А.А.Мартынюк, Ю.А.Мартынюк-Черниенко

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ДРОБНО-ПОДОБНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract The article presents the results of the analysis of boundedness solutions of nonlinear systems with fractional-like derivative of the state vector. By the method of integral inequalities, we obtain estimates of the solutions and establish the conditions of boundedness of solutions.

Key words: nonlinear fractional-like system of equations, integral method inequalities, boundedness of solutions.

Введение.

Понятие дробной производной непрерывной функции возникло в математическом анализе после вопроса Лопиталя к Лейбницу в 1695 году: как понимать выражение $d^n x / dt^n$ при $n = 1/2$? Ответ Лейбница был таким: «This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn» (см. [9] и библиографию там).

Возросший интерес в последние два десятилетия к уравнениям с дробными производными [4, 8, 10, 14, 16, 23] обусловлен возможностью более точного описания процессов в некоторых моделях явлений реального мира.

А именно, в теории автоматического управления предложено использовать законы управления, содержащие производные дробного порядка [5, 7]. При этом было показано, что лучший способ обеспечения эффективного управления дробными системами, является использование дробных контроллеров.

Другим примером дробной системы является трехмерное уравнение теплопереноса при наличии контроля по краям [3].

Благодаря экспериментальным данным, полученным в работе Шмидта и Драмхеллера [24] установлено, что ток, протекающий через конденсатор, пропорционален не целочисленной производной напряжения в сети.

В реологии, когда вязкоупругие твердые вещества используются в качестве изоляторов или вибрационных демпферов, дробные производные являются подходящим средством для более точного описания затухания в системе. При этом уменьшается количество параметров модели [25, 26].

Исследователи пользуются наиболее распространенными определениями дробной производной Римана – Лиувилля, Адамара, Грюнвальда – Летникова и др. [23, 10]. В 1969 году Капуто было предложено новое определение дробной производной [6], которое расширило возможности анализа уравнений возмущенного движения с дробной производной Капуто вектора состояния. В монографии [12] изложены результаты для уравнений этого типа, полученные вплоть до 2009 года.

В статьях [2, 11] предложено определение дробной производной, названной авторами «conformable fractional derivative», что в русском переводе ближе всего к выражению «дробно-подобная производная». В настоящей статье используется именно это выражение.

Данная статья является продолжением исследований дробно-подобных уравнений возмущенного движения, начатых в работах [1, 15, 17 – 20, 27], в которых приводится обобщение прямого метода Ляпунова на этот класс уравнений возмущенного движения, устанавливается принцип сравнения со скалярной и векторной функциями Ляпунова, находятся условия практической устойчивости относительно многообразий решений дробно-подобных уравнений, приводятся условия практической устойчивости для импульсных систем с дробно-подобной производной вектора состояния, рассматривается новый класс нейронных дробно-подобных систем.

В данной статье, используя метод интегральных неравенств, получены оценки решений нелинейных дробно-подобных систем уравнений и устанавливаются условия ограниченности движения.

§1. Элементы дробно-подобного математического анализа (см. [2, 11]).

Пусть $q \in (0,1]$ и задана непрерывная функция $x(t):[t_0,\infty) \to R$.

Рассмотрим функцию $w(t,\theta,q): R_+^2 \times (0,1] \to R_+$ такую, что $w(t,\theta,q) \to 0$ при $\theta \to 0$ и при любом $0 < q \le 1$. Класс таких функций будем обозначать $C^q([0,\infty))$.

Определение 1.1. Пусть функция $x:[t_0,\infty) \to R$. Для любого $q \in (0,1]$ определим выражение $D_{t_0}^q(x(t))$ формулой

$$D_{t_0}^q(x(t)) = \lim\left\{\frac{x(t+w(t,\theta,q)) - x(t)}{w(t,\theta,q)},\ w(t,\theta,q) \to 0\right\},$$

где $w(t,\theta,q) \to 0$ при $\theta \to 0$ и при любом значении $0 < q \le 1$, $t_0 \ge 0$, если предел существует и конечен.

Выражение $D_{t_0}^q(x(t))$ – называется дробно-подобной производной (ДПП) функции $x(t)$ порядка $0 < q \le 1$.

Приведем некоторые примеры функции $w(t,\theta,q)$, из имеющихся к настоящему времени в литературе.

(a) $w(t,\theta,q) = \theta t^{1-q}$ (см. [11]); (b) $w(t,\theta,q) = \theta(t-t_0)^{1-q}$ (см. [2]);

(c) $w(t,\theta,q) = t\exp(\theta t^{-q}) - t$ (см. [9]); (d) $w(t,\theta,q) = t\widehat{E}_\beta(\theta t^{-q}) - t$ (см. [26]),

где $\widehat{E}_\beta(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{\Gamma(\beta^k+1)},\ \beta > 0,\ z \in C,$ усеченная однопараметрическая функция Миттаг – Леффлера.

Далее в статье применяется Определение 1.1 с функцией (b). В этом случае имеем следующее определение.

Определение 1.2. Пусть функция $x:[t_0,\infty) \to R$. Для любого $q \in (0,1]$ дробно-подобная производная функции $x(t)$, $D_{t_0}^q(x(t))$ принимает вид

$$D_{t_0}^q(x(t)) = \lim\left\{\frac{x(t+\theta(t-t_0)^{1-q}) - x(t)}{\theta},\ \theta \to 0\right\}.$$

Если $t_0 = 0$, тогда будем писать $D_0^q(x(t)) = D^q(x(t))$. Если $D^q(x(t))$ существует на $(0,b)$, тогда $D^q(x(0)) = \lim_{t\to 0^+} D^q(x(t))$. Если ДПП функции $x(t)$ порядка q существует на (t_0,∞), тогда будем говорить, что $x(t)$ является q-дифференцируемой на (t_0,∞).

Если функция $x(t)$ дифференцируема, тогда

$$D_{t_0}^q(x(t)) = \lim\left\{\frac{x(t+\theta(t-t_0)^{1-q}) - x(t)}{\theta}, \theta \to 0\right\} =$$

$$= \lim\left\{\frac{x(t+\theta(t-t_0)^{1-q}) - x(t)}{\theta(t-t_0)^{1-q}}(t-t_0)^{1-q}, \theta \to 0\right\} = \frac{dx}{dt}(t-t_0)^{1-q}, \qquad (1.1)$$

где dx/dt обычная производная функции $x(t)$. Отсюда следует, что для существования дробно-подобной производной $D_{t_0}^q(x(t))$ функции $x(t)$ необходимо и достаточно чтобы функция $x(t)$ была дифференцируемая в обычном смысле.

Замечание 1.1. В отличие от определений дробной производной непрерывной (или абсолютно дифференцируемой) функции в определении 1.1 используется не интеграл, а предел, и это существенно изменяет свойства дробно-подобной производной.

При любой дробно-подобной функции (а) – (г) в Определении 1.1 имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1 Пусть $q \in (0,1]$ и $x(t), y(t)$ – q-дифференцируемые функции в точке $t > 0$.

Тогда верны соотношения

(а) $D_{t_0}^q(ax(t)+by(t)) = aD_{t_0}^q(x(t)) + bD_{t_0}^q(y(t))$ при всех $a, b \in R$;

(б) $D_{t_0}^q(t^p) = p(t-t_0)^{1-q}t^{p-1}$ при всех $p \in R$;

(в) $D_{t_0}^q(x(t)y(t)) = x(t)D_{t_0}^q(y(t)) + y(t)D_{t_0}^q(x(t))$;

(г) $D_{t_0}^q\left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right) = \dfrac{y(t)D_{t_0}^q(x(t)) - x(t)D_{t_0}^q(y(t))}{y^2(t)}$;

(д) $D_{t_0}^q(x(t)) = 0$ для любой функции $x(t) = \lambda$.

Доказательство. Утверждения (а), (в) – (д) доказаны (см. [11]). Покажем справедливость утверждения (б). Из определения 1.1 следует, что

$$D_{t_0}^q(t^p) = \lim_{\theta\to 0}\frac{(t+\theta(t-t_0)^{1-q})^p - t^p}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{t^p + p\theta(t-t_0)^{1-q}t^{p-1} + O(\theta^2) - t^p}{\theta} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{p\theta(t-t_0)^{1-q}t^{p-1}}{\theta} + O(\theta^2) = p(t-t_0)^{1-q}t^{p-1}.$$

Заметим, что в статье [28] приведено не верное утверждение о том, что соотношение (б) получается из определения 1.2 заменой t на $(t-t_0)$ в выражении функции (а).

Замечание 1.2. Для всех известных дробных производных, включая определение дробной производной Римана – Лиувилля

$$D_{t_0}^r x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}\frac{x(s)}{(t-s)^{q-n+1}}ds,$$

где $n-1<q<r$ и $\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{2-1}dt$ – гамма функция Эйлера и Капуто

$$D_{t_0}^c x(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x^n(s)}{(t-s)^{q-n+1}}ds$$

утверждения (а) – (д) не имеют места, за исключением утверждения (д) для дробной производной Капуто. Причиной этого является применение интеграла в определении дробной производной.

Дробно-подобный интеграл порядка $0<q\le 1$ вводится формулой

$$I_{t_0}^q x(t)=\int\limits_{t_0}^{t} x(s)d_q(t,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^{q-1}x(s)ds,$$

где интеграл понимается в смысле Римана.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2 Пусть функция $x(t):(t_0,\infty)\to R$ q-дифференцируемая при $0<q\le 1$. Тогда при всех $t>t_0$ верно соотношение

$$I_{t_0}^q(D_{t_0}^q x(t))=x(t)-x(t_0).$$

Остановимся на физической интерпретации дробно-подобной производной. Использование в определении 1.1 предела вместо интеграла, применяемого в определениях дробной производной Римана – Лиувиля, Капуто и др., позволяет дать следующую физическую интерпретацию дробно-подобной производной.

Пусть точка P движется по прямой на R_+ для моментов времени $t_1=t$ и $t_2=t+\theta(t-t_0)^{1-q}$, где $\theta>0$ и $0<q\le 1$. Обозначим $S(t_1)$ и $S(t_2)$ путь пройденный точкой P за время t_1 и t_2, соответственно.

Очевидно, что соотношение

$$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{S(t+\theta(t-t_0)^{1-q})-S(t)}{\theta(t-t_0)^{1-q}}=v_{avr}(t)$$

является q-средней скоростью движения точки P за время $\theta(t-t_0)^{1-q}$.

Рассмотрим

$$D_{t_0}^q(S(t))=\lim\left\{\frac{S(t+\theta(t-t_0)^{1-q})-S(t)}{\theta},\theta\to 0\right\}=$$

$$=\lim\left\{\frac{S(t+\theta(t-t_0)^{1-q})-S(t)}{\theta(t-t_0)^{1-q}}(t-t_0)^{1-q},\theta\to 0\right\}=\frac{dS}{dt}(t-t_0)^{1-q}=v_{inst}(t),$$

где dS/dt обычная мгновенная скорость точки P.

При $q=1$ это обычная мгновенная скорость движения точки P в любой момент времени t на R_+. При $0<q<1$ это q-мгновенная скорость движения точки P при любом значении t на R_+.

Таким образом, физическим смыслом дробно-подобной производной является q-мгновенная скорость изменения вектора состояния рассматриваемой механической или другой природы системы.

Далее применяются некоторые из приведенных результатов при анализе уравнений возмущенного движения с дробно-подобной производной вектора состояния.

§2. Дробно-подобная неоднородная система.

Рассматривается дробно-подобная система уравнений возмущенного движения

$$D_{t_0}^q x(t)=g(t,x(t))+f(t); \tag{2.1}$$

$$x(t_0)=0, \tag{2.2}$$

где $x \in R^n$, $g \in C^q(R_+ \times R^n, R^n)$, $f : R_+ \to R$ и $t > t_0$. Предполагается, что начальная задача (2.1) – (2.2) имеет решение $x(t,t_0,0) \in C^q(J \times R_+ \times R^n, R^n)$ при всех $t \in J$ где $J \subset R_+$ – открытый интервал.

Замечание 2.1 Учитывая соотношение (1.1) дробно-подобная система уравнений (2.1) эквивалентна системе

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t))(t-t_0)^{q-1} + f(t)(t-t_0)^{q-1},$$

решения которой могут быть исследованы методами, разработанными в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. При выполнении перечисленных условий о дробно-подобной системе (2.1) ее решение имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{(s-t_0)^{1-q}} ds + \int_{t_0}^{t} \frac{q(s, x(s))}{(s-t_0)^{1-q}} ds \tag{2.3}$$

при всех $t \in J$.

Доказательство. Так как $x(t)$, $g(t, x(t))$ и $f(t)$ – непрерывные функции, то интегралы $I_{t_0}^q(g(t, x(t)))$ и $I_{t_0}^q(f(t))$ существуют и $I_{t_0}^q(D_{t_0}^q x(t))$ существует при всех $t \in J$. В этом случае из Теоремы 1.2 следует, что

$$I_{t_0}^q(D_{t_0}^q x(t)) = x(t). \tag{2.4}$$

Применяя оператор $I_{t_0}^q$ к системе уравнений (2.1) и учитывая начальные условия (2.2), получим

$$x(t) = I_{t_0}^q(g(s, x(s) + f(s)))$$

при всех $t > t_0$. Этим лемма 2.1 доказана.

Далее введем предположения:

H_1) $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \frac{f(s)}{(s-t_0)^{1-q}} ds < +\infty$ равномерно по $t_0 \in R_+$;

H_2) существует положительная постоянная $k > 0$ такая, что $\|g(t, x)\| \le \ \le k\|x\|$ при всех $(t, x) \in J \times B_r$, где $B_r = \{x \in R : \|x\| \le r\}$.

Покажем, что имеет место такое утверждение.

Теорема 2.1 Пусть для дробно-подобной системы (2.1) выполняются условия H_1 – H_2. Тогда для решений системы (2.1) имеет место оценка

$$\|x(t)\| < B \exp\left(k \frac{(t-t_0)^q}{q}\right) \tag{2.5}$$

при всех $t > t_0$.

Доказательство. При выполнении условия H_1 теоремы 1 найдется положительная постоянная $B > 0$ такая, что

$$\|F(t)\| \le B \tag{2.6}$$

при всех $t \in J \subset R_+$. Учитывая условия H_2 и оценку (2.6) а также соотношение (2.4) приходим к интегральному неравенству

$$\|x(t)\| \le B + \int_{t_0}^{t} k(s-t_0)^{q-1}\|x(s)\| ds. \tag{2.7}$$

Обозначим $W(t) = B + \int_{t_0}^{t} k(s-t_0)^{q-1} \|x(s)\| ds = B + I_{t_0}^{q}(k\|x(s)\|)$, очевидно $W(t_0) = B$. Заметим, что $W(t) \ge \|x(t)\|$ и

$$D_{t_0}^{q} W(t) - kW(t) = k\|x(t)\| - kW(t) \le k\|x(t)\| - k\|x(t)\| = 0 \quad \text{при всех } t \in J. \tag{2.8}$$

Умножим (2.8) на выражение $M(t) = \exp\left(-k\frac{(t-t_0)}{q}\right)^{q}$ и учитывая, что $D_{t_0}^{q} M(t) = -kM(t)$, получим $D_{t_0}^{q}(W(t)M(t)) \le 0$ при всех $t \in J$. Так как произведение $W(t)M(t)$ является q-дифференцируемым на J, согласно соотношений (в) из Теоремы 1.1 имеем

$$I_{t_0}^{q} D_{t_0}^{q} (W(t)\, M(t)) = M(t)\, W(t) - M(t_0) W(t_0) = M(t)\, W(t) - B \le 0 \text{ при всех } t \in J. \tag{2.9}$$

Из неравенства (2.9) следует неравенство

$$\|x(t)\| \le W(t) \le BM^{-1}(t) = B\exp\left(k\frac{(t-t_0)^{q}}{q}\right) \quad \text{при всех } t \in J.$$

Этим теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1 Если в дробно-подобной системе (2.1) выполняется условие H_1 и вектор-функция $g(t,x) = A(t)x$, где $A(t)$ - $n \times n$ – матрица с непрерывными элементами на любом конечном интервале, тогда для решения $x(t)$ имеет место оценка (2.5) с постоянной $k = \sup(\|A(t)\| : t \in J)$.

Следствие 2.2 Если в дробно-подобной системе (2.1) выполняется условие H_1 и вектор-функция $g(t,x) = Cx$, где C - $n \times n$ – постоянная матрица, тогда соотношение

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left(C\frac{(t-t_0)^{q}}{q}\right)\exp\left(-C\frac{(s-t_0)^{q}}{q}\right) f(s)(s-t_0)^{1-q}\, ds$$

является решением ДПС (2.1) при начальных условиях (2.2).

§3. Дробно-подобная система при постоянно действующих возмущениях.

Рассматривается дробно-подобная система при постоянно действующих возмущениях в виде

$$D_{t_0}^{q} x(t) = g(t, x(t)) + r(t, x(t)); \tag{3.1}$$

$$x(t_0) = 0, \tag{3.2}$$

где $x \in R^n$, $g \in C(R_+ \times R^n, R^n)$, $r \in C(R_+ \times R^n, R^n)$ и $r(t,0) \ne 0$ при всех $t \in R_+$. Предположим, что решение $x(t)$ начальной задачи (3.1) – (3.2) существует на интервале J.

Лемма 3.1 Пусть для ДПС (3.1) выполняются условия, указанные выше, тогда решение $x(t)$ начальной задачи (3.1) – (3.2) удовлетворяют соотношению

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{g(s,x(s))}{(s-t_0)^{1-q}} ds + \int_{t_0}^{t} \frac{r(s,x(s))}{(s-t_0)^{1-q}} ds \quad \text{при всех } t \in J. \tag{3.3}$$

Доказательство. Леммы 3.1 аналогично доказательству леммы 2.1.

Далее о составляющих правой части ДПС (3.1) сделаем следующие предположения:

H_1) для постоянно действующих возмущений $r(t, x(t))$ существует непрерывная функция $h(t)$ такая, что $\|r(t,x)\| \le h(t)$ при всех $(t,x) \in J \times B_r$;

H_2) $H(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{h(s)}{(s-t_0)^{1-q}} ds < +\infty$ равномерно по $t_0 \in R_+$;

H_3) существует непрерывная функция $m(t)$ такая, что $\|g(t,x)\| \le m(t)\|x\|$ при всех $(t,x) \in J \times B_r$.

Получим оценку решений ДПС (3.1) при нулевых начальных условиях, т.е. при условиях начала движения из состояния равновесия.

Теорема 3.1 Предположим, что для ДПС (3.1) выполняются условия H_1 – H_3, тогда для нормы решений $x(t)$ выполняется оценка

$$\|x(t)\| \le H(t) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} m(s)(s-t_0)^{q-1} ds \right) m(\tau)H(\tau)(\tau - t_0)^{q-1} d\tau \quad \text{при всех } t \in J. \quad (3.4)$$

Доказательство. Из соотношения (3.3) при выполнении предположений H_1 – H_3 нетрудно получить интегральное неравенство

$$\|x(t)\| \le H(t) + \int_{t_0}^{t} m(s)\|x(s)\|(s-t_0)^{q-1} ds \quad (3.5)$$

при всех $t \in J$. Обозначим

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\|x(s)\|(s-t_0)^{q-1} ds \quad (3.6)$$

и заметим, что $G(t_0) = 0$. Из соотношения (3.6) следует, что

$$D_{t_0}^{q} G(t) = m(t)\|x(t)\| \le m(t)\left[H(t) + G(t)\right] \le m(t)H(t) + m(t)G(t). \quad (3.7)$$

Из неравенства (3.7) следует, что

$$G(t) \le \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} m(s)(s-t_0)^{q-1} ds \right) m(\tau)H(\tau)(\tau - t_0)^{q-1} d\tau. \quad (3.8)$$

Учитывая, что

$$\|x(t)\| \le H(t) + G(t), \quad (3.9)$$

получаем оценку (3.4).

Этим теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Полагая $\upsilon(s) = m(s)(s-t_0)^{q-1}$ в неравенстве (3.5) приходим к интегральному неравенству

$$\|x(t)\| \le H(t) + \int_{t_0}^{t} \upsilon(s)\|x(s)\| ds, \; t > t_0. \quad (3.10)$$

Применяя к этому неравенству теорему 1.1.2 из монографии [13], получим оценку

$$\|x(t)\| \le H(t) + \int_{t_0}^{t} [\upsilon(s)H(s)] \exp\left(\int_{s}^{t} \upsilon(\xi) d\xi \right) ds \quad \text{при всех } t > t_0. \quad (3.11)$$

Оценка (3.11) совпадает с оценкой (3.4).

Следствие 3.1 Если в ДПС (3.1) вектор-функция $g(t,x) = A(t)x$, где $A(t)$ - $n \times n$ – матрица с непрерывными элементами на любом конечном интервале, тогда оценка (3.4) имеет вид

$$\|x(t)\| \le H(t) + k \exp\left(k \frac{(t-t_0)^q}{q} \right) \times \int_{t_0}^{t} H(s) \exp\left(-k \frac{(s-t_0)^q}{q} \right) (s-t_0)^{q-1} ds \quad \text{при всех } t \in J.$$

Здесь $k = \sup(\|A(t)\|) : t \in J$.

Следствие 3.2 Если в неравенстве (3.10) функция $H(t)$ является неубывающей при всех $t > t_0$, тогда оценка (3.11) принимает вид

$$\|x(t)\| \le H(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\upsilon(s)ds\right) = H(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}m(s)(s-t_0)^{q-1}ds\right) \quad \text{при всех } t > t_0 .$$

§4. Приложения.

4.1 Ограниченность движения. ДПС (2.1) и (3.1) будем рассматривать при значениях $(t,x)\in R_+ \times R^n$. Принимая во внимание результаты монографии [29] стр. 36, приведем:

Определение 4.1 Движение ДПС (2.1) является q-ограниченным, если существует постоянная $0<\beta(t_0,q)<\infty$ такая, что для любого решения $x(t,t_0,0)$ ДПС (2.1) имеет место оценка $\|x(t,t_0,0)\| < \beta(t_0,q)$ при всех $t \ge t_0$ и $0<q\le 1$, где $\beta(t_0,q)$ может зависеть от каждого решения.

Определение 4.2 Движение ДПС (2.1) является равномерно q-ограниченным, если величина $\beta(t_0,q)$ в определении 4.1 не зависит от t_0.

Оценка (2.5) позволяет получить условия ограниченности движения ДПС (2.1) в следующем виде.

Теорема 4.1 Если условия теоремы 1.1 выполняются при всех $(t,x)\in R_+ \times R^n$, тогда движение ДПС (2.1) будет q-ограниченным, если

$$\beta(t_0,q) = \sup_{t\ge t_0} B\exp\left(k\frac{(t-t_0)^q}{q}\right) < +\infty . \tag{4.1}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы 4.1 при всех $t \ge t_0$ имеет место оценка (2.5). Если выполняется условие (4.1) тогда $\|x(t)\| \le \beta(t_0,q)$ при всех $t \ge t_0$. Этим теорема 4.1 доказана.

Далее рассмотрим ДПС (3.1) и покажем, что верно следующее утверждение.

Теорема 4.2 Если условия теоремы 4.1 выполняются при всех $(t,x)\in R_+ \times R^n$, тогда движение ДПС (3.1) будет q-ограниченным, если

$$\beta^*(t_0,q) = \sup_{t\ge t_0}\left\{H(t) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}m(s)(s-t_0)^{q-1}ds\right)m(\tau)H(\tau)(\tau-t_0)^{q-1}d\tau\right\} < +\infty . \tag{4.2}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы 4.1 при всех $t \ge t_0$ имеет место оценка нормы решений в виде (3.4).

Если выполняется неравенство (4.2) тогда верна оценка $\|x(t)\| \le \beta^*(t_0,q)$ при всех $t \ge t_0$, т.е. движение ДПС (3.1) является ограниченным.

Заключение.

Приведенные результаты исследования уравнений возмущенного движения с дробно-подобной производной вектора состояния системы являются фрагментом общей качественной теории этого класса уравнений. Метод интегральных неравенств, в данном случае линейных, позволяет получить простые достаточные условия ограниченности движения нелинейных систем. Представляет интерес распространение полученных результатов на системы нелинейных уравнений возмущенного движения, рассмотренные в статьях [21, 22].

Показано, что дробно-подобная производная имеет физический смысл q-мгновенной скорости изменения вектора состояния дробно-подобной системы. На важность этого вопроса указывалось в статье [18] и в процессе обсуждения результатов статьи [15] с профессором Т.А. Бартоном (США).

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е. У статті наведено результати аналізу обмеженості розвязків неліній-них систем з дробово-подібною похідною вектора стану. За допомогою інтегральних нерівностей отримано оцінки розвязків та встановлено умови обмеженості руху. Як приклад розглядаються системи при постійно діючих збуреннях.

1. *Мартынюк А.А.* Об устойчивости дробно-подобных систем уравнений возмущенного движения // Доп. НАН України. – 2018. – № 6. – С. 9 – 16.
2. *Abdeljawad T.* On conformable fractional calculus // J. Comput. and Appl. Math. – 2015. – 279. – P 57 – 66.
3. *Bagley R.L., Torvik P.J.* On the appearance of the fractional derivatives in the behaviour of real materials // J. Appl. Mech. – 1984. – **41**. – P. 294 – 298.
4. *Burton T.A.* Liapunov Theory for Integral Equations with Singular Kernels and Fractional Differential Equations. – Port Angeles: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012. – 392 p.
5. *Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petras I.* Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. – **72.** – Singapore: World Scientific, 2010. – 178 p.
6. *Caputo M.* Elasticita e Dissipazione – Bologna: Zanichelli, 1969. – 150 p.
7. *Chen Y.Q., Petras I., Xue D.* Fractional order control-a tutorial. In Proc. IEEE American Contr. Conf., St – Louis, USA. – 2009. – P. 1397 – 1411.
8. *N'Doye I.* Generalization du lemme de Gronwall – Bellman pour la stabilization des systemes fractionnaires. – PhD These, Université Henri Poincaré - Nancy I, 2011. – 223 p.
9. *Katugampola U. N.* A new fractional derivative with classical properties, arXiv:1410.6535 v2 [math CA], 8 Nov. 2014. – 8 p.
10. *Kilbas A., Srivastava M.H., Trujillo J.J.* Theory and Application on Fractional Differential Equations. – Amsterdam: North Holland, 2006. – 540 p.
11. *Khalil Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.* A new definition of fractional derivative // J. of Comput. and Appl. Math. –2014. – **264**. – P. 65 – 70.
12. *Lakshmikantham V., Leela S., Devi J.V.* Theory of Fractional Dynamic Systems. – Cambridge: Cambridge Scientific Publisher, 2009. – 170 p.
13. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Stability Analysis of Nonlinear Systems. Second Ed. – Berlin: Birkhauser, 2015. – 329 p.
14. *Martynyuk A.A.* On the stability of a system of equations with fractional derivatives with respect to two measures // J. Math. Sci. – 2016. – **217.** – P. 468 – 475.
15. *Martynyuk A.A., Stamova I.M.* Fractional-like Derivative of Lyapunov-type Functions and Applications to the Stability Analysis of Motion // Electronic J. of Differential Equations. – 2018. – N 62. – P. 1 – 12.
16. *Martynyuk A.A., Stamova I.M., Martynyuk-Chernienko Yu.A.* Stability analysis of the set of trajectories for differential equations with fractional dynamics // Eur. Phys. J. Special Topics – 2017. – **226**. – P. 3609 – 3637.
17. *Martynyuk A.A., Stamov G., Stamova, I.M.* Practical stability analysis with respect to manifolds and boundedness of differential equations with fractional-like derivatives // Rocky Mountain J. of Mathematics. – 2019. – **49**, N 1. – P. 211 – 233.
18. *Martynyu, A.A., Stamov G., Stamov I.M.* Integral estimates of the solutions of fractional-like equations of perturbed motion // Nonlinear Analysis: Modelling and Control – 2019. – **24**, N 1. – P. 138 – 149.
19. *Martynyuk A.A., Stamov G.Tr., Stamova I.M.* Fractional-like Hukuhara derivatives in the theory of set-valued differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. – 2020. – **131**. – 109487.
20. *Martynyuk A.A., Stamov G.Tr., Stamova I.M.*, Impulsive fractional-like differential equations: practical stability and boundedness with respect to h-manifolds // Fractal and Fractional (MDPI). – 2019. – **3**, N 50. – P. 1 – 16.
21. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya, Chernienko V.A.* Constructive Estimation of the Lyapunov Function for Quadratic Nonlinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 346 – 357.
22**.** *Martynyuk A.A., Chernienko V.A.* Sufficient Conditions of Stability of Motion of Polinomial Systems // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 13 – 21.
23. *Podlybny I.* Fractional Differential Equations. – London: Academic Press, 1999. – 368 p.
24. *Schmidt V. H., Drumheller J. E.* Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate // Physical Review. – 1971. – **B**, N 4. – P. 4582 – 4597.
25. *Soula M.* Etude du Comportement Mecanique des Materiaux Viscoelastiques par les Derivees Fractionnaires // PhD Thesis, Conservatoire National des Arts et Metiers de Paris, 1996.
26. *Sousa J.V.C., Oliveira E.C.* A new truncated M - fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties. // Int. J. of Analysis and Applications. – 2017. – P. 1 – 16.
27. *Stamov G., Stamova I., Martynyuk A.A, Stamov T.* Design and practical stability of a new class of impulsive fractional – like neural networks // Entropy (MDPI). – 2020. – 22(3), 337. – 18 p.
28. *Unal E., Gokdogan A.* Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method // Optik – Int. J. for Light and Electron Optics. – 2017. – 128. – P. 264 – 273.
29. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. – Tokyo: Publ. Math. Soc., 1966. – 223 p.

Поступила 24.04.2018 Утверждена в печать 09.07.2020