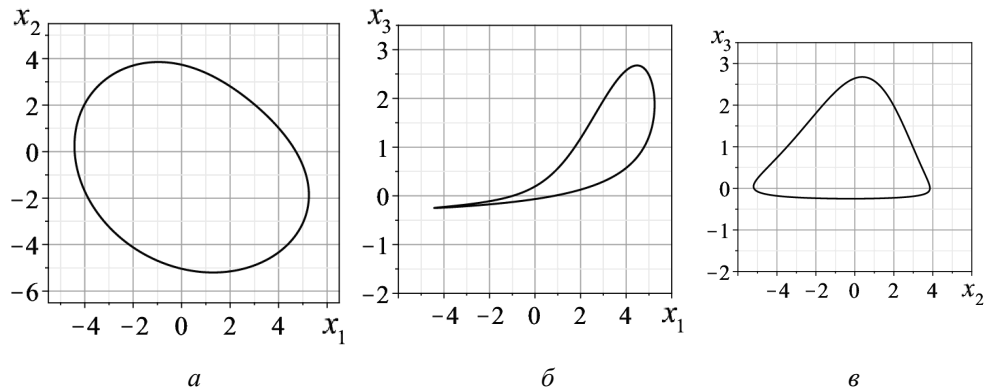


Рис. 6

**Предположение 3.** Пусть трехмерная нелинейная система (20) приводится к виду (21), (24), (23). Особая точка трехмерной системы в нуле  $(0, 0, 0)$  – седлофокус.

**Теорема 4.** Если трехмерная система (20) удовлетворяет условиям Предположения 3, то в окрестности особой точки  $(0, 0, 0)$  рождается аттрактор.

**Доказательство.** Так как особая точка трехмерной системы в нуле седлофокус, то траектория уходит от нуля. В трехмерной системе первая подсистема (20) (плоскость  $x_1x_2$ ) имеет неустойчивую особую точку в нуле и удовлетворяет условиям (7), (8), т.к. приобретает свойство образовывать замкнутую кривую (аттрактор) благодаря связи с нелинейной подсистемой (25). Нелинейная подсистема (24) образует замкнутую кривую ввиду того, что представляет нелинейный осциллятор и удовлетворяет условиям (7), (8). Подсистема (23) по виду линейная, но по сути нелинейная и удовлетворяет условиям (7), (8), образуя замкнутую кривую на плоскости. Траектория трехмерной системы (20) либо замыкается, находясь в окрестности нуля  $(0, 0, 0)$ , либо осуществляет поиск, стремясь замкнуться. На рис. 6 приведены координатные портреты системы (20). При изменении параметра  $a$  ( $a = 0, 3$ ) в системе возникает удвоение периода, что является признаком разрушения периодического движения. Дальнейшее изменение параметра  $a$  порождает хаотический аттрактор.

**6. Обобщение теорем 1, 2, 3 с помощью теоремы Шильникова о существовании аттрактора.**

С помощью теорем 1, 2, 3 рассмотрено три случая возникновения аттрактора, в которых выполняется условие

$$\sigma_0 + \sigma_{\bar{x}} < 0. \quad (26)$$

1. Седловая величина особой точки  $\sigma_0 < 0$ ; седловая величина характеристического уравнения системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ ,  $\sigma_{\bar{x}} = 0$ .

2. Седловая величина особой точки  $\sigma_0 = 0$ . седловая величина характеристического уравнения системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ ,  $\sigma_{\bar{x}} < 0$ .

3. Седловая величина особой точки  $\sigma_0 \geq 0$ . седловая величина характеристического уравнения системы  $\sigma_{\bar{x}} < 0$ .

Объединим эти три случая в общую формулировку теоремы Шильникова.

**Обобщенная теорема Шильникова.** *Когда седловая величина  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\bar{x}}$  отрицательна, из гомоклинической петли рождается единственный аттрактор.*

Аттрактор в рамках обобщенной теоремы Шильникова может быть регулярным и хаотическим. Вернемся к примеру 4. Рассмотрим систему в вариациях, соответствующую системе (20)

$$\frac{d\delta x_1}{dt} = -\delta x_2 - \delta x_3; \quad \frac{d\delta x_2}{dt} = \delta x_1 + a\delta x_2; \quad \frac{d\delta x_3}{dt} = \zeta_*\delta x_1 - |\zeta_*| \delta x_3 + \bar{x}_3\delta x_1 + \bar{x}_1\delta x_3. \quad (27)$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях (27) имеет вид

$$(\lambda(\lambda - a) + 1)(\lambda - |\zeta_*|) = 0. \quad (28)$$

Из уравнения (28) получим  $\sigma_0 = a - |\zeta_*|$ . Запишем характеристическое уравнение системы  $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ , которое содержит частные решения. Из этого характеристического уравнения имеем:  $\sigma_{\bar{x}} = \bar{x}_1$ . Введем в параметрах  $(a, b, c, d) = (0, 25; 3; 0, 05; 0, 5)$  изменения таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\sigma_0 < 0$ . Система (34) будет самоорганизовывать процесс так, чтобы имело место неравенство (26). Тогда будет заметно изменение частного решения  $\bar{x}_1$  и связанных с ним двух других решений. Эта самоорганизация направлена на сохранение аттрактора. Примем параметр  $a = 0,3$ , тогда  $|\zeta_*| = 0,559$  и координатные портреты показывают удвоения периода (рис. 7, а, б, в).

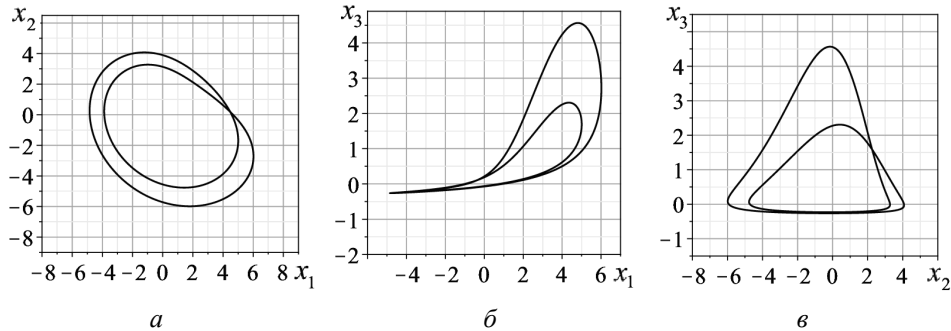


Рис. 7

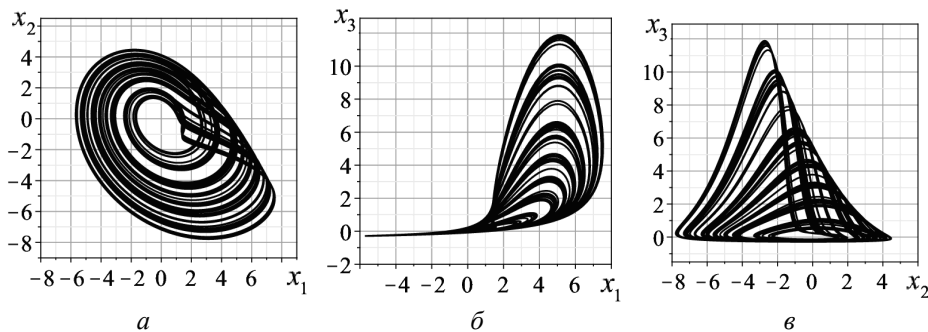


Рис. 8



Примем параметр  $a = 0,4$ , тогда  $|\xi_*| = 0,556$  и координатные портреты показывают хаотическое изменение отклонений (рис. 8, *a*, *б*, *в*).

### 7. Синхронизация двух идентичных генераторов с симметричной связью [24].

Рассмотрим систему двух генераторов вида (17) с экспоненциальной инерционной нелинейностью. Связка двух генераторов имеет вид безразмерной шестого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= mx_1 - x_1z_1 + y_1 + \varepsilon(x_2 - x_1); \quad \frac{dy_1}{dt} = -x_1; \quad \frac{dz_1}{dt} = -b(z_1 - e^{x_1} + 1); \\ \frac{dx_2}{dt} &= mx_2 - x_2z_2 + y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2); \quad \frac{dy_2}{dt} = -x_2; \quad \frac{dz_2}{dt} = -b(z_2 - e^{x_2} + 1), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\varepsilon > 0$  – параметр связи двух генераторов.

Запишем систему в вариациях соответствующую системе (29)

$$\delta \dot{x}_1 = m\delta x_1 - \bar{z}_1\delta x_1 + \delta y_1 - \bar{x}_1\delta z_1 + \varepsilon(\delta x_2 - \delta x_1); \quad \delta \dot{y}_1 = -\delta x_1; \quad \delta \dot{z}_1 = -b(\delta z_1 - e^{\bar{x}_1}\delta x_1);$$

$$\delta \dot{x}_2 = m\delta x_2 - \bar{z}_2\delta x_2 + \delta y_2 - \bar{x}_2\delta z_2 + \varepsilon(\delta x_1 - \delta x_2); \quad \delta \dot{y}_2 = -\delta x_2; \quad \delta \dot{z}_2 = -b(\delta z_2 - e^{\bar{x}_2}\delta x_2).$$

Если один генератор образует аттрактор, то за счет симметрии связи  $\varepsilon(\delta x_j - \delta x_k)$  система (29) образует два одинаковых аттрактора, т.к.

$$x_1 = x_2 = x; \quad y_1 = y_2 = y; \quad z_1 = z_2 = z. \quad (30)$$

Уравнения в вариациях системы (29) с учетом (30) принимают вид

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m + \varepsilon - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x). \quad (31)$$

Характеристическое уравнение системы (31) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m + be^{\bar{x}}) + 1) + b = 0.$$

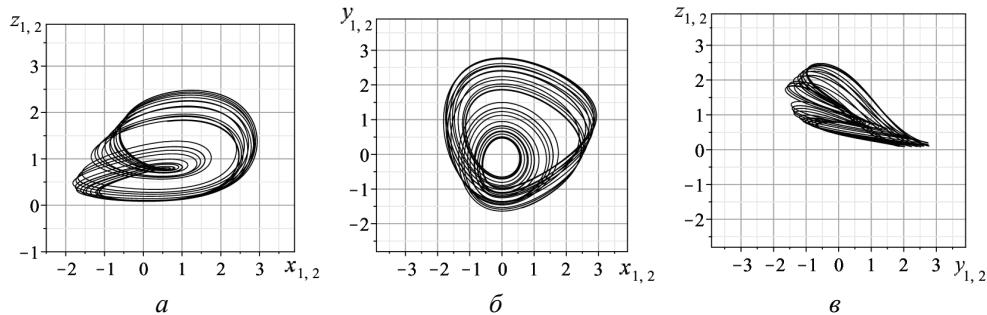


Рис. 9

Одиночный генератор при  $(m, b) = (1; 0, 2)$ ; порождает предельный цикл либо хаотический аттрактор (см. рис. 2, з, u). На рис 9, *a*, *б*, *в* приведены хаотические аттракторы, которые возникают в системе (29) (и в системе (17)). Результаты по синхронизации хаоса приведены в виде таблицы в работе [18].

**Замечание о новых движениях.** Рассматриваем синхронизацию как способность связки генераторов образовывать одинаковые координатные портреты (такие как в одиночном генераторе) на координатных плоскостях. В этом случае возникает проблема новых движений [3, 5, 13]. В режиме синхронизации два связанных генератора с экспоненциальной инерционной нелинейностью имеют портреты на плоскостях

тях  $x_1z_1$ ;  $x_2z_2$ , идентичные одному генератору. Система (17) и система (29) имеют одно и то же уравнение в вариациях, в которое входят переменные  $x, z$ .

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m + e^{\bar{x}} + \bar{x}) + b) = 0. \quad (32)$$

Два связанных генератора имеют систему в вариациях, в которую входят частные решения  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$ . На плоскости  $xz$  частные решения  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$  определяют координатный портрет. На плоскостях  $yz$ ,  $xu$  координатные портреты также связаны с частными решениями  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$ . Поскольку каждая плоскость генератора с экспоненциальной инерционной нелинейностью связана с частными решениями, то при синхронизации связки генераторов не появляется новых движений. На рис. 9 приведены три координатных портрета, которые имеют место в системе одиночного генератора (17). Уравнение (32) определяет бифуркационный процесс на плоскости  $xz$  как для системы (17), так и для системы (31). Синхронизация не меняет этот процесс. Новые движения в системе (31) не появляются.

Рассмотрим альтернативный случай. В генераторе Чуа [18]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y.$$

Запишем уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y); \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y + \delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y.$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) = 0. \quad (33)$$

Рассмотрим систему двух генераторов в цепи Чуа

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha(ax_1 - bx_1^3 + y_1); & \frac{dy_1}{dt} &= x_1 - y_1 + z_1 + \gamma((x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)); \\ & & \frac{dz_1}{dt} &= -\beta y_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha(ax_2 - bx_2^3 + y_2); & \frac{dy_2}{dt} &= x_2 - y_2 + z_2 + \gamma((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)); \\ & & \frac{dz_2}{dt} &= -\beta y_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая симметрию связи между генераторами, и т.к.  $x_1 = x_2 = x$ ;  $y_1 = y_2 = y$ ;  $z_1 = z_2 = z$ , характеристическое уравнение системы в вариациях двух генераторов имеет вид (33). Процесс бифуркаций связан с переменной  $x$ . Заметим, что синхронизация требует определенного значения коэффициента связи. Здесь реализуется возможность получить новые движения при синхронизации. Рассмотрим плоскость  $yz$ . Переменные  $y$ ,  $z$  не входят в уравнение (33). Поэтому на плоскости  $yz$ , а также по осям  $y$ ,  $z$  на других плоскостях отклонения иные нежели в одиночном генераторе. Например, на плоскости  $xz$  реализуется новое движение, которое имеет сильное отклонение по переменной  $z$ , так как  $z$  не входит в уравнение (33). Этот режим не порождается одиночным генератором. Сравним рисунок предельного цикла одиночного генератора с координатным портретом двух связанных генераторов Чуа (34) (рис. 10). По оси  $z$  синхронизированная система делает значительно большие отклонения. Это явление обусловлено тем, что характеристическое уравнение системы (33) содержит лишь переменную  $x$ . Остальные переменные не включены в уравнение (33). В при-

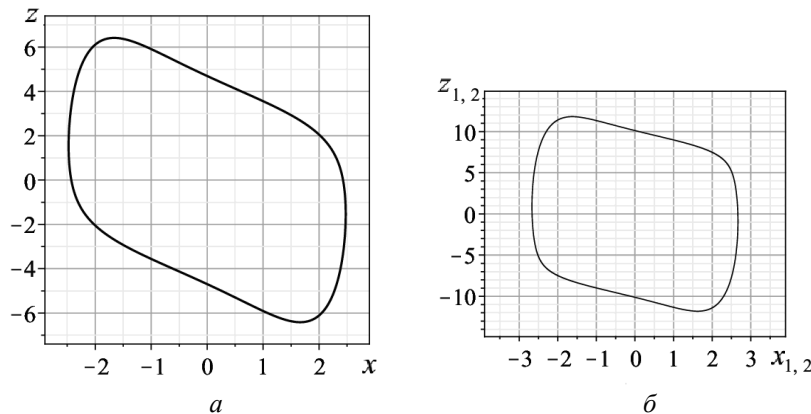


Рис. 10

кладных задачах поиск новых движений не требует численного эксперимента, но связан с анализом характеристического уравнения системы в вариациях.

#### Заключение.

Работа содержит теоремы (утверждения, принципы симметрии), которые позволяют установить существование аттрактора в трехмерной системе и представить процесс хаотизации аттрактора в качестве ответа системы на изменение значений параметров либо начальных условий. Как показал опыт исследования, теоремы, доказанные с помощью подхода Шильникова, более конструктивны по формулировке и применению. Однако, доказательство теорем иным способом расширяет физические свойства трехмерных систем на координатных плоскостях. Принцип симметрии в трехмерных системах наравне с теоремами идентифицирует регулярные аттракторы [11].

Приведено неформальное обобщение теоремы Шильникова, которое состоит в подробном описании седловой величины  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\bar{x}}$ , где величина  $\sigma_{\bar{x}}$  связана с частными решениями системы. Такое представление показывает, что включение процесса самоорганизации системы при образовании странного аттрактора связано с величиной  $\sigma_{\bar{x}}$ . Аналитическое представление обобщенной теоремы Шильникова в виде неравенства (26) включает в выражение седловой величины гомоклинической петли слагаемое  $\sigma_{\bar{x}}$ . В рассмотренных примерах есть случаи, когда  $\sigma_0 > 0$ , тогда включается элемент саморегуляции системы, который состоит в изменении геометрии траектории таким образом, чтобы имело место неравенство  $\sigma < 0$ . В приведенном во введении перечне монографий почти нет теорем (есть лишь теорема Шильникова). Можно привести традиционно теоремы о существовании аттрактора в трехмерной системе (теорема 4 в данной работе), но лишь в обобщенной Теореме имеет место слагаемое, которое отвечает за саморегуляцию системы в виде образования хаотического аттрактора.

Отсутствие новых движений при синхронизации связанных  $N$  генераторов может быть предсказано по виду уравнений в вариациях. Если трехмерная система в вариациях содержит одно частное решение, то отклонения по двум координатам иное, нежели в одиночном генераторе колебаний. Теоретические результаты данной работы могут быть полезны при решении прикладных проблем механики [15, 18, 22, 23, 24, 25].

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Доведено теорему про існування аттрактора. Сформульовано узагальнену теорему Шильникова. Узагальнена теорема включає у вираз сідлової величини гомоклінічної петлі додаток, який має якісне значення при утворенні дивного аттрактора. Розглянуто біфуркаційну програму синхронізації пов'язаних однакових тривимірних генераторів. Встановлено причину появи у зв'язці генераторів нових рухів.

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981, 568 с.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – Москва: Наука, 1990, 312 с.
3. Астахов В.В., Шабунин А.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И. Анищенко В.С. Нелинейная динамика двух связанных через емкость генераторов Чуа // Радиотехника и Электроника. – 1997. – **42**, № 3. – С. 320 – 327.
4. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
5. Коблянский С.А., Шабунин А.В., Астахов В.В. Вынужденная синхронизация периодических колебаний в системе с фазовой мультистабильностью // Нелинейная динамика. – 2010. – **6**, № 2. – С. 277 – 289.
6. Гуженхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва – Ижевск: ИКИ, 2002 – 560 с.
7. Гурина Т.А., Дорофеев И.А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы // Динамические системы. – 2010. – **28**. – С. 63 – 68.
8. Краснополянская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – Москва – Ижевск: РХД, 2008. – 278 с.
9. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. – Москва – Ижевск: ИКИ, 2006. – 168 с.
10. Мартынюк А.А., Никитина Н.В. О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання – 2014. – **17**, № 2 – С. 268 – 280.
11. Никитина Н.В. Принцип симметрии в трехмерных системах // Доп. НАН України. – 2017. – № 7. – С. 21 – 28.
12. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – Киев: Феникс, 2012. – 235 с.
13. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, N 6. – P. 1677 – 1699.
14. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St.Peterburg: St.Peterburg University Press, 2008. – 161 p.
15. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Stability and Bifurcation in a Model of the Magnetic Field of the Earth // Int. Appl. Mech. – 2014. – **49**, N 6. – P. 721 – 730.
16. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation in and Multi-Stability of the Oscillations of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 232.
17. Martynuk A.A., Nikitina N.V. On Periodic Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
18. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation and Synchronization of Two Coupled Generators // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 369 – 379.
19. Martynuk A.A., Nikitina N.V. On the Qualitative Analysis of One Model of Transport Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 231 – 238.
20. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
21. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
22. Nikitina N.V., Sidorets V.N. Bifurcation Processes in a Physical Model // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 326 – 335.
23. Nikitina N.V. Analyzing the Mechanisms of Loss or an Orbital Stability in Mathematical Models of Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 716 – 726.
24. Nikitina N.V. Bifurcations of Two Coupled Oscillators // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 463 – 470.
25. Nikitina N.V. Bifurcations in Reference Models of Multidimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2018. – **53**, N 6. – P. 702 – 709.
26. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. – 1930. – **32**, N 5. – P. 702 – 728.
27. Rössler O.E. Chemical turbulence: chaos in a simple reaction-diffusion system // Zeitschrift Naturforschung. – 1976. – **31**, N 10. – P. 1168 – 1172.
28. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 p.
29. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 20.02.2019

Утверждена в печать 03.03.2020