

А.Я. Григоренко¹, Я.М. Григоренко¹, И.А. Лоза²

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В НЕОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ (ОБЗОР)**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

²*Национальный транспортный университет,*

ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@i.ua

Abstract. The review of works is given, which are devoted to the numerical investigations of the new problems of the theory electroelasticity. Namely, they are devoted to the determination of dynamical characteristics of the inhomogeneous piezoceramic circular waveguides and the inhomogeneous piezoceramic finite-length cylinders. An effective numerical-analytical approach is proposed in these works. The proposed method is based on uniting the different analytical transforms (apparatus of special functions, expansion in the Fourier series, and spline-approximations method with collocation method) allows reducing the initial three-dimensional equations of electroelasticity theory in the partial derivatives to the boundary value problem for the system of ordinary differential equations. The obtained one-dimensional problem is solved by the method of discrete orthogonalization. Basing on the obtained solutions, the new regularities of spectral characteristics with the inhomogeneous structure are studied, with allowance for the coupled electric field of the piezoceramic layers. Also, the study is carried out for an effect of the inhomogeneity and coupled electric field on the dynamic characteristics of the bodies under study. Significant attention is paid to the validation of the reliability of the results obtained by the numerical calculations.

Key words: 3D theory of electroelasticity, dynamical process, piezoelectric circular waveguide and finite-length cylinder, coupled electroelastic fields, inhomogeneous piezoceramic materials, discrete-continuum methods.

Введение.

Как было отмечено в [65], одними из основных направлений исследований в современной механике твердого деформируемого тела является дальнейшее развитие методов численного анализа и механики связанных полей. В настоящем сообщении описано исследование важного класса задач электроупругости – динамических процессов в неоднородных пьезокерамических цилиндрах. Решение отмеченного класса задач сопряжено с большими трудностями математического характера. В связи с этим возникает необходимость применения численных методов для их решения. Исследования, приведенные авторами в данной статье, являются актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела.

Одной из важных составляющих механики связанных полей является электроупругость – область в современной науке, которая занимается исследованием проблем, находящихся на стыке двух классических научных направлений: механики твердого деформируемого тела и электродинамики (электростатики) сплошных сред. Сам термин электроупругость появился сравнительно недавно (в 60-х годах прошлого столетия) и широко употребляется, главным образом, среди представителей механики деформируемого твердого тела. Среди физиков более употребим традиционный термин – пьезоэлектричество. Работы [10, 17, 26, 66, 74, 94] являются фундаментальными в этой области.

Важным этапом в развитии электроупругости явилось создание пьезокерамики на основе сегнетоэлектриков. Это было осуществлено в конце 40-х годов прошлого столетия сразу в нескольких странах. Первая пьезокерамика была получена на основе порошка титанобария BaTiO_3 , отметим еще ряд пьезокерамических и пьезоэлектрических материалов, которые существуют в настоящее время таких как ZnO , CdS , $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$, TeO_2 , LiNbO_3 , LiTaO_3 , $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ и GaAs .

Благодаря свойству преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот, пьезоэлектрические материалы находят самое разнообразное применение на практике. Перечислим некоторые области широкого применения пьезоэлектрических материалов: излучатели и антенны в гидроакустике; стабилизаторы частоты в радиотехнических устройствах и эталонах времени; электрические фильтры и линии задержки в радио- и телефонной связи; датчики для измерения ускорений, уровня вибрации, акустической эмиссии при неразрушающем контроле; пьезотрансформаторы и пьезодвигатели; в медицинской томографии, а также в медицинских инструментах различного назначения.

Особое место в использовании пьезоэлектрических преобразователей занимают электроупругие композиты – слоистые конструктивные элементы, составленные из пьезоэлектрических и упругих слоев [21, 87, 93].

Сложность математической модели, описывающей динамические процессы в элементах пьезоэлектрических устройств обусловило тот факт, что в основном исследованы либо одномерные задачи [11, 12, 21, 93 и др.], либо задачи, в которых привлекались приближенные модели на основе теории пластин и оболочек [15, 16, 87 и др.]. Точное решение подобных задач возможно лишь для особых случаев с высокой степенью симметрии в физико-механических свойствах пьезоэлектрического материала, способах нагружения, вида граничных условий и т.д. [11, 68, 72, 73, 83 – 85]. Также для исследования динамических процессов в элементах пьезоэлектрических устройств применялся метод степенных рядов [75, 76, 78 – 82, 88, 90 – 92]. Широкое применение пьезокерамических элементов и устройств связано со стремлением к наиболее полному учету реальных процессов, происходящих в пьезокерамических конструктивных материалах, выявлением и изучением трехмерных эффектов, которые имеют место в толстостенных элементах. Несмотря на большое количество публикаций, посвященных этому вопросу в научной литературе, известны лишь отдельные работы, посвященные динамическим процессам в однородных и неоднородных пьезокерамических цилиндрах конечной длины, а также пьезокерамических неоднородных цилиндрических волноводах, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [1, 2, 11, 14, 19, 20, 25, 37, 38, 41 – 46, 67 – 71, 76 – 85, 87 – 92].

В этом случае, кроме необходимости удовлетворения граничных условий на ограничивающих соответствующие тело поверхностях, также необходимо удовлетворение условий контакта на поверхности раздела двух материалов, что существенно усложняет проведение исследований с помощью аналитических и численных подходов. Кроме того, в таком конструктивном элементе за счет различия физико-механических свойств материалов слоев в процессе эксплуатации возникает концентрация напряжений. Это, в свою очередь, приводит к развитию микротрещин, что негативно сказывается на несущей способности соответствующего конструктивного элемента и может привести к его разрушению. Для устранения этих проблем были созданы так называемые функционально градиентные пьезокерамические материалы (ФГПМ), у которых физико-механические свойства материала непрерывно изменяются вдоль одного или нескольких координатных направлений. Исследование динамических процессов в цилиндрических пьезокерамических телах с разным характером неоднородности (кусочная неоднородность, непрерывная неоднородность) сопряжено с большими трудностями вычислительного характера. Можно отметить только некоторые работы в этом направлении [3, 4, 18 – 20, 23, 24, 47, 53].

В статье проведено решение широкого класса задач пространственной теории электроупругости о гармонических волновых и колебательных процессах в кусочно неоднородных и непрерывно неоднородных пьезокерамических телах цилиндрической формы. Проведен анализ влияния фактора неоднородности связанного электрического поля и вида предварительной поляризации пьезокерамических материалов на спектральные характеристики указанных выше электроупругих тел. Для этого был

предложен дискретно континуальный численно аналитический подход к решению широкого класса задач пространственной теории электроупругости о стационарных динамических процессах в кусочно-неоднородных (слоистых) и непрерывно неоднородных (функционально градиентных) телах цилиндрической формы. Ранее такой подход эффективно применялся при решении задач теории упругости.

§1. Основные соотношения.

Колебания пьезоэлектрических тел, как механический процесс, описаны уравнениями движения линейно упругих деформируемых твердых тел, а с точки зрения электрических процессов в пьезоэлектрическом континууме – уравнениями электродинамики. Обе группы взаимосвязаны, и взятые вместе, формируют уравнения электроупругости:

механические уравнения движения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; ρ – плотность материала; \mathbf{u} – вектор перемещений; уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

где \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{D} – вектор электрической индукции; \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; c – скорость света.

В дальнейшем будем рассматривать акустоэлектрические колебания, в связи с чем уравнения Максвелла могут быть упрощены. Это связано с тем, что акустические движения намного медленнее, чем электромагнитные. Если движения среды медленные, то электромагнитное поле в ней распадается на взаимно не связанные между собой электрическое и магнитное поля. Рассмотрим только электрическое поле, поскольку именно электрические константы входят в физические соотношения для пьезоэлектрической среды. Следовательно, в данном случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.3)$$

Из первого уравнения следует, что электрическое поле является потенциальным и будет справедливым представление

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.4)$$

где φ – электростатический потенциал. Эти уравнения называют квазистатическим приближением уравнений Максвелла или уравнениями вынужденной электростатики диэлектриков.

Таким образом, система уравнений, которая описывает колебания пьезоэлектрической среды, имеет следующую форму:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (1.5)$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить физическими и геометрическими соотношениями. Физические соотношения для линейного пьезоэлектрического материала выводятся из энергетических соотношений; в частности, из электрической энтаклпии. Будем иметь следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{c}^E – тензор модулей упругости, определенных при постоянном электрическом поле; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; \mathbf{e} – тензор пьезомодулей; $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ – тензор диэлектрической проницаемости материала при постоянных деформациях.

Для малых деформаций сплошной среды имеют место линейные геометрические соотношения:

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T. \quad (1.7)$$

Запишем уравнения линейной теории электроупругости в индексной форме для криволинейной системы координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) :

уравнения движения

$$\sigma_{,i}^{ij} + \rho\omega^2 u^j = 0; \quad (1.8)$$

уравнения электростатики

$$D_{,j}^i = 0; \quad E_i = -\varphi_{,i}; \quad (1.9)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.10)$$

где $u_i = g_{ij}u^j$ и $g_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j$ – метрические тензоры.

Компоненты тензора в уравнениях (1.8) – (1.10) определены для локального базиса. Также применяется ковариантное дифференцирование.

Уравнения, описывающие электроупругие колебания в цилиндрической системе координат, имеют следующий вид:

$$\xi_1 = r; \quad \xi_2 = \theta; \quad \xi_3 = z; \quad (d\mathbf{r})^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Здесь $d\mathbf{r}$ – дифференциальный элемент дуги и dr – его проекция на ось ξ_1 . Будут справедливы следующие соотношения:

$$|\bar{e}_1| = 1; \quad |\bar{e}_2| = r; \quad |\bar{e}_3| = 1; \quad g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = 1; \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$g^{11} = 1; \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}; \quad g^{33} = 1; \quad g^{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Определяя символы Кристоффеля по формуле

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial g_{js}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi_k} \right),$$

единственные отличные от нуля символы имеют следующий вид:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Применяя ковариантные производные, мы можем получить следующую форму основных соотношений:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial z} - r\sigma^{22} + \frac{1}{r}\sigma^{11} + \rho\omega^2 u^1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma^{21}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial z} + \frac{3}{r}\sigma^{12} + \rho\omega^2 u^2 &= 0; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \sigma^{31}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma^{13} + \rho\omega^2 u^3 = 0;$$

уравнения электростатики

$$E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad E_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \quad E_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial D^1}{\partial r} + \frac{\partial D^2}{\partial\theta} + \frac{\partial D^3}{\partial z} + \frac{1}{r}D^1 = 0; \quad (1.12)$$

соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial r}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1 r; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial\theta} - \frac{2}{r}u_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Лучшее представление о характере состояния электроупругих тел можно получить, используя физические компоненты, которые однородны по своей размерности и в произвольной ортогональной системе координат определяются как

$$A_{\text{физ}}^i = A^i \sqrt{g_{ii}}; \quad A_{\text{физ}}^i = A_i \sqrt{g^{ii}}; \quad B_{\text{физ}}^{ij} = B^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}; \quad B_{\text{физ}}^{ij} = B_{ij} \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}},$$

(в этих формулах отсутствует суммирование по повторяющимся индексам). Физические компоненты обозначим такими же символами, как и компоненты тензоров, но с индексными величинами осей систем координат:

$$\sigma_{rr} = \sigma^{11}; \quad \sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma^{22}; \quad \sigma_{zz} = \sigma^{33}; \quad \sigma_{\theta z} = r \sigma^{23}; \quad \sigma_{r\theta} = r \sigma^{12}; \quad \sigma_{rz} = \sigma^{13};$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \varepsilon_{22}; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{33}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \varepsilon_{23}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{13};$$

$$u_r = u_1; \quad u_\theta = \frac{1}{r} u_2; \quad u_z = u_3; \quad D_r = D^1; \quad D_\theta = r D^2; \quad D_z = D^3;$$

$$E_r = E_1; \quad E_\theta = \frac{1}{r} E_2; \quad E_z = E_3.$$

В терминах физических компонент основные соотношения имеют следующий вид: уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0; \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0;$$

уравнения электростатики

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z}; \quad (1.15)$$

линейные кинематические соотношения

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_{\theta} \right) + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}. \quad (1.16)$$

Предварительно поляризованные пьезокерамические тела относятся к трансверсально изотропным с осью симметрии, которая совпадает с направлением поляризации. Симметрия таких керамик соответствует симметрии кристаллов класса *6mm*, которая имеет название гексагональной симметрии. Физические соотношения для пьезокерамических материалов имеют гексагональную симметрию

В данном сообщении рассмотрим, как слоистые, так и непрерывно неоднородные пьезокерамические цилиндрические тела.

В случае слоистых пьезокерамических цилиндров с произвольным числом слоев при различной поляризации физические соотношения записываются для каждого слоя. В дальнейшем физические соотношения будут приведены для каждой конкретной решаемой задачи.

В случае рассмотрения непрерывно неоднородного пьезокерамического материала цилиндра все физико-механические модули параметры будут функциями радиальной координаты.

§2. Метод решения.

В связи с широким применением современных средств вычислительной техники – персональных компьютеров с большой памятью и быстродействием, для расчета различных аспектов электромеханического поведения различных конструктивных пьезокерамических элементов в настоящее время широко применяются различные численные подходы. Появились универсальные современные численные методы, с помощью которых проводится решение широкого класса задач механики связанных полей. Они носят название дискретных и построены на сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к системам алгебраических уравнений высокого порядка. Это такие методы, как методы конечных разностей, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов. Последний сегодня занимает первое место по применению благодаря своей универсальности и алгоритмичности [49, 95, 96]. Указанные особенности метода конечных элементов позволили создать программные комплексы ЛИРА, NXNASTRAN, ANSYS, SIMULA, Abaqus, PLAXIS и др., позволяющие решать статические и динамические задачи теории оболочек, упругости и электроупругости.

Однако наряду с универсальными подходами к решению задач электроупругости, находят широкое применение так называемые дискретно-континуальные подходы, позволяющие свести задачу к обыкновенным дифференциальным уравнениям на основе аппроксимации решения по другим переменным с помощью аналитических средств. Дискретно-континуальные подходы можно рассматривать как альтернативу универсальным численным методам в смысле того, что они применяются, как правило, для исследования пьезокерамических объектов определенного класса и в этом случае могут давать более эффективные и точные результаты, которые можно использовать для тестирования при модификации различных дискретных подходов. Для решения полученных одномерных задач применяется хорошо зарекомендовавший себя при решении широкого класса задач теорий упругости и оболочек для анизотропных неоднородных материалов устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [4, 5, 8, 9, 14, 42, 46 – 48, 89].

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для решения широкого класса задач используется метод, основанный на применении сплайн-функций. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими методами. К последним следует отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений или, другими словами, поведение сплайна в окрестности точки не влияет на поведение сплайна в целом, как это, например, имеет место при полиномиальном приближении. Высокая сходимость сплайн-интерполяции, в отличие от полиномиальной, простота и удобство реализации алгоритмов, построения и вычисления сплайнов на персональных ком-

пьютерах – несомненные преимущества сплайн-интерполяции. Применение сплайн-функций в различных вариационных, проекционных и других дискретно-континуальных методах, позволяет получить ощутимые преимущества по сравнению с использованием классического аппарата многочленов, существенно упростить их численную реализацию, а также получить искомое решение с высокой степенью точности. Укажем на ряд публикаций, где метод сплайн-аппроксимации использован для исследования механического поведения упругих пластин и оболочек различной структуры на основании классической, уточненной и пространственных моделей [2, 3, 7 – 9, 13, 27 – 41, 43 – 45, 49 – 64, 77, 78] и подробно описан в [50 – 52, 57, 63].

В нашем сообщении такой подход впервые был применен для исследования динамического поведения пьезокерамических цилиндров с однородной и неоднородной структурой.

§3. Свободные неосесимметричные колебания полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с различной поляризацией.

Пьезокерамические активные элементы цилиндрической формы являются одними из наиболее распространенных в акустоэлектронике. Поэтому важное значение имеет исследование динамических процессов, происходящих в пьезокерамических цилиндрах. Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории электроупругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, а также необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности существенно возрастают в условиях связанности полей и анизотропии пьезоэлектрических материалов. Отметим только отдельные работы о колебаниях пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [1 – 3, 7, 12, 13, 23, 24, 37, 38, 41, 43, 44, 53, 68, 77, 78].

В данном параграфе выполнено исследование свободных неосесимметричных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с различным направлением поляризации пьезокерамики с жестко заделанными торцами на основании предложенной авторами численно-аналитической методики [1 – 3, 7, 13, 37, 38, 41, 43, 44, 53, 77, 78].

Наряду с однородными пьезокерамическими цилиндрами в статье рассмотрены случаи пьезокерамических цилиндров, выполненных из непрерывно неоднородной керамики. На основании предложенной авторами численно-аналитической методики проведено решение с высокой степенью точности задач о свободных неосесимметричных колебаниях однородных и неоднородных полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с различным направлением поляризации пьезокерамики и выполнен анализ влияния факторов неоднородности и связанного электрического поля на поведение динамических характеристик соответствующих цилиндров.

Основные соотношения и разрешающие системы уравнений.

Представим поперечную систему уравнений, описывающих данную задачу. Уравнения гармонических колебаний в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют такой вид (рис. 1):

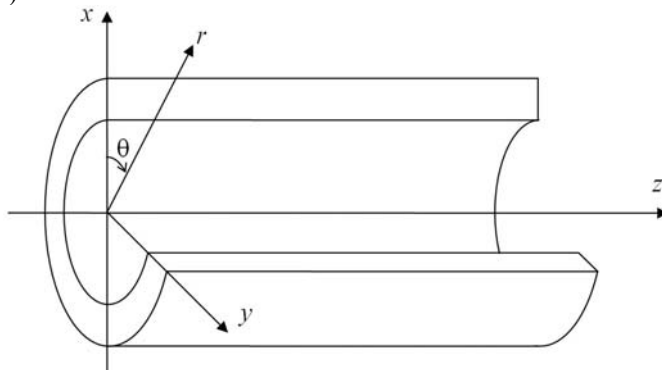


Рис. 1

уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2};\end{aligned}\quad (3.1)$$

уравнения электростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(D_r + \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (3.2)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Представленные соотношения необходимо дополнить уравнениями состояния поляризованной пьезокерамики, которые зависят от направления предварительной поляризации.

Уравнения состояния в случае осевой поляризации

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z; \quad \sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2c_{66}^i\varepsilon_{r\theta}^i; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \quad \sigma_{\theta z} = 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta;\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$D_r = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_r; \quad D_\theta = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta; \quad D_z = e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z.$$

Уравнения состояния в случае радиальной поляризации

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_r; \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{55}\varepsilon_{r\theta}^i - e_{15}E_\theta; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{51}E_z;\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta z} = 2c_{66}\varepsilon_{\theta z}; \quad D_r = e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{31}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{31}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_r; \quad D_\theta = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta; \quad D_z = 2e_{51}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{33}E_z.$$

Уравнения состояния в случае окружной поляризации

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_\theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{33}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_\theta; \\ \sigma_{zz} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_\theta; \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{55}\varepsilon_{r\theta} - e_{15}E_r; \quad \sigma_{rz} = 2c_{66}\varepsilon_{rz}; \\ \sigma_{\theta z} &= 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_z; \quad D_r = 2e_{15}\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_r;\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$D_\theta = e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{33}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_\theta; \quad D_z = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_z.$$

В случае рассмотрения непрерывно неоднородного пьезокерамического материала цилиндра все физико-механические модули будут функциями радиальной координаты.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра задаются следующим образом (при $r = R_0 \pm h$):

поверхности свободны от внешних усилий: $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$; и покрыты закороченными электродами: $\tilde{\varphi} = 0$.

На торцах (при $z = \pm L/2$) будем задавать граничные условия жесткой заделки: $u_r = u_\theta = u_z = 0$, и условие, что торцы свободны от электродов: $D_z = 0$; что эквивалентно следующим соотношениям: $u_r = 0$; $\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.

Вид разрешающей системы уравнений будет зависеть от направления предварительной поляризации керамики. Перейдем к рассмотрению задач для различных направлений пьезокерамики. Приведем вид разрешающих систем дифференциальных уравнений в частных производных в общем случае с переменными коэффициентами, которые получены с помощью тождественных преобразований исходных соотношений (3.1 – 3.6).

Разрешающая система уравнений в случае осевой поляризации

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\
&- \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}^E}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{\tilde{c}_{66}} \left(\frac{\tilde{c}_{66}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_\theta - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z}; \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \\
&- \frac{\tilde{e}_{11} \Omega^2}{\Delta} u_z - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{15}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \\
&- \frac{\tilde{e}_{15} \Omega^2}{\Delta} u_z + \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Delta = c_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2; \Delta_1 = c_{13} \varepsilon_{11} + e_{15} e_{33}; \Delta_2 = c_{33} \varepsilon_{11} + e_{15} e_{33}; \Delta_3 = e_{15} e_{33} - e_{33} \varepsilon_{11};$$

$$\Delta_4 = c_{13} e_{15} - c_{55} e_{13}; \Delta_5 = c_{55} e_{33} - c_{33} e_{15}.$$

Разрешающая система уравнений в случае радиальной поляризации

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} \right) u_\theta - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \\
& - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}; \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
& - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{c_{55}} u_z - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
& - \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{33}^2; \quad \Delta_1 = \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}; \quad \Delta_2 = (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}; \\
\Delta_3 &= (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33} + (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) \tilde{e}_{33}; \quad \Delta_4 = (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}; \quad \Delta_5 = \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}; \\
\Delta_6 &= \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33}; \quad \Delta_7 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33}; \quad \Delta_8 = \tilde{c}_{33} (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) - (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33}; \\
\Delta_9 &= (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{e}_{33} + \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}; \quad \Delta_{10} = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}.
\end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений в случае окружной поляризации

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \left(\frac{\tilde{c}_{33}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
& - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\tilde{e}_{33}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= - \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \left(1 + \frac{\Delta_6}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \left(\frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11}}{r^2} - \tilde{e}_{11} \Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta} u_\theta - \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \\
& - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \left(1 + \frac{\Delta_6}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{e}_{15} \tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} \\
& - \frac{\Omega^2}{c_{66}} u_z - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z};
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = & \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\tilde{c}_{33}}{\Delta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{\Delta} \left(\tilde{c}_{55} - \Omega^2 \right) \frac{\tilde{e}_{15}}{r^2} u_\theta - \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{15}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15}^2; \Delta_1 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{11} + (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) \tilde{e}_{15}; \Delta_2 = (\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}; \\ \Delta_3 &= \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}; \Delta_4 = \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} - \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11}; \Delta_5 = \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{13} - \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15}; \Delta_6 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{33} - (\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{15}; \\ \Delta_7 &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{13} - \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15}; \Delta_8 = \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} \end{aligned}$$

и безразмерные величины

$$\varepsilon = \frac{h}{R_0}; \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \quad (3.10)$$

где: R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра; ω – круговая частота; $\lambda = 10^{10} \text{ Па}$; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Метод решения.

Для сведения исходных систем трехмерных дифференциальных уравнений теории электроупругости (3.7) – (3.9) в частных производных в общем случае с переменными коэффициентами к двумерным, будем применять метод разделения переменных. Учитывая тот факт, что цилиндр является замкнутым телом в окружном направлении, представим компоненты разрешающего вектора в виде стоячих волн в окружном направлении. Характер этих волн зависит от предварительной поляризации пьезокерамики.

Для пьезокерамики, поляризованной в осевом и радиальном направлении, компоненты разрешающего вектора представлены в виде

$$\begin{aligned} u_r &= hU_1(r, z) \cos m\theta; \quad u_\theta = hU_2(r, z) \sin m\theta; \\ u_z &= hU_3(r, z) \cos m\theta; \quad \varphi = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} U_4(r, z) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для пьезокерамики, поляризованной в окружном направлении, компоненты разрешающего вектора представлены в виде

$$\begin{aligned} u_r &= hU_1(r, z) \cos m\theta; \quad u_\theta = hU_2(r, z) \sin m\theta; \\ u_z &= hU_3(r, z) \cos m\theta; \quad \varphi = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} U_4(r, z) \sin m\theta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На основании представления (3.11), система дифференциальных уравнений (3.7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} = & \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \left(\frac{\tilde{c}_{11} + m^2 \tilde{c}_{66}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_1 - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{r^2} U_2 - \\ & - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 U_4}{\partial r \partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}^E}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{r^2} U_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + \\
&+ \frac{1}{\tilde{c}_{66}} \left(\frac{\tilde{c}_{66} + m^2 \tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_2 + \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_4}{\partial z}; \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} &= - \left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial z} - \left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial z} - \frac{(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial z} - \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial r} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{m^2 \Delta}{r^2} - \tilde{e}_{11} \Omega^2 \right) U_3 - \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2} &= - \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial z} - \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{15}}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial z} + \\
&+ \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} - \frac{\tilde{e}_{15} \Omega^2}{\Delta} U_3 - \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} U_4 - \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

На основании представления (3.12), система дифференциальных уравнений (3.8) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} &= - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11} \tilde{e}_{33} + m^2 \Delta_1}{r^2} - \Omega^2 \right) U_1 - \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \\
&- \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{m}{r^2} U_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial z} - \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} U_4 - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r^2} U_1 + \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{c}_{55}} \left(\frac{\tilde{c}_{55} + m^2 \tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_2 - \\
&- \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r^2} U_4 + \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r}; \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{1}{\tilde{c}_{55}} \left(\frac{m^2 \tilde{c}_{66}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_3 - \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 U_4}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial z}; \\
\frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11} \tilde{e}_{33} + m^2 \Delta_6}{r^2} - \tilde{e}_{33} \Omega^2 \right) U_1 + \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \\
&- \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{m}{r^2} U_2 - \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} + \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} U_4 - \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

На основании представления (3.12), система дифференциальных уравнений (3.9) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \left(\frac{\tilde{c}_{33} + m^2 \tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_1 - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \\
&- \frac{\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{r^2} U_2 - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{\tilde{e}_{33}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m^2}{r^2} U_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} = & \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{m}{r^2} U_1 - \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{11} + m^2 \Delta_3}{r^2} - \tilde{\epsilon}_{11} \Omega^2 \right) U_2 - \\ & - \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_3}{\partial z} - \frac{\tilde{\epsilon}_{15} \tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} U_4; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} = & - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66}} \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{r} \frac{\partial U_2}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{\tilde{c}_{66}} \left(\frac{m^2 \tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2 \right) U_3 - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial r} - \frac{\tilde{\epsilon}_{13} + \tilde{\epsilon}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2} = & \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{m}{r^2} U_1 + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{15} + m^2 \Delta_7}{r^2} - \tilde{\epsilon}_{15} \Omega^2 \right) U_2 + \\ & + \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{15}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{m \Delta_5}{\Delta} \frac{\partial U_3}{\partial z} - \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial U_4}{\partial r} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} U_4 - \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Для сведения систем двумерных дифференциальных уравнений (3.13) – (3.15) в частных производных к краевым задачам на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, применяем метод сплайн-коллокаций. Неизвестные функции $U_1(r, z)$, $U_2(r, z)$, $U_3(r, z)$, $U_4(r, z)$ представим в виде следующих отрезков рядов для различных случаев предварительной поляризации пьезокерамики.

Осевая поляризация

$$\begin{aligned} U_1(r, z) = & \sum_{i=0}^N u_{1i}(x) \varphi_{1i}(z); \quad U_2(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(x) \varphi_{1i}(z); \\ U_3(r, z) = & \sum_{i=0}^N u_{3i}(x) \varphi_{2i}(z); \quad U_4(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{4i}(x) \varphi_{2i}(z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Радиальная и круговая поляризация

$$\begin{aligned} U_1(r, z) = & \sum_{i=0}^N u_{1i}(x) \varphi_{1i}(z); \quad U_2(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(x) \varphi_{1i}(z); \\ U_3(r, z) = & \sum_{i=0}^N u_{3i}(x) \varphi_{2i}(z); \quad U_4(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{4i}(x) \varphi_{1i}(z), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $x = \frac{r - R_0}{h}$, $u_{1i}(x)$, $u_{2i}(x)$, $u_{3i}(x)$, $u_{4i}(x)$ – искомые функции от переменной x ; $\varphi_{ji}(z)$ ($j = 1, 2; i = 0, 1, \dots, N$) – линейные комбинации B -сплайнов третьего порядка на равномерной сетке Δ : $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$ с учётом граничных условий при $z = -L/2$ та $z = L/2$. Так, как в решаемые системы уравнений входят производные от неизвестных искомых функций не выше второго порядка, то можно в выражениях (3.16), (3.17) ограничиться сплайнами третьего порядка

$$B_3^i = \frac{1}{6} \begin{cases} 0; & -\infty < z < z_{i-2}; \\ \tilde{z}^3; & \tilde{z}_{i-2} \leq \tilde{z} < \tilde{z}_{i-1}; \\ -3\tilde{z}^2 + 3\tilde{z} + 1; & z_{i-1} \leq z < z_i; \\ 3\tilde{z}^3 - 6\tilde{z}^2 + 4; & z_i \leq z < z_{i+1}; \\ (1 - \tilde{z})^3; & z_{i+1} \leq z < z_{i+2}; \\ 0; & \tilde{z}_{i+2} \leq z < \infty, \end{cases} \quad (3.18)$$

где

$\tilde{z} = (z - z_k) / h_z$ на интервале: $[z_k; z_{k+1}]$, $k = \overline{i-2, i+1}$; $i = \overline{-1, N+1}$; $h_z = z_{k+1} - z_k = \text{const}$.

При этом функции φ_{ji} формируются таким образом:

а) если соответствующий компонент вектора решения равняется нулю, тогда имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \quad \varphi_{j_1}(z) = -4B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z); \\ \varphi_{ji}(z) &= B_3^i(z), \quad (i = \overline{2, N-2}); \end{aligned} \quad (3.19)$$

б) если производная по z от соответствующего компонента вектора решения равна нулю тогда имеем:

$$\varphi_{j_0}(z) = B_3^0(z); \quad \varphi_{j_1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z); \quad \varphi_{ji}(z) = B_3^i(z), \quad (i = \overline{2, N-2}). \quad (3.20)$$

Аналогичные формулы имеют место для $\varphi_{j_{N-1}}(z)$ и $\varphi_{j_N}(z)$.

Подставляем решения (3.16) и (3.17) в соответствующие уравнения (3.13) – (3.15) потребуем, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [-L/2; L/2]$, $k = \overline{0, N}$. Рассмотрим случай, когда количество узлов сетки четное $N = 2n + 1$ ($n \geq 3$) (учитывается z_0), в точках коллокации они удовлетворяют условиям $\xi_{2i} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда на отрезке $[z_{2i}, z_{2i+1}]$ имеем по два узла коллокации, а на соседних отрезках $[z_{2i+1}, z_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков $[z_{2i+1}, z_{2i+2}]$ точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2i} = z_{2i} + w_1 h_z$, $\xi_{2i+1} = z_{2i} + w_2 h_z$ ($i = \overline{1, n}$), где w_1 и w_2 это корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равняются $w_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$; $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно увеличивает порядок точности аппроксимации. Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)]; \quad k, i = \overline{0, N}; \quad j = 1, 2; \quad \mathbf{u}_1 = [u_{10}, u_{11}, \dots, u_{1N}]^T; \quad \mathbf{u}_2 = [u_{20}, u_{21}, \dots, u_{2N}]^T; \\ \mathbf{u}_3 &= [u_{30}, u_{31}, \dots, u_{3N}]^T; \quad \mathbf{u}_4 = [u_{40}, u_{41}, \dots, u_{4N}]^T; \quad (k, l) \in \{(k, l) | k, l = \overline{1, 8}\}; \\ \bar{a}_{kl}^T &= \{a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \end{aligned}$$

система (3.13) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка- $8(N+1)$ относительно функций $\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1, \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2, \mathbf{u}_3, \tilde{\mathbf{u}}_3, \mathbf{u}_4, \tilde{\mathbf{u}}_4$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_1}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_1; \quad \frac{d\mathbf{u}_2}{dx} = \tilde{\mathbf{u}}_2; \quad \frac{d\mathbf{u}_3}{dx} = \tilde{\mathbf{u}}_3; \quad \frac{d\mathbf{u}_4}{dx} = \tilde{\mathbf{u}}_4; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'')\mathbf{u}_1 + a_{13}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{14}\Phi_2\mathbf{u}_2 + \right. \\ &\quad \left. + a_{15}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + a_{16}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_3 + \bar{a}_{17}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \right]; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1} \left[a_{21}\Phi_1\mathbf{u}_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')\mathbf{u}_2 + \right. \\ &\quad \left. + a_{25}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + a_{26}\Phi_1\mathbf{u}_3 + a_{27}\Phi_1\mathbf{u}_4 \right]; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[a_{31}\Phi_1'\mathbf{u}_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{33}\Phi_2'\mathbf{u}_2 + \right. \\ &\quad \left. + (a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1'')\mathbf{u}_3 + a_{36}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_3 + a_{37}\Phi_1''\mathbf{u}_4 \right]; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_4}{dx} = \Phi_1^{-1} \left[\begin{array}{l} a_{41}\Phi_1'\mathbf{u}_1 + a_{42}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{43}\Phi_2'\mathbf{u}_2 + (a_{44}\Phi_1 + a_{45}\Phi_1'')\mathbf{u}_3 + \\ + (a_{46}\Phi_1 + a_{47}\Phi_1'')\mathbf{u}_4 + a_{48}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{array} \right],$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{m^2\tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{11}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{11}}; & a_{12} &= -\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; & a_{13} &= -\frac{1}{x}; & a_{14} &= -\frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11}x^2}; \\ a_{15} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}x}; & a_{16} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; & a_{17} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}}; & a_{21} &= \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66}x^2}; \\ a_{22} &= \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66}x}; & a_{23} &= \left(\frac{m^2\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{66}}; & a_{24} &= -\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}}; & a_{25} &= -\frac{1}{x}; \\ a_{26} &= \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x}; & a_{27} &= \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x}; & a_{31} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right) \frac{1}{x}; & a_{32} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right); \\ a_{33} &= -\left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right) \frac{m}{x}; & a_{34} &= \left(\frac{m^2\Delta}{x^2} - \tilde{e}_{33}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; & a_{35} &= -\frac{\Delta_5}{\Delta}; & a_{36} &= -\frac{1}{x}; & a_{37} &= \frac{\Delta_6}{\Delta}; \\ a_{41} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{x}; & a_{42} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; & a_{43} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{m}{x}; & a_{44} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\Omega^2}{\Delta}; & a_{45} &= \frac{\Delta_2}{\Delta}; & a_{46} &= \frac{m^2}{x^2}; \\ & & & & & & & & & & a_{47} &= -\frac{\Delta_3}{\Delta}; & a_{48} &= -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Система (3.14) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка – $8(N+1)$ относительно функций $\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1, \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2, \mathbf{u}_3, \tilde{\mathbf{u}}_3, \mathbf{u}_4, \tilde{\mathbf{u}}_4$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_1}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_1; & \frac{d\mathbf{u}_2}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_2; & \frac{d\mathbf{u}_3}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_3; & \frac{d\mathbf{u}_4}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_4; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{array}{l} (a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'')\mathbf{u}_1 + a_{13}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{14}\Phi_2\mathbf{u}_2 + a_{15}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \\ + a_{16}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{17}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_3 + (a_{18}\Phi_1 + a_{19}\Phi_1'')\mathbf{u}_4 + a_{110}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{array} \right]; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1} \left[\begin{array}{l} a_{21}\Phi_1\mathbf{u}_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')\mathbf{u}_2 + \\ + a_{25}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + a_{26}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{27}\Phi_1\mathbf{u}_4 + a_{28}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{array} \right]; & (3.22) \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{array}{l} a_{31}\Phi_1'\mathbf{u}_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{33}\Phi_2'\mathbf{u}_2 + (a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1'')\mathbf{u}_3 + \\ + a_{36}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_3 + a_{37}\Phi_1'\mathbf{u}_4 + a_{38}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{array} \right]; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_4}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{array}{l} (a_{41}\Phi_1 + a_{42}\Phi_1'')\mathbf{u}_1 + a_{43}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{44}\Phi_2\mathbf{u}_2 + a_{45}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \\ + a_{46}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{47}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_3 + (a_{48}\Phi_1 + a_{49}\Phi_1'')\mathbf{u}_4 + a_{410}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{array} \right], \end{aligned}$$

где

$$a_{11} = \left(\frac{m^2\Delta_6 + \tilde{c}_{11}\tilde{e}_{33}}{x^2} - \tilde{e}_{33}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; \quad a_{12} = -\frac{\Delta_6}{\Delta}; \quad a_{13} = -\left(1 + \frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{x}; \quad a_{14} = \frac{m\Delta_7}{x^2\Delta};$$

$$\begin{aligned}
a_{15} &= \frac{m\Delta_8}{x\Delta}; & a_{16} &= \frac{\Delta_9}{x\Delta}; & a_{17} &= \frac{\Delta_8}{\Delta}; & a_{18} &= -\frac{m^2\Delta_{10}}{x^2\Delta}; & a_{19} &= \frac{\Delta_{10}}{\Delta}; & a_{110} &= \frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}; \\
a_{21} &= \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x^2}; & a_{22} &= \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}; & a_{23} &= \left(\frac{m^2\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; & a_{24} &= -\frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}}; \\
a_{25} &= -\frac{1}{x}; & a_{26} &= \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}; & a_{27} &= \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x^2}; & a_{28} &= \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}; & a_{31} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}; \\
a_{32} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; & a_{33} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}; & a_{34} &= \left(\frac{m^2\tilde{c}_{66}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; & a_{35} &= -\frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}}; \\
a_{36} &= -\frac{1}{x}; & a_{37} &= -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}; & a_{38} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}; & a_{41} &= \left(\frac{\tilde{c}_{11}\tilde{e}_{33} - m^2\Delta_1}{x^2} - \tilde{e}_{33}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; \\
a_{42} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; & a_{43} &= \frac{\tilde{e}_{33}\tilde{c}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}; & a_{44} &= -\frac{m\Delta_2}{x^2\Delta}; & a_{45} &= \frac{m\Delta_3}{x\Delta}; & a_{46} &= \frac{\Delta_4}{x\Delta}; & a_{47} &= \frac{\Delta_3}{\Delta}; \\
a_{48} &= \frac{m^2\Delta_5}{x^2\Delta}; & a_{49} &= -\frac{\Delta_5}{\Delta}; & a_{410} &= \left(\frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Система (3.15) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка – $8(N+1)$ относительно функций $\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1, \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2, \mathbf{u}_3, \tilde{\mathbf{u}}_3, \mathbf{u}_4, \tilde{\mathbf{u}}_4$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{u}_1}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_1; & \frac{d\mathbf{u}_2}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_2; & \frac{d\mathbf{u}_3}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_3; & \frac{d\mathbf{u}_4}{dx} &= \tilde{\mathbf{u}}_4; \\
\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{aligned} &(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'')\mathbf{u}_1 + a_{13}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{14}\Phi_2\mathbf{u}_2 + a_{15}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \\ &+ a_{16}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{17}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_3 + a_{18}\Phi_1\mathbf{u}_4 + \bar{a}_{19}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{aligned} \right]; \\
\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1} \left[\begin{aligned} &a_{21}\Phi_1\mathbf{u}_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')\mathbf{u}_2 + \\ &+ a_{25}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + a_{26}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{27}\Phi_1\mathbf{u}_4 + a_{28}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{aligned} \right]; \\
\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{aligned} &a_{31}\Phi_1'\mathbf{u}_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{33}\Phi_2'\mathbf{u}_2 + (a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1'')\mathbf{u}_3 + \\ &+ a_{36}\Phi_1\tilde{\mathbf{u}}_3 + a_{37}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{aligned} \right]; \\
\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_4}{dx} &= \Phi_1^{-1} \left[\begin{aligned} &a_{41}\Phi_1\mathbf{u}_1 + a_{42}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_1 + a_{43}\Phi_2\mathbf{u}_2 + a_{44}\Phi_2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \\ &+ a_{45}\Phi_1'\mathbf{u}_3 + a_{46}\Phi_1\mathbf{u}_4 + a_{47}\Phi_1'\tilde{\mathbf{u}}_4 \end{aligned} \right],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}x^2}; & a_{12} &= -\frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{11}}; & a_{13} &= \frac{1}{x}; & a_{14} &= \frac{m(\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55})}{x^2\tilde{c}_{11}}; & a_{15} &= \frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{x\tilde{c}_{11}}; \\
a_{16} &= \frac{\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{12}}{x\tilde{c}_{11}}; & a_{17} &= \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}}; & a_{18} &= \frac{m^2e_{33}}{x^2c_{11}}; & a_{19} &= \frac{m(\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15})}{x\tilde{c}_{11}}; & a_{21} &= \frac{m\Delta_7}{x^2\Delta}; \\
a_{22} &= \frac{m\Delta_6}{x\Delta}; & a_{23} &= \left(\frac{(\tilde{c}_{55}\tilde{e}_{11} + m^2\Delta_8)}{x^2} - \tilde{e}_{11}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; & a_{24} &= -1; & a_{25} &= \frac{\tilde{c}_{55}\tilde{e}_{11}}{x\Delta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{26} &= \frac{m\Delta_6}{x\Delta}; & a_{27} &= \frac{m^2\Delta_5}{x^2\Delta}; & a_{28} &= \frac{\tilde{\epsilon}_{15}\tilde{\epsilon}_{11}}{x\Delta}; & a_{31} &= \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{66}}{x\tilde{c}_{66}}; & a_{32} &= \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{x\tilde{c}_{66}}; \\
a_{33} &= \frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{x\tilde{c}_{66}}; & a_{34} &= \left(\frac{m^2\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{66}}; & a_{35} &= -\frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}}; & a_{36} &= \frac{1}{x}; \\
a_{37} &= \frac{m(\tilde{\epsilon}_{13} + \tilde{\epsilon}_{15})}{\tilde{c}_{66}}; & a_{41} &= \frac{m\Delta_2}{x^2\Delta}; & a_{42} &= \frac{m\Delta_3}{x\Delta}; & a_{43} &= \left(\left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2 \right) \tilde{\epsilon}_{15} - \frac{m^2\Delta_4}{x^2} \right) \frac{1}{\Delta}; \\
a_{44} &= \frac{\tilde{c}_{55}\tilde{\epsilon}_{15}}{x\Delta}; & a_{45} &= \frac{m\Delta_3}{\Delta}; & a_{46} &= \frac{m^2\Delta_1}{x^2\Delta}; & a_{47} &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Системы (3.21) – (3.23) можно преобразовать к нормальной форме Коши

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R}, \quad (3.24)$$

где

$$\mathbf{R} = \left\{ u_{10}, u_{11}, \dots, u_{1N}, \tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{11}, \dots, \tilde{u}_{1N}, u_{20}, u_{21}, \dots, u_{2N}, \tilde{u}_{20}, \tilde{u}_{21}, \dots, \tilde{u}_{2N}, \right. \\ \left. u_{30}, u_{31}, \dots, u_{3N}, \tilde{u}_{30}, \tilde{u}_{31}, \dots, \tilde{u}_{3N}, u_{40}, u_{41}, \dots, u_{4N}, \tilde{u}_{40}, \tilde{u}_{41}, \dots, \tilde{u}_{4N} \right\}^T.$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\chi'_{11}} &= \frac{\Phi'_1}{\Phi_1}; & \frac{1}{\chi'_{12}} &= \frac{\Phi'_1}{\Phi_2}; & \frac{1}{\chi'_{21}} &= \frac{\Phi'_2}{\Phi_1}; & \frac{1}{\chi'_{22}} &= \frac{\Phi'_2}{\Phi_2}; & \frac{1}{\chi''_{11}} &= \frac{\Phi''_1}{\Phi_1}; \\
\frac{1}{\chi''_{12}} &= \frac{\Phi''_1}{\Phi_2}; & \frac{1}{\chi''_{21}} &= \frac{\Phi''_2}{\Phi_1}; & \frac{1}{\chi''_{22}} &= \frac{\Phi''_2}{\Phi_2},
\end{aligned}$$

а также для осевой поляризации:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\tilde{c}_{11} + m^2\tilde{c}_{66}}{x^2\tilde{c}_{11}} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}\chi'_{11}}; & \alpha_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}}; & \beta_1 &= \frac{\tilde{c}_{66} + m^2\tilde{c}_{11}}{x^2\tilde{c}_{66}} - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}\chi'_{11}}; \\
\beta_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{66}}; & \gamma_1 &= \gamma_1 = \frac{m^2}{x^2} + \frac{\Delta_2}{\Delta\chi'_{22}}; & \gamma_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta}; & \delta_1 &= \frac{\tilde{c}_{11}\tilde{\epsilon}_{33} + m^2\Delta_6}{x^2\Delta} - \frac{\Delta_6}{\Delta\chi'_{11}}; & \delta_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\Delta};
\end{aligned}$$

для радиальной поляризации:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\tilde{c}_{11}\tilde{\epsilon}_{33} + m^2\Delta_1}{x^2\Delta} - \frac{\Delta_1}{\Delta\chi''_{11}}; & \alpha_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta}; & \beta_1 &= \frac{\tilde{c}_{55} + m^2\tilde{c}_{11}}{x^2\tilde{c}_{55}} - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}\chi''_{11}}; \\
\beta_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; & \gamma_1 &= \frac{m^2\tilde{c}_{66}}{x^2\tilde{c}_{55}} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}\chi'_{22}}; & \gamma_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; & \delta_1 &= \frac{\Delta_5}{\Delta\chi'_{22}}; & \delta_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta};
\end{aligned}$$

для окружной поляризации:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\tilde{c}_{11} + m^2\tilde{c}_{66}}{x^2\tilde{c}_{11}} - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}\chi''_{11}}; & \alpha_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{11}}; & \beta_1 &= \frac{\tilde{c}_{55}\tilde{\epsilon}_{11} + m^2\Delta_3}{\Delta x^2} - \frac{1}{\chi'_{11}}; \\
\beta_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta}; & \gamma_1 &= \frac{m^2\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}x^2} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}\chi''_{22}}; & \gamma_2 &= \frac{1}{\tilde{c}_{66}}; & \delta_1 &= \frac{\tilde{c}_{55}\tilde{\epsilon}_{15} + m^2\Delta_4}{\Delta x^2}; & \delta_2 &= \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Тогда матрица \mathbf{A} для системы (3.24) будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 - \alpha_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & -\frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11} x^2} & -\frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11} x} & 0 & -\frac{(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11} \chi'_{21}} & 0 & -\frac{(\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15})}{\tilde{c}_{11} \chi'_{21}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66} x^2} & \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66} x} & \beta_1 - \beta_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & \frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{x \tilde{c}_{66} \chi'_{21}} & 0 & \frac{m(\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15})}{x \tilde{c}_{66} \chi'_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(\Delta + \Delta_4)}{\Delta x \chi'_{12}} & -\frac{(\Delta + \Delta_4)}{\Delta \chi'_{12}} & -\frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{41}}{\Delta x \chi'_{12}} & 0 & \gamma_1 - \gamma_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & \frac{\Delta_3}{\Delta \chi'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta_4}{\Delta x \chi'_{12}} & -\frac{\Delta_4}{\Delta \chi'_{12}} & -\frac{m \tilde{e}_{15} (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{\Delta x \chi'_{12}} & 0 & -\delta_1 - \delta_2 \Omega^2 & 0 & \frac{m^2}{x^2} \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11}}{\Delta \chi'_{22}} & -\frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (3.25)$$

Граничные условия для системы (3.24) будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = 0; \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = 0. \quad (3.26)$$

Матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 имеют вид для системы (3.26)

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{c}_{12} \Phi_1 & \tilde{c}_{11} \Phi_1 & -c_{12} m \Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{13} \Phi'_2 & 0 & \tilde{e}_{13} \Phi'_2 & 0 \\ -m \Phi_1 & 0 & \Phi_1 & \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{55} \Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} \Phi_2 & 0 & \tilde{e}_{15} \Phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12} \Phi_1 & \tilde{c}_{11} \Phi_1 & c_{12} m \Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{13} \Phi'_2 & 0 & \tilde{e}_{13} \Phi'_2 & 0 \\ m \Phi_1 & 0 & -\Phi_1 & \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{55} \Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} \Phi_2 & 0 & \tilde{e}_{15} \Phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} для системы (3.24) будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 - \alpha_2 \Omega^2 & \frac{1}{x} \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta x} & \frac{m \Delta_2}{\Delta x^2} & \frac{m \Delta_3}{x \Delta} & -\frac{\Delta_4}{\Delta x \chi'_{21}} & -\frac{\Delta_2}{\Delta \chi'_{21}} & \frac{m^2 \Delta_5}{\Delta x^2} \frac{\Delta_5}{\Delta \chi'_{11}} & -\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55})}{\tilde{c}_{55} x^2} & \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55})}{\tilde{c}_{55} x} & \beta_1 - \beta_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{x \tilde{c}_{55} \chi'_{21}} & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x^2} & \frac{m(\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15})}{\tilde{c}_{55} x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55})}{\tilde{c}_{55} x \chi'_{12}} & -\frac{(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{\tilde{c}_{55} \chi'_{12}} & -\frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{55} x \chi'_{12}} & 0 & \gamma_1 - \gamma_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55} x \chi'_{12}} & -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55} \chi'_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 - \delta_2 \Omega^2 & -\frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x} & \frac{m \Delta_7}{x^2 \Delta} & -\frac{m \Delta_8}{x \Delta} & -\frac{\Delta_9}{x \Delta \chi'_{21}} & 0 & \frac{m^2 \Delta_{10}}{x^2 \Delta} \frac{\Delta_{101}}{\Delta \chi'_{11}} & \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (3.27)$$

Матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 граничных условий (3.26) для системы уравнений (3.24) имеют следующий вид:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{c}_{13}\Phi_1 & \tilde{c}_{33}\Phi_1 & -\tilde{c}_{13}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{13}\Phi'_2 & 0 & 0 & \tilde{e}_{33}\Phi_1 \\ \tilde{c}_{55}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & 0 & 0 & e_{15}m\Phi_1 & 0 \\ \tilde{c}_{55}\Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55}\Phi_2 & e_{15}\Phi'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{13}\Phi_1 & \tilde{c}_{33}\Phi_1 & \tilde{c}_{13}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{13}\Phi'_2 & 0 & 0 & \tilde{e}_{33}\Phi_1 \\ -\tilde{c}_{55}m\Phi_1 & 0 & -\tilde{c}_{55}\Phi_1 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & 0 & 0 & -e_{15}m\Phi_1 & 0 \\ \tilde{c}_{55}\Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55}\Phi_2 & e_{15}\Phi'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} для системы (3.24) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & -\frac{m(\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{55})}{x^2 \tilde{c}_{11}} & -\frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{x \tilde{c}_{11}} & \frac{\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{12}}{x \tilde{c}_{11} \chi'_{21}} & -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11} \chi'_{21}} & \frac{m^2 e_{33}}{x^2 c_{11}} & \frac{m(\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15})}{x \tilde{c}_{11}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m \Delta_2}{x^2 \Delta} & \frac{m \Delta_1}{x \Delta} & \beta_1 - \beta_2 \Omega^2 & -\frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11}}{x \Delta} & \frac{m \Delta_1}{x \Delta \chi'_{21}} & 0 & \frac{m^2 \Delta_4}{x^2 \Delta} & -\frac{\tilde{e}_{15} \tilde{e}_{11}}{x \Delta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{66}}{x \tilde{c}_{66} \chi'_{12}} & -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{66} \chi'_{12}} & -\frac{m(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})}{x \tilde{c}_{66} \chi'_{12}} & 0 & \gamma_1 - \gamma_2 \Omega^2 & -\frac{1}{x} & -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66} \chi'_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m \Delta_6}{x^2 \Delta} & \frac{m \Delta_5}{x \Delta} & \delta_1 - \delta_2 \Omega^2 & -\frac{\tilde{c}_{55} \tilde{e}_{15}}{x \Delta} & \frac{m \Delta_5}{\Delta \chi'_{21}} & 0 & \frac{m^2 \Delta_8}{x^2 \Delta} - \frac{1}{\chi''_{11}} & -\left(1 + \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta}\right) \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 граничных условий (3.27) для системы (3.26) имеют следующий вид:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{c}_{13}\Phi_1 & \tilde{c}_{11}\Phi_1 & -\tilde{c}_{13}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{12}\Phi'_2 & 0 & \tilde{e}_{13}m\Phi_1 & 0 \\ \tilde{c}_{55}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & 0 & 0 & 0 & e_{15}\Phi_1 \\ \Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{13}\Phi_1 & \tilde{c}_{11}\Phi_1 & \tilde{c}_{13}m\Phi_1 & 0 & \tilde{c}_{12}\Phi'_2 & 0 & \tilde{e}_{13}m\Phi_1 & 0 \\ -\tilde{c}_{55}m\Phi_1 & 0 & -\tilde{c}_{55}\Phi_1 & \tilde{c}_{55}\Phi_1 & 0 & 0 & 0 & e_{15}\Phi_1 \\ \Phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение сформулированных выше краевых задач на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений выполнено устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Численный анализ спектра собственных частот свободных несимметричных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией пьезокерамики.

Для оценки достоверности результатов расчетов для данного класса задач рассмотрим тестовую задачу о свободных колебаниях однородного полого пьезокерамического цилиндра с граничными условиями шарнирного опирания на торцах (рис. 1).

В качестве материала цилиндра рассматривалась пьезокерамика PZT 4. Геометрические характеристики цилиндра задавались следующими: длина цилиндра $L = 10$, внутренний радиус – $R_- = 3$, внешний – $R_+ = 5$. При таких геометрических характеристиках данная задача совпадает с задачей о распространении акустоэлектрических волн в пьезокерамическом волноводе (при $\varepsilon = 0,25$).

В табл. 1 представлено сравнение результатов решения задачи первые шесть собственных частот с помощью метода сплайн коллокации при различном числе точек коллокации аналитического решения, полученном в работе [91].

Таблица 1

Порядковый номер частоты	$N = 24$	$N = 30$	Аналитическое решение
1	0,1501	0.1412	0.1411
2	0,2743	0.2739	0.2738
3	0,3774	0,3767	0,3764
4	0,4358	0,4339	0,4338
5	0,5081	0,5072	0,5071
6	0,6057	0,6048	0,6045

Результаты, приведенные в табл. 1, говорят о практическом совпадении данных, полученных с помощью метода сплайн-коллокации и метода степенных рядов, что может служить критерием достоверности проведения расчетов на основе предложенного нами численно аналитического подхода.

Решена задача в случае жесткого закрепления торцов цилиндра. На рис. 2 представлена зависимость первых пяти собственных частот от относительной длины цилиндра со следующими геометрическими параметрами: длина $L = 10$, внутренний радиус $R_- = 3$, внешний – $R_+ = 5$. Материал цилиндра – пьезокерамика PZT 4. Сплошными линиями показано значение частот с учётом пьезоэффекта, штриховыми – без учёта пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Очевидно, что с увеличением относительной длины цилиндра собственные частоты уменьшаются. Первая собственная частота почти не зависит от связанного электрического поля, для более высоких частот связанное электрическое поле оказывает более существенно влияние на характер поведения собственных частот.

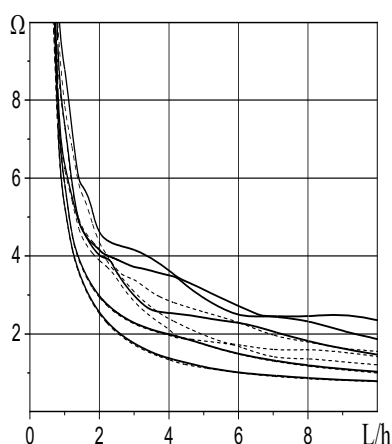


Рис. 2

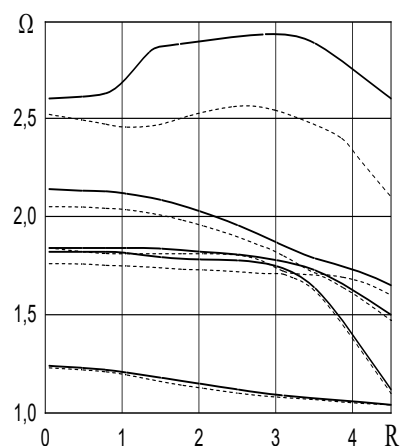


Рис. 3

На рис. 3 представлена зависимость первых пяти частот свободных колебаний пьезокерамического цилиндра от внутреннего радиуса R_- , при этом внешний радиус остается постоянным и равняется $R_+ = 5$. Длина цилиндра равняется $L = 5$. Для первых трех собственных частот наблюдается с увеличением радиуса цилиндра увеличение значений собственных частот, в случае более высоких частот характер спектра усложняется, появляются интервалы, где наблюдается незначительная зависимость значений собственных частот от рассматриваемого геометрического параметра цилиндра.

Решим задачу для случая, когда материал цилиндра является непрерывно неоднородным. Физико-механические характеристики такого материала изменяются по радиальной координате по экспоненциальному закону следующим образом: $c_{ij} = c_{ij}^0 e^{nr}$, $e_{ij} = e_{ij}^0 e^{nr}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 e^{nr}$. Параметр n определяется экспериментальным путем и, как правило, находится в следующем интервале $-2 \leq n \leq 2$. Характеристики материала с индексом 0 достигаются на внешней поверхности цилиндра ($R_+ = 5$) и имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} c_{11}^0 &= 13,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; c_{12}^0 = 7,43 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; c_{13}^0 = 7,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; c_{33}^0 = 11,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; \\ c_{55}^0 &= 2,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}; e_{13}^0 = -5,2 \frac{\text{К}}{\text{М}}; e_{15}^0 = 12,7 \frac{\text{К}}{\text{М}^2}; e_{33}^0 = 15,1 \frac{\text{К}}{\text{М}^2}; \varepsilon_{11}^0 = 730; \varepsilon_{33}^0 = 635. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Характер изменения физико-механических характеристик материала показано на рис. 4 на примере упругого модуля c_{11} .

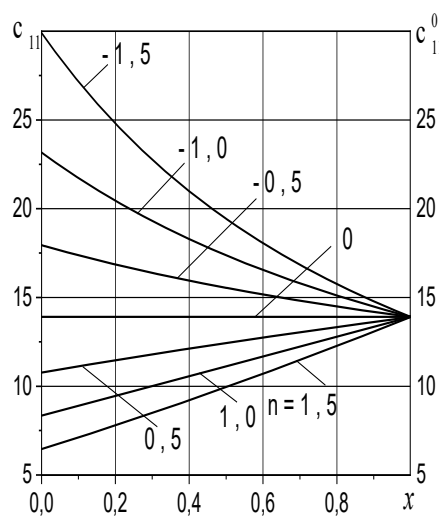


Рис. 4

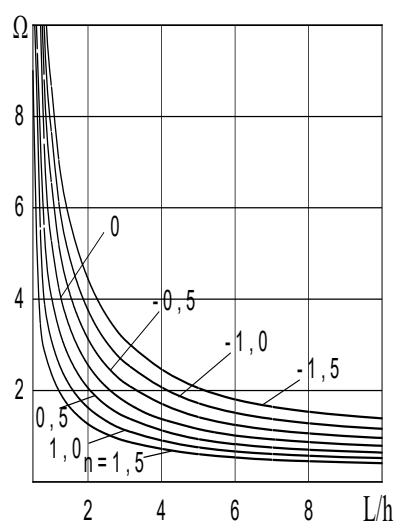


Рис. 5

На рис. 5 представлена зависимость первой собственной частоты от относительной длины цилиндра для различных значений параметра неоднородности n ($m = 1$).

На рис. 6 представлена зависимость первой собственной частоты колебаний цилиндра от внутреннего радиуса R_- для различных значений параметра n , внешний радиус при этом остается постоянным и равняется $R_+ = 5$ ($m = 1$) при длине цилиндра $L = 5$.

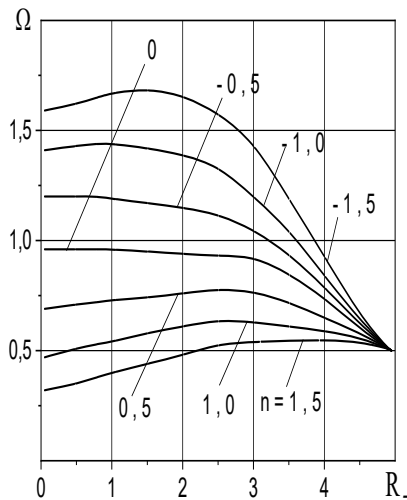


Рис. 6

проведено сравнение с приближенными значениями собственных частот для однородного цилиндра, упругие модули которого определены с помощью применения формул теории эффективных модулей. Также проводится сравнение с собственными частотами неоднородного цилиндра при отсутствии связанного электрического поля. Расчеты проводились при следующих параметрах: $L = 5$, $R_+ = 5$, $R_- = 2$, $n = 1,5$, $m = 1$, материал цилиндра – пьезокерамика PZT 4.

Таблица 2

№ частоты	Неоднородный цилиндр	Цилиндр из осредненного однородного материала	Относительная погрешность, %	Без учёта связанного электрического поля	Относительная погрешность, %
1	1,15	1,16	0,9	1,14	0,9
2	2,18	2,18	0,0	1,79	17,9
3	2,31	2,35	1,8	2,04	11,7
4	2,82	2,64	6,4	2,19	22,3
5	2,98	3,04	2,0	2,84	4,7

Как можно видеть из приведенной таблицы, относительная погрешность при пренебрежении фактора неоднородности для данной задачи значительно меньше, чем погрешность, которая возникает при пренебрежении связанного электрического поля. Так, при пренебрежении фактором неоднородной структуры цилиндра, наибольшая погрешность для приведенных пяти собственных первых частот возникает на четвертой частоте и составляет 6,4%. Для случая, когда пренебрегаем связанным электрическим полем, погрешность на отмеченных выше частотах будет значительно больше и составит 22,3% для третьей собственной частоты.

Численный анализ спектра собственных частот свободных неосесимметричных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины с радиальной поляризацией пьезокерамики.

Представим результаты численного анализа решений задачи в случае жестко заделанных торцов цилиндра. В качестве материала цилиндра принята пьезокерамика PZT 4. На рис. 7 показана зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h ($R_+ = 5$; $R_- = 3$). Здесь R_+ – внешний радиус цилиндра; R_- – внутренний. Сплошными линиями показано изменение значений первых пяти собственных частот (Ω) в зависимости от изменения безразмерной длины цилиндра (L/h) с учетом пьезоэффекта, пунктирными – без учета пьезоэффекта

Проведем исследование влияния связанного электрического поля и фактора неоднородности электрического поля на значения собственных частот колебаний цилиндра. Для определения влияния фактора неоднородности проведем сравнение значений частот для неоднородного цилиндра и однородного с осредненными характеристиками, вычисленными с применением теории эффективных модулей для случая, когда модули меняются по экспоненциальному закону

$$\lambda = \frac{\lambda^0}{R_+ - R_-} \int_{R_-}^{R_+} e^{nr} dr = \frac{\lambda^0}{2nh} e^{nR_-} (e^{2nh} - 1). \quad (3.30)$$

В табл. 2 приведены значения первых пяти частот свободных колебаний неоднородного пьезокерамического цилиндра и

($e_{ij} = 0$). Из приведенных результатов видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, т.е. к повышению значения собственных частот. В этом случае при определении первой и второй собственных частот влиянием пьезоэффекта можно пренебречь для всех длин цилиндрических оболочек, вплоть до относительной длины ($L \geq 5$). Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров.

На рис. 8 представлены графики зависимостей первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_+), при этом длина цилиндра ($L = 5$) и внешний диаметр ($R_- = 5$) остаются фиксированными.

Анализ приведенных результатов показывает, что влияние пьезоэффекта является существенным в рассматриваемом диапазоне. Наименьшее его влияние заметно лишь для первой собственной частоты. Для более высоких частот наблюдается существенная перестройка спектра собственных частот колебаний.

На рис. 9 показана зависимость первых шести частот собственных колебаний от числа m полуволн в окружном направлении. Хотя промежуточные значения собственных частот между целыми значениями числа полуволн не имеют физического смысла, они соединены линией для большей наглядности зависимости. Сплошной линией соединены значения частот собственных колебаний для случая пьезокерамического цилиндра, пунктирной – для случая упругого цилиндра ($e_{ij} = 0$). На основании представленных данных заметим, что наименьшее влияние пьезоэффекта сказывается на первые две частоты для малых значений m . С ростом числа полуволн в окружном направлении наблюдается усиление влияния пьезоэффекта на спектр собственных частот.

Решим задачу для случая, когда материал цилиндра является непрерывно неоднородным. Физико-механические характеристики такого материала изменяются по ра-

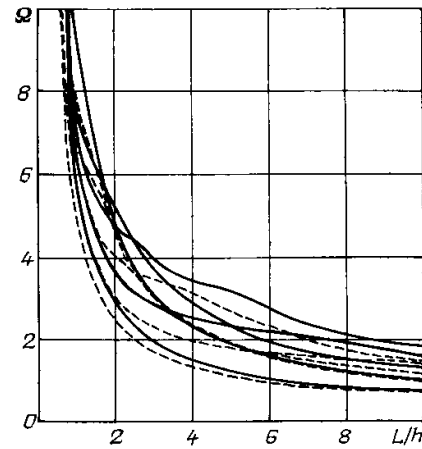


Рис. 7

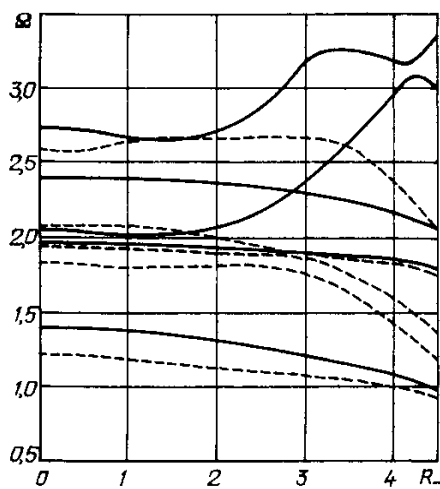


Рис. 8

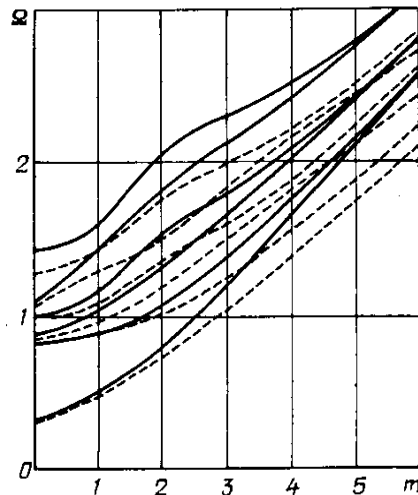


Рис. 9

диальной координате по экспоненциальному закону следующим образом: $c_{ij} = c_{ij}^o e^{nr}$, $e_{ij} = e_{ij}^o e^{nr}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^o e^{nr}$. Параметр n определяется экспериментальным путем и, как правило, находится в следующем интервале: $-2 \leq n \leq 2$. Характеристики материала с индексом 0 достигаются на внешней поверхности цилиндра ($R_+ = 5$) и имеют значения (3.29).

Характер изменения физико-механических характеристик материала показан на рис. 4 на примере упругого модуля c_{11} .

На рис. 10 показана зависимость первой собственной частоты от относительной длины цилиндра для различных значений параметра неоднородности n .

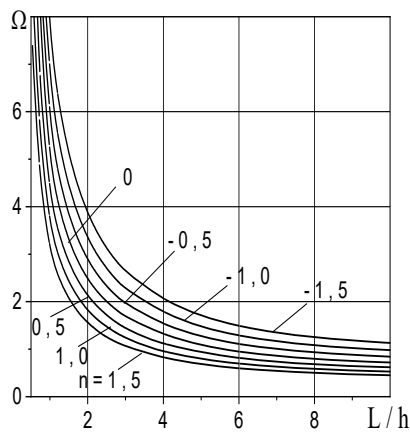


Рис. 10

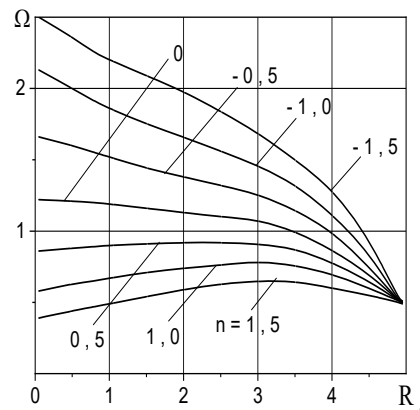


Рис. 11

На рис. 11 показано, как влияет изменение внутреннего радиуса R_- цилиндра на значение первой собственной частоты колебаний при различных значениях параметра n , при этом внешний радиус цилиндра остается постоянным и равняется $R_+ = 5$. Длина цилиндра имеет значение $L = 5$, количество полувольт в окружном направлении равно $m = 1$.

Проведем исследование влияния связанного электрического поля и фактора неоднородности электрического поля на значения собственных частот колебаний цилиндра с радиальной поляризацией. Для определения влияния фактора неоднородности проведем сравнение значений частот для неоднородного цилиндра и однородного с осредненными характеристиками, вычисленными с применением теории эффективных модулей для случая, когда модули меняются по экспоненциальному закону (3.30).

В табл. 3 приведены значения первых пяти частот свободных колебаний неоднородного пьезокерамического цилиндра и проведено сравнение с приближенными значениями собственных частот для однородного цилиндра, упругие модули которого определены с помощью применения формул теории эффективных модулей.

Таблица 3

№ частоты	Неоднородный цилиндр	Цилиндр из осредненного однородного материала	Относительная погрешность %	Без учёта связанного электрического поля	Относительная погрешность, %
1	1,31	1,31	0	1,21	7,6
2	2,16	2,10	2,8	1,83	15,3
3	2,29	2,30	0,4	2,22	3,1
4	2,69	2,68	0,4	2,31	14,1
5	3,08	3,11	1,0	2,74	11,0

Также проводится сравнение с собственными частотами неоднородного цилиндра при отсутствии связанного электрического поля. Расчеты проводились при следующих параметрах: $L = 5$, $R_+ = 5$, $R_- = 2$, $n = 1,5$, $m = 1$, материал цилиндра – пьезокерамика PZT 4.

Как можно видеть из приведенной табл. 3, относительная погрешность при пренебрежении фактора неоднородности для данной задачи значительно меньше, чем погрешность, которая возникает при пренебрежении связанного электрического поля. Так, при пренебрежении фактором неоднородной структуры цилиндра, наибольшая погрешность для приведенных пяти собственных первых частот возникает на второй частоте и составляет 2,8 %. Для случая, когда мы пренебрегаем связанным электрическим полем, погрешность на отмеченных выше частотах будет значительно больше и составляет 15,3% для второй собственной частоты

Численный анализ спектра собственных частот свободных неосесимметричных колебаний пьезокерамических цилиндров конечной длины с круговой поляризацией пьезокерамики.

Решена задача в случае жесткого закрепления торцов цилиндра. На рис. 12 представлена зависимость первых пяти собственных частот от относительной длины цилиндра L/h со следующими геометрическими параметрами: внутренний радиус $R_- = 3$, внешний – $R_+ = 5$. Материал цилиндра – пьезокерамика PZT 4. Количество полуволн в окружном направлении имеет следующее значение: $m = 1$. Сплошными линиями показано значение частот с учётом пьезоэффекта, штриховыми – без учёта пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Можно видеть, что с увеличением относительной длины цилиндра собственные частоты уменьшаются. Первая собственная частота для длинных цилиндров практически почти не зависит от связанного электрического поля, для более высоких частот связанное электрическое поле оказывает более существенно влияние на характер поведения собственных частот. Для собственных частот, начиная со второй, отметим интервалы, на которых собственная частота незначительно зависит от геометрических параметров цилиндра («плато») и точки сближения частот (не пересечения) частот. Очевидно, что отмеченные значения являются неблагоприятными для надежного функционирования соответствующих конструктивных элементов, имеющих цилиндрическую форму. В этом случае незначительному изменению собственной частоты колебаний соответствует существенное изменение формы колебаний. Приведенные данные, безусловно, требуют дополнительных исследований.

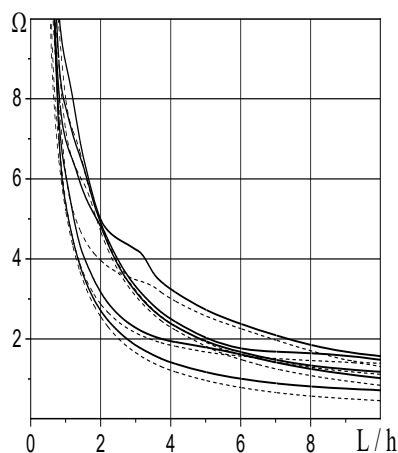


Рис. 12

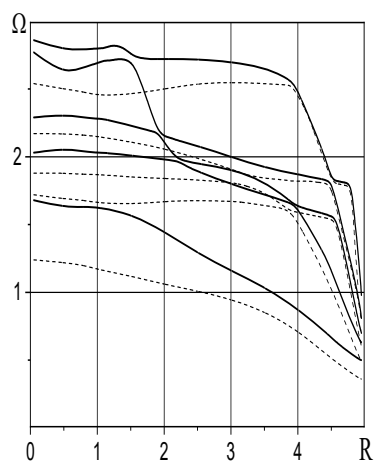


Рис. 13

На рис. 13 представлена зависимость первых пяти частот свободных колебаний пьезокерамического цилиндра от внутреннего радиуса R_- , при этом внешний радиус остается постоянным и равняется $R_+ = 5$. Длина цилиндра равняется $L = 5$. Количество полуволн в окружном направлении имеет следующее значение: $m = 1$. Для первой собственной частоты наблюдается увеличение частоты с увеличением радиуса цилиндра, в случае более высоких частот характер спектра усложняется, появляются интервалы, где наблюдается незначительная зависимость значений собственных частот от рассматриваемых геометрических параметров цилиндра.

Решим задачу для случая, когда материал цилиндра является непрерывно неоднородным. Физико-механические характеристики такого материала изменятся по радиальной координате по экспоненциальному закону, как и в случае осевой и радиальной поляризации цилиндра. Характеристики материала с индексом 0 достигаются на внешней поверхности цилиндра ($R_+ = 5$) и имеют значения (3.29).

Характер изменения физико-механических характеристик материала показан на рис. 4 на примере упругого модуля c_{11} .

На рис. 14 показана зависимость первой частоты собственных колебаний цилиндра для случая непрерывно неоднородного материала при различных значениях параметра неоднородности n . Количество полуволн в окружном направлении имеет следующее значение: $m = 1$.

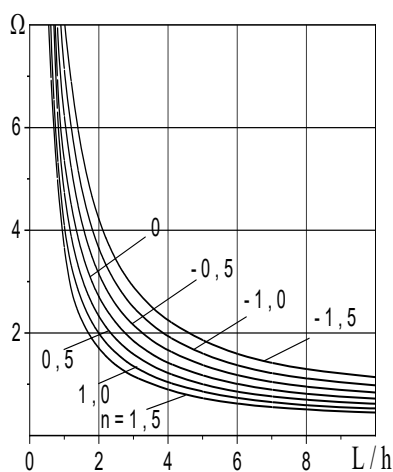


Рис.14

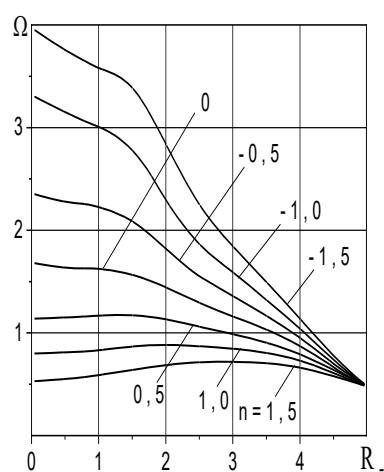


Рис.15

На рис. 15 показана зависимость первой собственной частоты колебаний от внутреннего радиуса R_- при различных значениях параметра неоднородности n , внешний радиус при этом остается постоянным и равняется $R_+ = 5$. Длина цилиндра выбиралась равной $L = 5$. Количество полуволн в окружном направлении имеет следующее значение: $m = 1$.

Проведем исследование влияния связанного электрического поля и фактора неоднородности электрического поля на значения собственных частот колебаний цилиндра с окружной поляризацией. Для определения влияния фактора неоднородности проведем сравнение значений частот для неоднородного цилиндра и однородного с осредненными характеристиками, вычисленными применением теории эффективных модулей для случая, когда модули меняются по экспоненциальному закону (3.30).

В табл. 4 приведены значения первых пяти частот свободных колебаний неоднородного пьезокерамического цилиндра и проведено сравнение с приближенными значениями собственных частот для однородного цилиндра, упругие модули которого оп-

ределены с помощью применения формул теории эффективных модулей. Также проводится сравнение с собственными частотами неоднородного цилиндра при отсутствии связанного электрического поля. Расчеты проводились при следующих параметрах: $L = 5$, $R_+ = 5$, $R_- = 2$, $n = 1,0$, $m = 1$, материал цилиндра пьезокерамика- PZT 4.

Таблица 4

№ частоты	Неоднородный цилиндр	Цилиндр из осредненного однородного материала	Относительная погрешность, %	Без учёта связанного электрического поля	Относительная погрешность %
1	1,22	1,22	0	1,16	4,9
2	1,30	1,28	1,5	1,26	3,1
3	1,49	1,56	4,7	1,42	4,7
4	1,90	1,82	4,2	1,63	14,2
5	2,01	2,05	2,0	1,83	9,0

Как можно видеть из приведенной таблицы, относительная погрешность при пренебрежении фактора неоднородности для данной задачи значительно меньше, чем погрешность, которая возникает при пренебрежении связанного электрического поля. Так, при пренебрежении фактором неоднородной 47 структуры цилиндра, наибольшая погрешность для приведенных пяти собственных первых частот возникает на третьей частоте и составляет 4,7 %. Для случая, когда пренебрегаем связанным электрическим полем, погрешность на отмеченных выше частотах будет значительно больше и составляет 14,2% для второй собственной частоты.

§4. Неосесимметричные электроупругие волны в слоистых по толщине полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями.

Пьезокерамические волноводы в виде неоднородного кругового цилиндра находят широкое применение в акустоэлектронике, что свидетельствует об актуальности исследования волновых процессов, происходящих в пьезокерамических телах. Отметим широкий спектр публикаций, где изучались волновые процессы в однородном пьезокерамическом цилиндрическом волноводе [11, 71, 75, 76, 81, 83 – 85, 88, 90 и др.]. Учет неоднородности материала цилиндра существенно усложняет процесс исследования отмеченной выше проблемы, отметим единичные исследования [3, 4, 14, 15, 23, 42, 46, 67 – 71, 79, 80]. Для слоистых цилиндров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условиям сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. Также в настоящее время все более широкое применение имеют так называемые функционально-градиентные пьезоэлектрические материалы, сочетающие преимущества биморфов и лишенные проблемной зоны – поверхности соединения материалов с различными коэффициентами температурного расширения.

В данном параграфе рассмотрены неосесимметричные задачи о распространении электроупругих волн в неоднородных по толщине полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в разных направлениях на основе пространственной теории электроупругости [10, 26, 94].

Основные соотношения. Разрешающая система уравнений.

Полная система уравнений, которая описывает поставленную задачу приведена в §3 (3.1) – (3.6). В случае кусочно неоднородной структуры цилиндрического волновода (слоистый материал) эти соотношения для i -го слоя имеют вид:

уравнения движения для i -го слоя

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^i = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta}^i \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta^i = 0; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial \theta} + \sigma_{rz}^i \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z^i = 0;$$

уравнения электростатики для i -го слоя

$$\begin{aligned} E_r^i &= -\frac{\partial \varphi^i}{\partial r}; \quad E_\theta^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \theta}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r^i + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Геометрические соотношения для i -го слоя

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{r\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r}; \\ 2\varepsilon_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\theta z}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Физические соотношения для i -го пьезокерамического слоя осевая поляризация

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{11}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i; \quad \sigma_{\theta\theta}^i = c_{12}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{33}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_z^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{15}^i E_r^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{\theta z}^i - e_{15}^i E_\theta^i; \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2c_{66}^i \varepsilon_{r\theta}^i; \quad D_z^i = e_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{33}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i; \\ D_r^i &= 2e_{15}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{11}^i E_r^i; \quad D_z^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_\theta^i; \end{aligned} \quad (4.4)$$

радиальная поляризация

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_r^i; \quad \sigma_{zz}^i = c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_r^i; \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{r\theta}^i - e_{15}^i E_\theta^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{15}^i E_z^i; \\ \sigma_{\theta z}^i &= 2c_{66}^i \varepsilon_{\theta z}^i; \quad D_r^i = e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{13}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \\ D_\theta^i &= 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_\theta^i; \quad D_z^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{11}^i E_z^i; \end{aligned} \quad (4.5)$$

окружная поляризация

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{11}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_\theta^i; \quad \sigma_{\theta\theta}^i = c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{33}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_\theta^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{12}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_\theta^i; \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{r\theta}^i - e_{15}^i E_r^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{\theta z}^i - e_{15}^i E_z^i; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{rz}^i = 2c_{66}^i \varepsilon_{rz}^i; D_{\theta}^i = e_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{33}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{13}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_{\theta}^i;$$

$$D_r^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{r\theta}^i + \varepsilon_{11}^i E_r^i; D_z^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_z^i.$$

Физические соотношения для i -го проводящего слоя волновода

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i, \sigma_{r\theta}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{r\theta}^i, \sigma_{\theta z}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{\theta z}^i. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В последующем индекс i не будем писать.

Рассмотрим случай, когда внутренняя и внешняя поверхности цилиндра свободны от механических напряжений

$$\sigma_{rr}(R_0 \pm h, \theta, z) = 0; \sigma_{r\theta}(R_0 \pm h, \theta, z) = 0; \sigma_{rz}(R_0 \pm h, \theta, z) = 0, \quad (4.8)$$

для электрических составляющих возможны два случая:
поверхности свободны от электродов

$$D_r(R_0 \pm h, \theta, z) = 0; \quad (4.9)$$

поверхности покрыты тонкими закороченными электродами

$$\varphi(R_0 \pm h, \theta, z) = 0. \quad (4.10)$$

В представленной статье изучается случай жесткого контакта соседних слоев цилиндра, т.е. имеют место условия совместной работы i -го и $(i+1)$ -го слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля

$$\sigma_{rr}^i = \sigma_{rr}^{i+1}; \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{r\theta}^{i+1}; \sigma_{rz}^i = \sigma_{rz}^{i+1}; u_r^i = u_r^{i+1}; u_{\theta}^i = u_{\theta}^{i+1}; u_z^i = u_z^{i+1}. \quad (4.11)$$

Для электрических величин, которые входят в основные соотношения условия контакта соседних слоев цилиндра зависят от вида их материала.

Компонентами разрешающего вектора выбираем величины, которые входят в граничные условия на боковой поверхности цилиндра и контакта слоев

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_{\theta}, u_z, D_r\}. \quad (4.12)$$

Разрешающие системы уравнений относительно неизвестного вектор-функции (4.12) для различных видов предварительной поляризации пьезокерамического цилиндра будут иметь следующий вид:

осевая поляризация

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_s}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\Delta_4}{c_{11}} + c_{66} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_1}{r c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{c_{12}}{r c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \left(\frac{\Delta_5}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\
& - \left(\frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta - \left(\frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z}; \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \left(\frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi - \frac{\Delta_1}{r c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\
& - \left(\frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \left(\frac{c_{55}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{r c_{11}} u_r - \frac{c_{12}}{r c_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{c_{66}} \sigma_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{e_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \left(\frac{e_{11}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} \varphi - \frac{\Delta_5}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\
& + \left(\frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} u_z - \left(\frac{\Delta_5}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} D_r.
\end{aligned}$$

Граничные условия для соответствующей системы уравнений (4.13) имеют вид

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r} &= 0; \quad c_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} + c_{55} \frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad \varphi = 0, \quad (4.14)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = c_{55} e_{11} + e_{15}^2; \quad \Delta_1 = c_{13} (c_{11} - c_{12}); \quad \Delta_2 = c_{13}^2 e_{33} - c_{11} c_{33};$$

$$\Delta_3 = c_{13} e_{13} - c_{11} e_{33}; \quad \Delta_4 = c_{11}^2 - c_{12}^2; \quad \Delta_5 = e_{13} (c_{11} - c_{12}); \quad \Delta_6 = c_{13} e_{33} + e_{13}^2.$$

Радиальная поляризация

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{r \Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\Delta_6}{r^2 \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \left(\frac{\Delta_6}{r^2 \Delta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} \frac{\partial D_r}{\partial \theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r\Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \\
&\quad - \left(\frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r\Delta} u_r - \frac{\Delta_1}{r\Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r\Delta} u_r + \frac{\Delta_2}{r\Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{r\theta} + \frac{e_{51}}{rc_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} + \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} \varphi - \frac{1}{r} D_r.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Граничные условия для соответствующей системы уравнений (4.15) имеют вид

$$\begin{aligned}
c_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0; \\
c_{55} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r} \right) + e_{15} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 0; \\
c_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} + c_{55} \frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0; \quad \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= c_{33} e_{33} + e_{33}^2; \quad \Delta_1 = c_{33} e_{13} - c_{13} e_{33}; \quad \Delta_2 = c_{13} e_{33} + e_{13} e_{33}; \\
\Delta_3 &= (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{11}) \Delta; \\
\Delta_4 &= (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{12}) \Delta; \quad \Delta_5 = c_{12} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; \\
\Delta_6 &= c_{11} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; \quad \Delta_7 = c_{55} e_{11} + e_{15}^2.
\end{aligned}$$

Круговая поляризация

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{c_{13}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \left(\frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_4}{r\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{c_{13}}{rc_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \left(e_{15} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi + \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\
&\quad - \left(\frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta - \left(\frac{\Delta_3}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} = & \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \left(\frac{\Delta_6}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} + \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\ & - \left(\frac{\Delta_3}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \left(\frac{c_{55}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_7}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{r\theta} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} + \frac{e_{13}}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{c_{13}}{rc_{11}} u_r + \frac{c_{13}}{rc_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta + \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{c_{66}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_r}{\partial r} = & - \frac{e_{15}}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} + \left(\frac{\Delta_8}{c_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi + \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ & + \left(\frac{\Delta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - e_{15} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_\theta - \left(\frac{\Delta_6}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} D_r. \end{aligned}$$

Граничные условия для соответствующей системы уравнений (4.17) имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{13} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + c_{12} \frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{13} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0; \\ c_{55} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0; \quad \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$\Delta_1 = c_{13} e_{13} - c_{11} e_{33}; \quad \Delta_2 = c_{11} c_{33} - c_{13}^2; \quad \Delta_3 = (c_{11} - c_{12}) c_{13}; \quad \Delta_4 = (c_{11} - c_{13}) e_{13};$$

$$\Delta_5 = c_{11} e_{33} - c_{13} e_{13}; \quad \Delta_6 = (c_{11} - c_{12}) e_{13}; \quad \Delta_7 = c_{11}^2 - c_{12}^2; \quad \Delta_8 = c_{11} e_{33} + e_{13}^2.$$

Метод решения.

На первом этапе решения задач применяем метод разделения переменных. Соответствующие компоненты разрешающего вектора решений представим в виде бегущих волн в осевом направлении и стоячих волн в окружном направлении.

Случай осевой поляризации

$$\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) = \lambda \sigma_{rr}(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = \lambda \sigma_{r\theta}(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t);$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) = \lambda \sigma_{rz}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t);$$

$$\varphi(r, \theta, z, t) = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad (4.19)$$

$$u_r(r, \theta, z, t) = hu_r(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \quad u_\theta(r, \theta, z, t) = hu_\theta(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t);$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = hu_z(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad D_r(r, \theta, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t).$$

Случай радиальной поляризации

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); & \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{r\theta}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \\
\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{rz}(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \\
\varphi(r, \theta, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t);
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta, z, t) &= hu_r(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); & u_\theta(r, \theta, z, t) &= hu_\theta(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\
u_z(r, \theta, z, t) &= hu_z(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); & D_r(r, \theta, z, t) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t).
\end{aligned}$$

Случай окружной поляризации

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); & \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{r\theta}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\
\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) &= \lambda \sigma_{rz}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \\
\varphi(r, \theta, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t);
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta, z, t) &= hu_r(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); & u_\theta(r, \theta, z, t) &= hu_\theta(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\
u_z(r, \theta, z, t) &= hu_z(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); & D_r(r, \theta, z, t) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t).
\end{aligned}$$

Представления решений для неизвестных функций в виде (4.19) – (4.21) дает возможность перейти от трехмерной задачи электроупругости к краевым задачам на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = A(x, \Omega)\mathbf{R}. \tag{4.22}$$

Если ввести обозначения: $\lambda_1 = -\frac{\tilde{x}^2 \Delta_4}{c_{11}}$; $\lambda_2 = \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_4}{c_{11}} + k^2 c_{55}$; $\lambda_3 = m^2 \tilde{x}^2 c_{55} - \frac{k^2 \Delta_2}{c_{11}}$,

матрица \mathbf{A} для случая осевой поляризации будет иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cccccccc}
\tilde{x} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{11} \end{pmatrix} - 1 & m\tilde{x} & k & \frac{k\tilde{x}\Delta_5}{c_{11}} & \lambda_1 - \Omega^2 & -\frac{\Delta_4}{c_{11}} m\tilde{x}^2 & -\frac{k\tilde{x}\Delta_1}{c_{11}} & 0 \\
-\frac{m\tilde{x}c_{12}}{c_{11}} & -2\tilde{x} & 0 & \left(\frac{\Delta_5}{c_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) m\tilde{x} & \frac{m\tilde{x}^2 \Delta_2}{c_{11}} & \lambda_2 - \Omega^2 & mk\tilde{x} \left(\frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) & 0 \\
-\frac{kc_{13}}{c_{11}} & 0 & -\tilde{x} & m^2 \tilde{x}^2 \tilde{e}_{15} - k^2 \frac{\Delta_3}{c_{11}} & -\frac{k\tilde{x}\Delta_1}{c_{11}} & mk\tilde{x} \left(\frac{\Delta_1}{c_{11}} + c_{55} \right) & \lambda_3 - \Omega^2 & 0 \\
\frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta} \\
\frac{1}{\tilde{c}_{11}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{x}\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} & \frac{m\tilde{x}\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} & \frac{k\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\
0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 & 0 & -m\tilde{x} & \tilde{x} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta} & 0 & -k & 0 & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \\
-\frac{k\tilde{c}_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & -m^2 \tilde{x}^2 \tilde{e}_{11} - \frac{k^2 \Delta_6}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{k\tilde{x}\Delta_5}{c_{11}} & \left(\tilde{e}_{15} + \frac{\Delta_5}{\tilde{c}_{11}} \right) m\tilde{x} & m^2 \tilde{x}^2 \tilde{e}_{15} - \frac{k^2 \Delta_3}{\tilde{c}_{11}} & -\tilde{x}
\end{array} \right\|.$$

Если ввести обозначения: $\lambda_1 = -\frac{\tilde{x}^2 \Delta_3}{\Delta}$; $\lambda_2 = \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_6}{\Delta} + k^2 c_{66}$; $\lambda_3 = m^2 \tilde{x}^2 c_{66} + \frac{k^2 \Delta_6}{\Delta}$,

матрица \mathbf{A} для случая радиальной поляризации будет иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \tilde{x} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) & m\tilde{x} & k & 0 & \lambda_1 - \Omega^2 & \frac{m\tilde{x}^2 \Delta_3}{\Delta} & \frac{k\tilde{x} \Delta_4}{\Delta} & -\frac{\tilde{x} \Delta_1}{\Delta} \\ -\frac{m\tilde{x} \Delta_2}{\Delta} & -2\tilde{x} & 0 & 0 & -\frac{m\tilde{x}^2 \Delta_6}{\Delta} & \lambda_2 - \Omega^2 & mk\tilde{x} \left(\frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right) & \frac{m\tilde{x} \Delta_1}{\Delta} \\ -\frac{k \Delta_2}{\Delta} & 0 & -\tilde{x} & 0 & -\frac{k\tilde{x} \Delta_5}{\Delta} & mk\tilde{x} \left(\frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right) & \lambda_3 - \Omega^2 & \frac{k \Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \frac{\tilde{x} \Delta_1}{\Delta} & -\frac{m\tilde{x} \Delta_1}{\Delta} & -\frac{k \Delta_1}{\Delta} & -\frac{\tilde{c}_{33}}{\Delta} \\ \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{x} \Delta_2}{\Delta} & \frac{m\tilde{x} \Delta_2}{\Delta} & \frac{k \Delta_2}{\Delta} & \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \\ 0 & \frac{1}{c_{55}} & 0 & -\frac{m\tilde{x} e_{15}}{c_{55}} & -m\tilde{x} & \tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{55}} & -\frac{k \tilde{e}_{51}}{\tilde{c}_{55}} & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\tilde{x} \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} & \frac{k \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} & -(m^2 \tilde{x}^2 + k^2) \frac{\Delta_7}{\tilde{c}_{55}} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{x} \end{array} \right\|.$$

Если ввести обозначения: $\lambda_1 = \frac{\tilde{x}^2 \Delta_2}{\tilde{c}_{11}}$; $\lambda_2 = \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_2}{\tilde{c}_{11}} + k^2 \tilde{c}_{55}$; $\lambda_3 = m^2 \tilde{x}^2 \tilde{c}_{55} + \frac{k^2 \Delta_7}{\tilde{c}_{11}}$,

матрица \mathbf{A} для случая окружной поляризации будет иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \tilde{x} \left(\frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right) & m\tilde{x} & k & -\frac{m\tilde{x}^2 \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} & \lambda_1 - \Omega^2 & -\frac{m\tilde{x}^2 \Delta_2}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{k\tilde{x} \Delta_3}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\ -\frac{m\tilde{x} \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -2\tilde{x} & 0 & k^2 \tilde{e}_{15} - \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{m\tilde{x}^2 \Delta_2}{\tilde{c}_{11}} & \lambda_2 - \Omega^2 & \left(\frac{\Delta_3}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{c}_{55} \right) mk\tilde{x} & 0 \\ -\frac{k \tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} & 0 & -\tilde{x} & -\left(\frac{\Delta_6}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) mk\tilde{x} & -\frac{k\tilde{x} \Delta_3}{\tilde{c}_{11}} & \left(\frac{\Delta_3}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{c}_{55} \right) mk\tilde{x} & \lambda_3 - \Omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta} \\ \frac{1}{\tilde{c}_{11}} & 0 & 0 & \frac{m\tilde{x} \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\tilde{x} c_{13}}{\tilde{c}_{11}} & \frac{m\tilde{x} \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{k c_{12}}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta} & 0 & 0 & -m\tilde{x} & \tilde{x} & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{66}} & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m\tilde{x} \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 & 0 & -\left(\frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_8}{\tilde{c}_{11}} + k^2 \tilde{e}_{11} \right) & -\frac{m\tilde{x}^2 \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} & k^2 \tilde{e}_{15} - \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_1}{\tilde{c}_{11}} & -\left(\frac{\Delta_6}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) mk\tilde{x} & -\tilde{x} \end{array} \right\|.$$

Граничные однородные условия имеют вид

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = 0; \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = 0, \quad (4.23)$$

где матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 равняются:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Краевая задача на собственные значения (4.23), (4.24) решалась устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Анализ численных результатов определения характеристик распространения электроупругих волн в слоистом пьезокерамическом цилиндре со слоями, поляризованными в осевом направлении.

Ниже представим результаты численного анализа. Цилиндр состоит из трех слоев. Толщины внешних слоев равны $h/2$; толщина внутреннего слоя равна h . Внешний и внутренний слои – стальные со следующими характеристиками: $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,28$; $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 имеет следующие характеристики:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2; \quad e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2;$$

$$e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2; \quad \varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 730; \quad \varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 635; \quad \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Здесь для кривых введены обозначения, принятые в работе [90]. При $\varepsilon = 0$ и $k = 0$ приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Так, для однослойного цилиндра из металла имеем следующие формулы для частот:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_m}} = 0; 2,905; 5,81; \dots; n = 0, 1, 2 \dots;$$

$$V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_m}} = 0; 1,606; 3,211; \dots; n = 0, 1, 2 \dots$$

Для однослойного цилиндра из пьезокерамики PZT 4

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{c_{11}/\rho_i} = 0; 2,138; 4,277; \dots; n = 0, 1, 2 \dots; \quad W(2n+1) = 0,925; 2,859; \dots;$$

$$W(2n) = \pi n \sqrt{(c_{55} + e_{15}^2/\varepsilon_{11})/\rho_n} = 0; 1,913; 3,826; \dots; n = 0, 1, 2 \dots;$$

$$V(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{c_{66}/\rho_n} = 0; 1,003; 2,007; \dots; n = 0, 1, 2 \dots$$

Поскольку частота слоистого цилиндра ограничена сверху соответствующей частотой для сплошного металлического цилиндра, а снизу – частотой для сплошного пьезокерамического цилиндра, для слоистого цилиндра будем использовать аналогичные обозначения.

Ниже числовые результаты представлены в виде графиков и таблиц. На рис. 16 сплошными линиями показаны ветви дисперсионных соотношений для слоистого

цилиндра, пунктирными – для однородного цилиндра такой же геометрии из пьезокерамики PZT 4. Из приведенного рисунка видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к «ужесточению» материала, т. е. к повышению значений собственных частот.

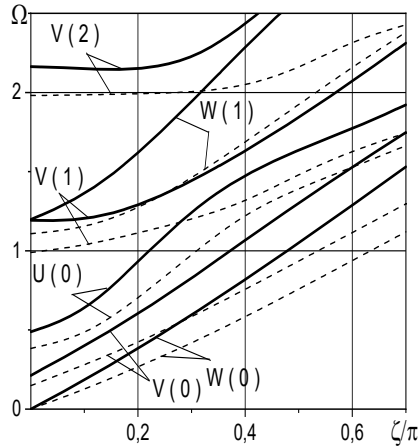


Рис. 16

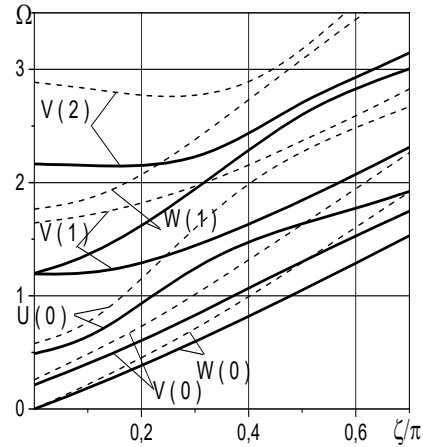


Рис. 17

На рис. 17 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа $\zeta = kh/\pi$. Сплошными линиями также обозначены ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, а пунктирной – для однослойного стального цилиндра. Как видно из приведенного рисунка, в этом случае значения собственных частот для слоистого цилиндра меньше соответствующих частот для стального цилиндра. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого шара лежит в «коридоре» между собственной частотой для однослойного цилиндра из пьезокерамики и частотой для однослойного цилиндра из стали. Это иллюстрирует рис. 18. Здесь сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики, штрихпунктирной – для цилиндра из стали (материал и геометрия цилиндра соответствует данным, принятым ранее).

На рис. 19 представлена также зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения $m = 1$. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики PZT 4.

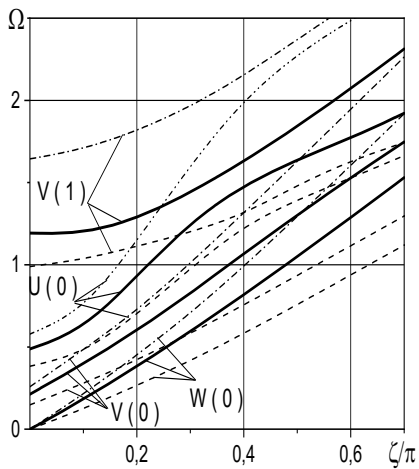


Рис. 18

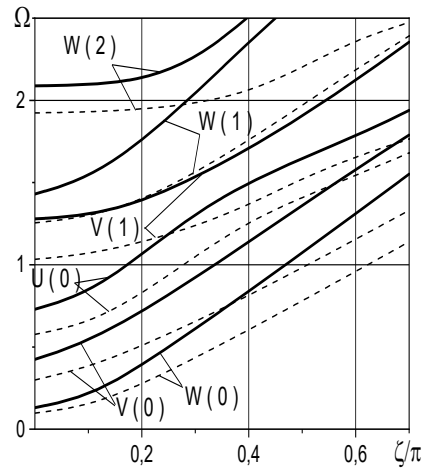


Рис. 19

На рис. 20 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения $m = 2$. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из стали.

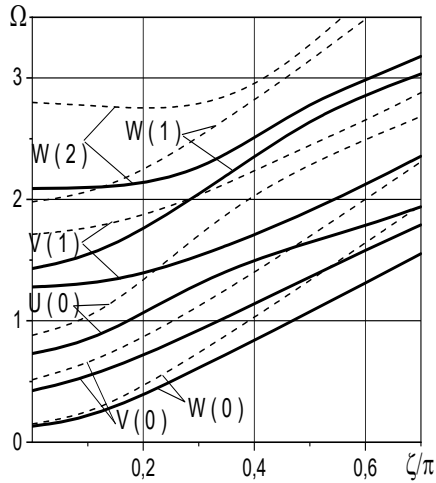


Рис. 20

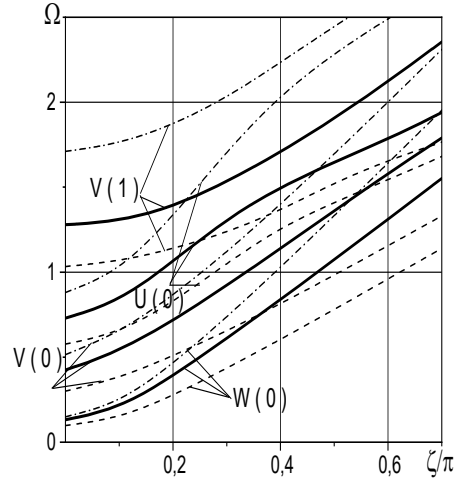


Рис. 21

На рис. 21 выполнено совмещение данных рис. 20 и 21 для первых четырех частот.

Анализ численных результатов определения характеристик распространения электроупругих волн в слоистом пьезокерамическом цилиндре со слоями, поляризованными в радиальном направлении.

Ниже приведены результаты численного анализа. На рис. 22 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа $\zeta = kh / \pi$ (при этом значение $m = 1$, $\varepsilon = 0,25$). Принято, что цилиндр состоит из трех слоев. Толщины внешних слоев равны по $h/2$, а толщина внутреннего слоя равна h . Материал внешних слоев – сталь с характеристиками: $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,28$; $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 с характеристиками:

$$c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2; \quad e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2;$$

$$e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2; \quad \varepsilon_{11} = 730;$$

$$\varepsilon_{33} = 635; \quad \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Для кривых введены обозначения, принятые в работе [91]. При $\varepsilon = 0$ и $k = 0$ приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Так, для однослойного цилиндра из металла имеем следующие формулы для частот:

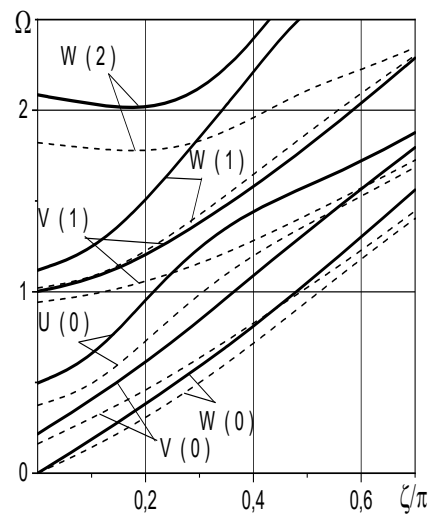


Рис. 22

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_m}} = 0; 2,905; 5,81; \dots; n=0, 1, 2, \dots;$$

$$V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_m}} = 0; 1,606; 3,211; \dots; n=0, 1, 2 \dots$$

Для однослойного цилиндра из пьезокерамики PZT 4 имеем равенства

$$U(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \left(c_{11} + \frac{e_{11}^2}{\varepsilon_{11}} \right)} = 0; 4,325; 8,649; \dots; n=0, 1, 2 \dots;$$

$$U(2n+1) = 1,995; 6,729; \dots; V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho_n}} = 0; 0,918; 1,835; \dots; n=0, 1, 2 \dots$$

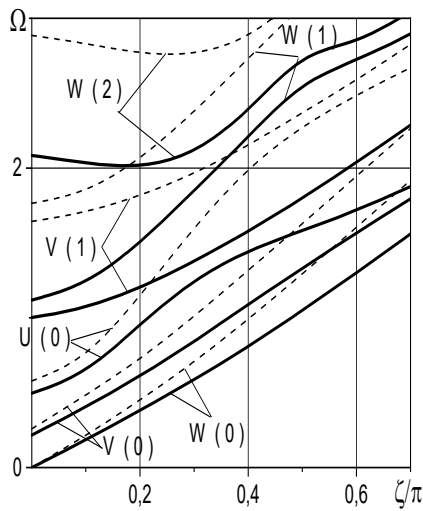


Рис. 23

Поскольку частота слоистого цилиндра ограничена сверху соответствующей частотой для сплошного металлического цилиндра, а снизу – частотой для сплошного пьезокерамического цилиндра, то для слоистого цилиндра будем использовать аналогичные обозначения. На рис. 22 сплошными линиями показаны ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного цилиндра такой же геометрии из пьезокерамики PZT 4. Из приведенного рисунка видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к «ужесточению» материала, т. е. повышению значения собственных частот. При этом различие в первой собственной частоте для слоистого и однослойного цилиндров незначительно. Для более высоких частот – различие более существенное.

На рис. 23 представлена зависимость первых шести частот от волнового числа $\zeta = kh / \pi$; сплошными линиями также обозначены ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, а пунктирной – для однослойного стального цилиндра. Как видно, в этом случае значения собственных частот для слоистого цилиндра меньше соответствующих частот для стального цилиндра. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого цилиндра лежит в некоем «коридоре» между собственной частотой для однослойного цилиндра из пьезокерамики и частотой для однослойного цилиндра из стали. Это иллюстрирует рис. 24. Здесь сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики, штрихпунктирной – для цилиндра из стали. Материал и геометрия цилиндра соответствует данным, принятым ранее.

На рис. 25 представлена также зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения $m = 2$. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики PZT 4.

На рис. 26 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения $m = 2$. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из стали.

На рис. 27 выполнено совмещение данных рис. 25 и 26 для первых четырех частот.

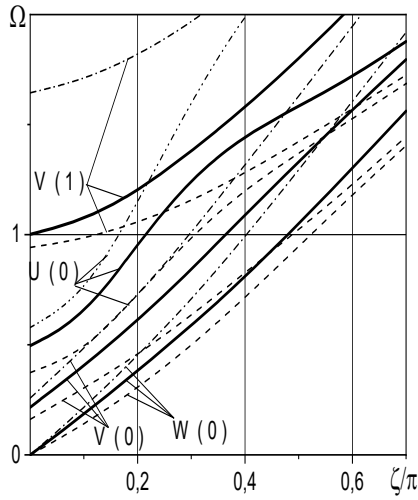


Рис. 24

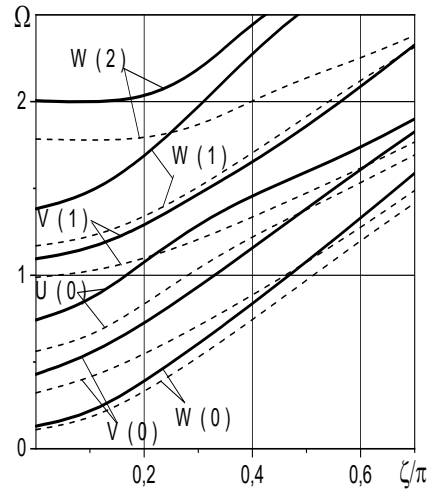


Рис. 25

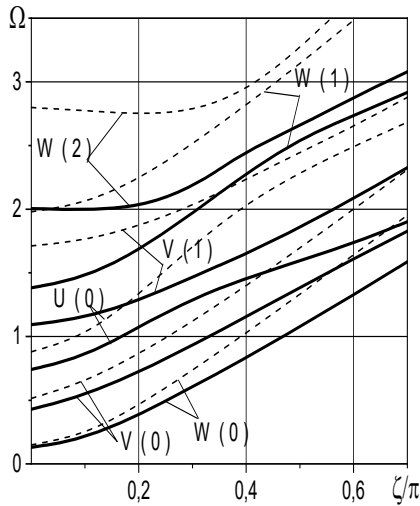


Рис. 26

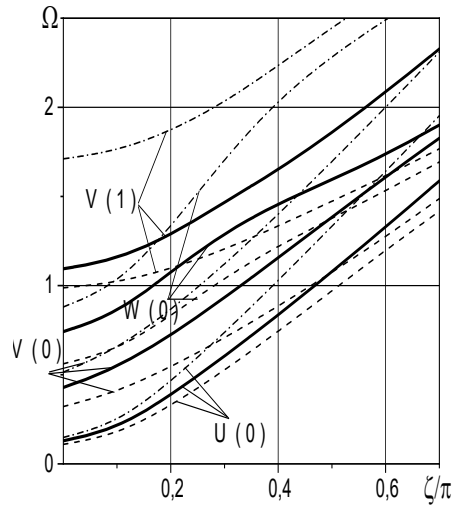


Рис. 27

Как известно, краевая задача (4.22), (4.23) математически эквивалентна задаче о свободных неосесимметричных колебаниях слоистого цилиндра с шарнирным опиранием на торцах. Рассмотрим трехслойный цилиндр со слоями, аналогичными рассмотренному выше цилиндру (с внутренним радиусом $R_{\text{внутр.}} = 3$, внешним — $R_{\text{внешн.}} = 5$ и длиной — $L = 10$ безразмерных единиц). При таком выборе геометрических характеристик, значение $\varepsilon = h/R_0 = 0,25$ совпадает со значениями, принятыми для расчетов в предыдущей задаче, результаты решения которой приведены на рис. 1 — 6. Кроме того, необходимо провести аналогичные исследования для значений $m = 0, m = 1, m = 2, \dots$

Анализ частотного спектра показывает, что для определения первых пяти собственных частот достаточно четырех первых значений m : $m = 0, m = 1, m = 2$ и $m = 3$. Результаты проведенных исследований представлены на рис. 7 — 10 для соответствующих значений m (сплошной линией обозначены дисперсионные кривые для неоднородного цилиндра, а пунктирной — для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4).

Видно, что соответствующие частоты будут лежать на пересечении соответствующих дисперсионных ветвей и значений $\zeta = 0, 1; 0, 2; 0, 3 \dots$; следует их лишь расположить в порядке возрастания. В табл. 5 представлены числовые значения первых пяти частот для случая трехслойного цилиндра (Вариант 1) и однородного пьезокерамического цилиндра (Вариант 2). Показано также число полуволн (m) в окружном направлении и число полуволн в осевом направлении (k), а также – к какой относительной погрешности (Δ) при вычислении собственных частот приведет игнорирование неоднородности.

Таблица 5

№ ω_i	Вариант 1	m	k	Вариант 2	m	k	$\Delta, \%$
1	0,1824	1	1	0,1368	1	1	25
2	0,1965	2	1	0,1645	2	1	16,3
3	0,2713	0	1	0,2007	0	1	26
4	0,3332	0	1	0,2487	0	1	25,4
5	0,3467	3	1	0,3023	1	1	12,8

Как видно из табл. 5, первая собственная частота не является собственной частотой осесимметричных колебаний. Только лишь третья и четвертая собственные частоты являются частотами осесимметричных колебаний. При этом третья частота является частотой продольных колебаний, а четвертая – частотой крутильных колебаний. Собственные частоты, полученные в данной работе для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4, полностью совпадают с данными, полученными на основании подхода, разработанного в работе [76]. Естественно, что объем работ при этом совершенно разный. Однако, на основании анализа, проведенного в данной работе, кроме значений собственных частот, получена также информация о формах колебаний.

Анализ численных результатов определения характеристик распространения электроупругих волн в слоистом пьезокерамическом цилиндре со слоями, поляризованными в круговом направлении.

Рассмотрим полый цилиндр, который состоит из трех слоев. Толщины внешних слоев равны $h/2$; толщина внутреннего слоя равна h . Материал внешнего и внутреннего слоя – сталь со следующими характеристиками: $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0,28$; $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2$.

Внутренний слой волновода – пьезокерамика PZT 4 имеет характеристики и поляризована в окружном направлении

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2; e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2;$$

$$e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2; \varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 730; \varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 635; \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2.$$

При $\varepsilon = 0$ и $k = 0$ приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Для однородного пьезокерамического слоя собственные частоты определяются по формулам:

$$U(2n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_n}} = 0; 2,138; 4,277; \dots \quad n = 0, 1, 2 \dots;$$

$$V(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \left(c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}} \right)} = 2,580; 5,159; \dots;$$

$$V(2n-1) = \lambda_n \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \left(c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} \right)} = 0,962; 3,782; \dots;$$

$$W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho_n}} = 0; 1,003; 2,007; \dots, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Здесь λ_n – ненулевые корни уравнения $\lambda \cos \lambda - \frac{e_{15}^2}{e_{15}^2 + c_{55}\epsilon_{11}} \sin \lambda = 0$.

На рис. 28 сплошными линиями обозначены ветви дисперсионных кривых для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного аналогичной геометрии и материала PZT 4. Параметр кривизны $\varepsilon = h/R_0 = 0,25$, число полувольт в окружном направлении равняется 1.

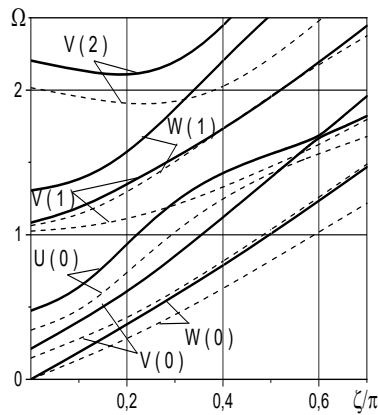


Рис. 28

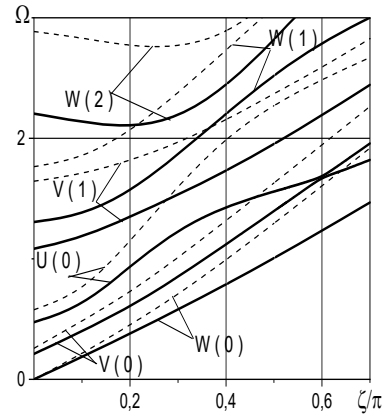


Рис. 29

На рис. 29 сплошными линиями обозначены ветви дисперсионных кривых для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного аналогичной геометрии и металлического материала (сталь с параметрами $E = 21 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu = 0,28$; $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м²). В этом случае значения собственных частот для слоистого цилиндра меньше соответствующих частот для цилиндра, материалом которого является металл. Можно заметить, что значение частот собственных колебаний слоистого цилиндра находятся в интервале между значениями собственных частот для однородного цилиндра из пьезокерамического материала и однородного цилиндра из металла.

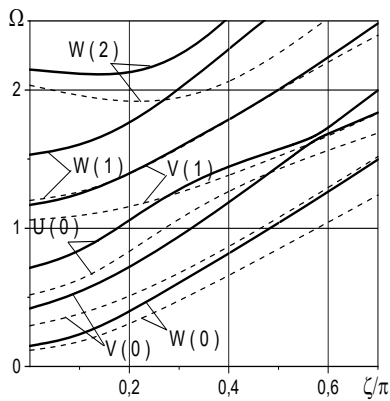


Рис. 30

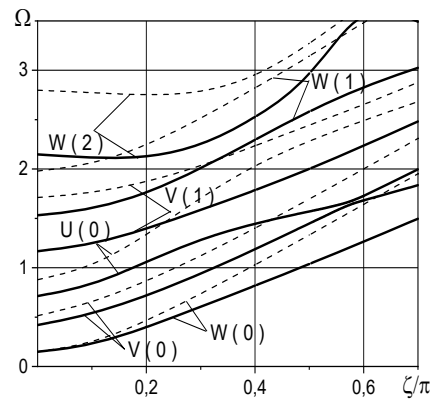


Рис. 31

На рис. 30 сплошными линиями обозначены ветви дисперсионных кривых для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного аналогичной геометрии и материала PZT 4 для $m = 2$. На рис. 31 для такого же значения числа полуволн сплошными линиями обозначены ветви дисперсионных кривых для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного аналогичной геометрии и металлического материала

§5. Осесимметричные акустоэлектрические волны в полом цилиндре из непрерывно неоднородного пьезоэлектрического материала.

В настоящее время все более широкое применение имеют так называемые функционально-градиентные пьезоэлектрические материалы, сочетающие преимущества биморфов и лишенные проблемной зоны – поверхности соединения материалов с различными коэффициентами температурного расширения. Попытка учесть непрерывно изменяющиеся свойства материала обуславливает тот факт, что физико-механические модули материала не являются постоянными величинами, а функциями по одной из координат [3, 4, 18 – 20, 23, 24, 47 и др.]. Это является серьезной проблемой эффективного успешного применения многих численных методов.

Здесь представлено решение задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в цилиндрическом волноводе из непрерывно неоднородного пьезокерамического материала на основе предложенного подхода [42], который был применен для решения задач в случае слоистого пьезокерамического цилиндрического волновода.

Основные соотношения. Постановка задачи.

Осесимметричные продольные уравнения движения волн в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0. \quad (5.1)$$

Уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u_r; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (5.3)$$

В (5.1) – (5.3) принято: σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; ω – круговая частота; u_i – компоненты вектора перемещений; D_i – компоненты вектора электрической индукции; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ – электростатический потенциал; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33} \varepsilon_{rr} + c_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz} - e_{33} E_r; & \sigma_{\theta\theta} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12} \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11} \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; & \sigma_{rz} &= 2c_{55} \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ D_r &= e_{33} \varepsilon_{rr} + e_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + e_{13} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33} E_r; & D_z &= 2e_{15} \varepsilon_{rz} + \varepsilon_{33} E_z, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала. Указанные выше компоненты являются функциями радиальной координаты.

Рассмотрим материал, состоящий из двух компонент – стали и пьезокерамики. Характеристики материала изменяются следующим образом по толщине:

$$P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p, \quad (5.5)$$

где $V(z)$ выражает объёмную долю керамики и определяется формулой:

$$V(r) = \left(\frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n. \quad (5.6)$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) примем следующими: поверхности свободны от внешних усилий: $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ и покрыты тонкими электродами, к которым подведена гармоническая разность потенциалов: $\varphi = \pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ (R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра).

Разрешающий вектор смешанного типа имеет вид

$$\mathbf{R} = \{ \sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r \}^T. \quad (5.7)$$

Разрешая систему (5.1) – (5.4) относительно вектора \mathbf{R} , после ряда преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{33}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_r - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} = -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r.$$

Методика решения краевых осесимметричных задач.

Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= i\lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad u_r(r, z, t) = i h u_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Используя представление (9), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных, можно свести к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R} \quad (5.10)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1; \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2, \quad (5.11)$$

где вектор $\mathbf{C}_1^T = \{0, 0, -V_0, 0, 0, 0\}$, вектор $\mathbf{C}_2^T = \{0, 0, +V_0, 0, 0, 0\}$.

Здесь введены безразмерные величины

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^0}{\lambda}; \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^0}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{\varepsilon_0}; x = \frac{r - R_0}{h},$$

где ρ – плотность материала цилиндра; R_0 – радиус срединной поверхности; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10}$ Н/м².

Решение задачи (5.8), (5.9) выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Анализ численных результатов.

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (5.10), (5.11). Выражение (5.6) представляет собой общую формулу для физико-химических характеристик материала; P_p , P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени объёмной доли керамики в формуле (5.6) может изменяться в пределах $0 \leq n < 1000$. При этом если $n = 0$, то структура является полностью металлической, если же $n = \infty$, то – пьезокерамической (рис. 32).

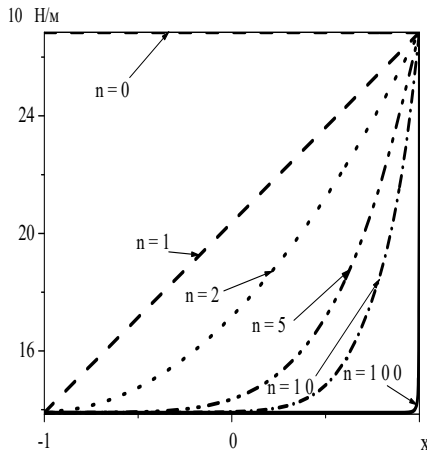


Рис. 32

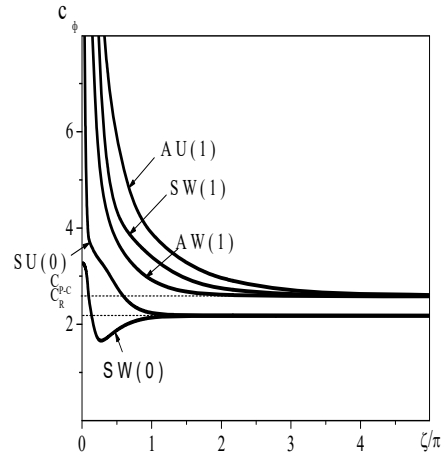


Рис. 33

Для случая однородной задачи (свободные движения) наблюдаются (как это было отмечено в работе [42]) качественные различия в дисперсионных соотношениях. Лучше это видно, если рассмотреть фазовые скорости распространяющихся волн. Так для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4 (рис. 33) первые две волны $SW(0)$ и $AU(0)$ в коротковолновом диапазоне выходят на поверхностную волну рэлеевского типа. Скорость этих волн меньше наименьшей из скоростей объемных волн в безграничном пространстве.

$$c_R < \min \left(\sqrt{c_{55}/\rho}; \sqrt{(c_{33} + e_{33}^2/\varepsilon_{33})/\rho} \right).$$

Ниже проведен детальный анализ распределения перемещений в данных волнах. На рисунках используются обозначения для волн, принятые в работе [91]. Маркиров-

ка $SW(0)$ означает, что волна рождается ($k = 0$) как симметричные продольные колебания (планарные колебания), $AU(0)$ – антисимметричные радиальные колебания. Остальные ветви в коротковолновом диапазоне довольно быстро выходят на волны, распространяющиеся без дисперсии, с постоянной скоростью, которая больше скорости поверхностных волн и меньше скоростей объемных волн в безграничном пространстве. Назовем эти волны – волнами Похгаммера – Кри [22, 86] (по аналогии с волнами Лэмба в пластине).

Для случая, когда материал цилиндра неоднородный наблюдается существенная перестройка спектра фазовых скоростей. Для значения параметра неоднородности $n = 5$ соответствующие фазовые скорости распространяющихся волн представлены на рис. 34. Из приведенного рисунка следует, что только первая ветвь выходит на бездисперсионную волну, а все остальные распространяются с существенной дисперсией.

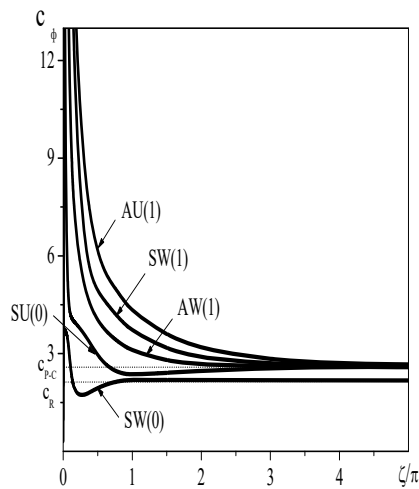


Рис. 34

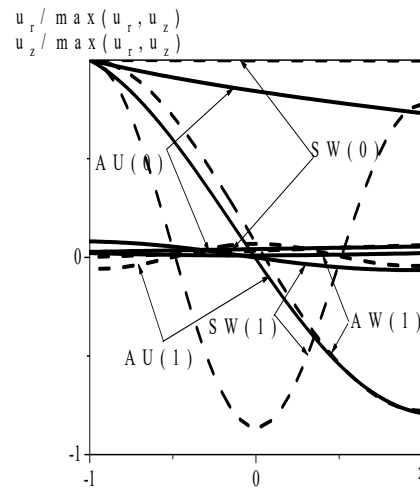


Рис. 35

На частотах записания ($\zeta = 0$) имеют место чисто упругие продольные колебания и связанные электроупругие радиальные колебания [7]. Анализ распределения амплитуд перемещений в бегущих волнах в непосредственной близости к частотам записания показывает, что движения сохраняют характер, принятый в обозначениях.

На рис. 35 представлены результаты численного анализа распределения амплитуд перемещений первых пяти ветвей для случая однородного цилиндра ($n = 1000$) ($\zeta = 0,01\pi$).

Исследуем влияние параметра неоднородности на распределение амплитуд перемещений. Влияние указанного параметра существенно зависит от частоты. Так, для первой ветви $SW(0)$ это влияние столь незначительно, что не может быть представлено графически. Перемещения в этой волне являются преимущественно продольными, что и отражено в обозначении этой ветки. На рис. 36 представлены результаты численного анализа влияния параметра неоднородности на распределение амплитуд перемещений для второй ветви $AU(0)$ ($\zeta = 0,01\pi$) для различных значений фактора неоднородности n . Сплошными линиями показаны амплитуды радиальных перемещений (u_r), пунктирными – продольных (u_z). Для этих волн характерно преобладание радиальных перемещений. Для ветвей $SW(0)$ и $AU(0)$ характерно практически линейное распределение амплитуд перемещений по толщине. На рис. 37 – 39 представлено влияние фактора неоднородности n на распределение амплитуд перемещений для ветвей $AW(1)$, $SW(1)$ и $AU(1)$, соответственно ($\zeta = 0,01\pi$).

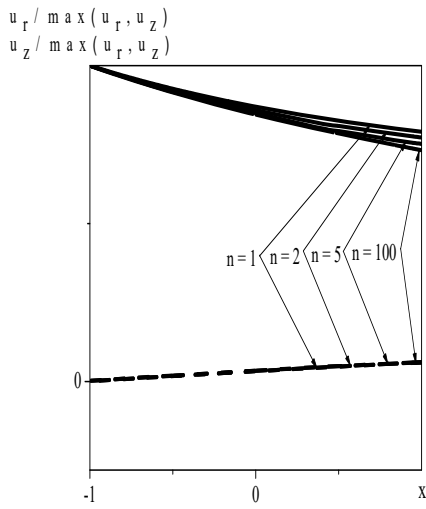


Рис. 36

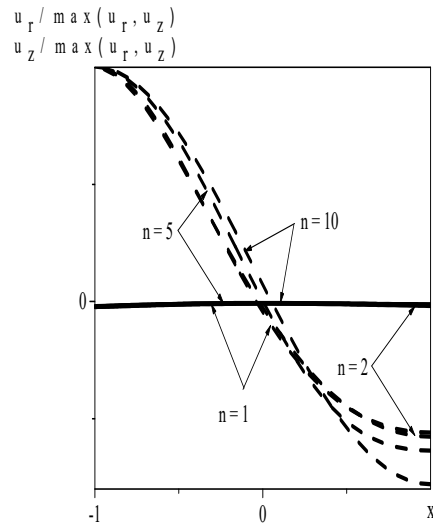


Рис. 37

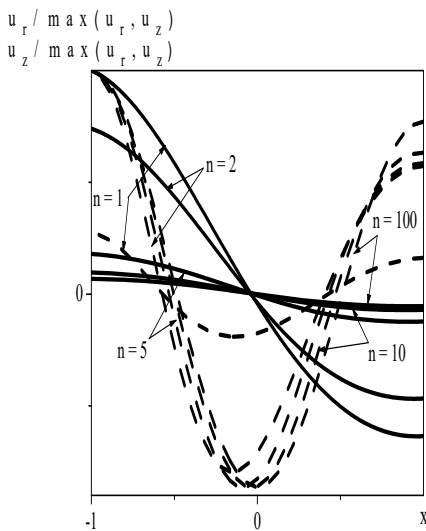


Рис. 38

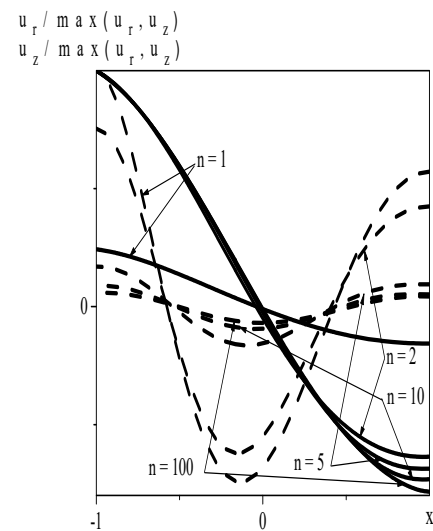


Рис. 39

Для ветвей $AW(1)$ и $SW(1)$ в случае однородного материала характерно преобладание продольных перемещений. С ростом частоты наблюдается увеличение числа полуволн на единицу. Для случая неоднородного материала для ветви $AW(1)$ (рис. 37) наблюдается незначительное влияние параметра неоднородности на характер распределения перемещений. Для ветви $SW(1)$ (рис. 38) можно отметить, что изменение параметра неоднородности приводит к значительным изменениям характера распределения перемещений. Для больших значений параметра n , т.е. когда материал цилиндра, в основном, состоит из пьезокерамики, преобладают осевые перемещения (так же, как в случае однородного пьезокерамического материала). С уменьшением параметра n , т.е. уменьшением объёмной доли пьезокерамики, перемещения становятся, преимущественно, радиальными.

Для ветви $AU(1)$ (рис. 39), для больших значений параметра неоднородности n характерно преобладание радиальных перемещений, что и отражено в обозначении ветви.

С уменьшением параметра неоднородности перемещения становятся преимущественно продольными. Можно отметить на основании анализа приведенных рисунков

тенденцию к смещению движений частиц цилиндра в сторону меньших значений модулей материала.

Рассмотрим, как происходит трансформация распределения перемещений по толщине при уменьшении длины волны. Для случая однородного материала (рис. 40), первая ветвь $SW(0)$ выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра. Вторая ветвь $AU(0)$ в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра (рис. 41, жирная линия).

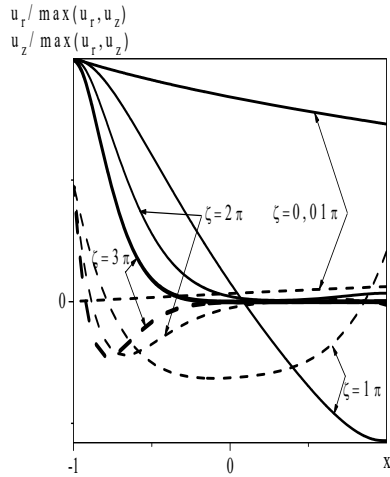


Рис. 40

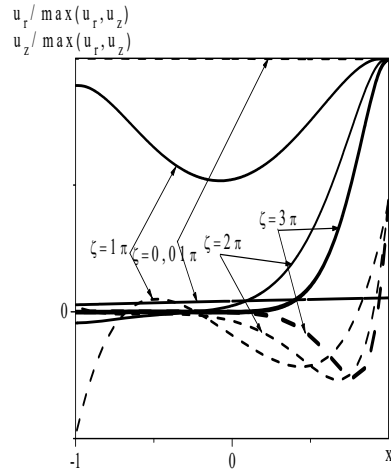


Рис. 41

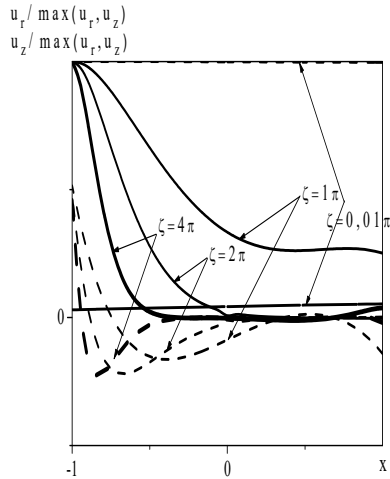


Рис. 42

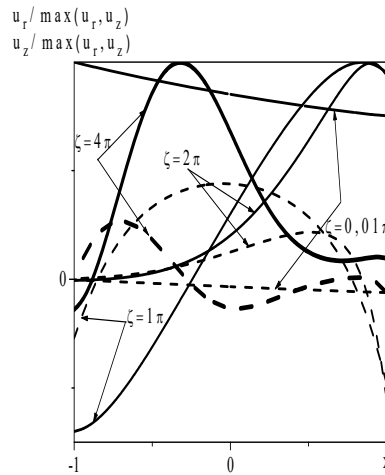


Рис. 43

В случае, когда материал цилиндра неоднородный (параметр неоднородности $n = 5$), наблюдаются качественные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. Как это отмечено выше, первая ветвь $SW(0)$ также выходит на поверхностную волну рэлеевского типа (рис. 42, жирная линия). Вторая ветвь $AU(0)$ уже не выходит на поверхностную волну рэлеевского типа (рис. 43).

Для следующих ветвей $AW(1)$ и $SW(1)$ (рис. 44 и рис. 45) в случае однородного материала наблюдается выход в коротковолновой области на почти симметричное (относительно срединной поверхности цилиндра) или почти антисимметричное распределение перемещений по толщине цилиндра. Рождаются волны ($\zeta = 0$) $AW(1)$ и $SW(1)$ как продольные колебания антисимметричные и симметричные, соответственно, с уменьшением длины волны перемещения становятся, в основном, радиальными. Причем, радиальное перемещение для волны $AW(1)$ имеет одну полуволну по толщине, продольное – две. Для волны $SW(1)$ радиальное перемещение имеет две волны, продольное – три.

Для более высоких ветвей сохраняется эта тенденция: перемещения либо почти симметричны, либо почти антисимметричны (с увеличением количества полуволн на единицу при увеличении порядкового номера волны на единицу).

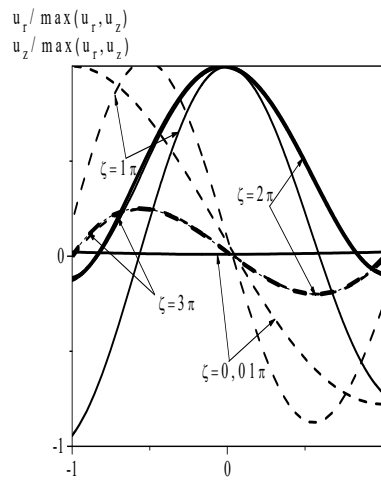


Рис. 44

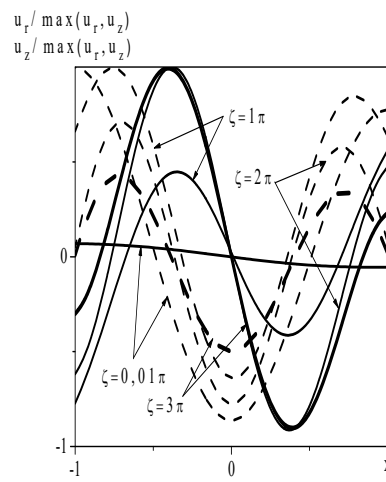


Рис. 45

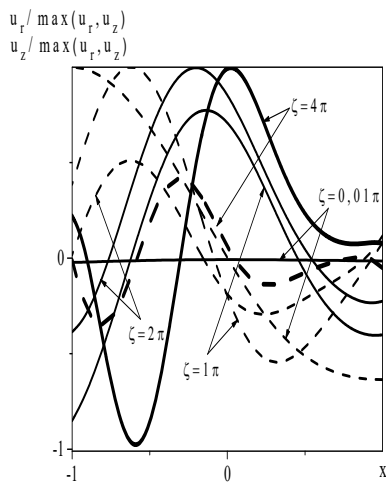


Рис. 46

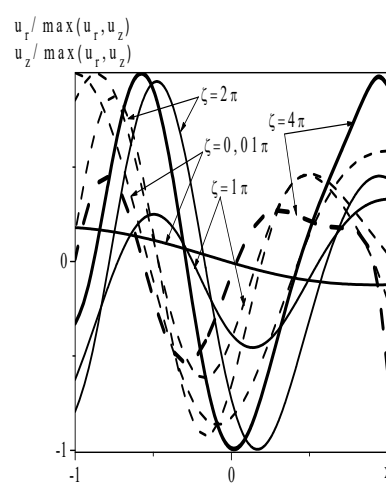


Рис. 47

В случае неоднородного материала наблюдается нарушение симметрии распределения перемещений относительно срединной поверхности. Перемещения увеличиваются в более «мягких» участках цилиндра и уменьшаются в более «жестких».

На рис. 46 представлено распределение перемещений для ветви $AW(1)$ для различных значений волнового числа. Жирными линиями, как и в предыдущих случаях, выделены перемещения для наибольшего из представленных волновых чисел. На рис. 47 дано распределение перемещений для ветви $SW(1)$ для различных волновых чисел.

Заключение.

В настоящей статье представлен обзор публикаций и дано обобщение результатов по одной из важных проблем электроупругости – исследованию динамических процессов в неоднородных пьезокерамических цилиндрах. Исследование отмеченной проблемы сопряжено с трудностями вычислительного характера. В связи с этим авторами для решения задач электроупругости был эффективно применен дискретно-континуальный численно-аналитический подход, который ранее широко применялся для исследования механического поведения упругих тел. Предложенный подход основан на совместном применении различных аналитических преобразований метода сплайн-коллокации, что даёт возможность свести трехмерные уравнения электроупругости в общем случае с переменными коэффициентами к обобщенной проблеме на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Полученные одномерные задачи решены устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Предложенный подход позволяет проводить исследование динамических процессов в пьезокерамических неоднородных цилиндрах в широком диапазоне изменения физико-механических и геометрических параметров. Большое внимание уделено оценке достоверности полученных численных результатов. На основании предложенного подхода были решены ряд новых важных задач теории электроупругости, выполнено исследование свободных колебаний пьезокерамических однородных и непрерывно неоднородных цилиндров конечной длины, а также поведения гармонических электроупругих волн в цилиндрических слоистых металл – пьезокерамика и непрерывно неоднородных пьезокерамических волноводах. Получено ряд новых закономерностей, соответствующих спектральных характеристик для неоднородных пьезокерамических цилиндров, проведен анализ влияния электрического поля и вида неоднородности на распределения спектра собственных частот цилиндров конечной длины и дисперсионных кривых для случая цилиндрического волновода.

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о широких возможностях применения предложенного дискретно-континуального подхода к решению задач электроупругости наряду с такими универсальными подходами, как конечно-разностные и конечно-элементные методы.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Представлений огляд робіт присвячено чисельним дослідженням нових задач теорії електропружності, а саме визначенню динамічних характеристик неоднорідних п'єзокерамічних хвилеводів кругового поперечного перерізу та неоднорідних п'єзокерамічних циліндрів скінченної довжини. Для розв'язання описаних задач запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід. Запропонований підхід базується на поєднанні різноманітних аналітичних перетворень (апарату спеціальних функцій, розвиненню в ряди Фур'є та методу сплайн-колокацій), які дозволяють звести вихідні тримірні рівняння теорії електропружності у частинних похідних до граничної задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь. Отримана система звичайних диференціальних рівнянь розв'язується методом дискретної ортогоналізації. На основі отриманих розв'язків досліджено закономірності спектральних характеристик в неоднорідній структурі з врахуванням зв'язаного електричного поля п'єзокерамічних шарів. Також вивчено вплив неоднорідності та зв'язаного електричного поля на динамічні характеристики описаних вище тіл. Значну увагу надано дослідженню достовірності отриманих чисельних обчислень.

1. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Лоза И.А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины // Доп. НАН України. – 2009. – № 6. – С. 61 – 67.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Лоза И.А. Применение сплайн-аппроксимации и метода дискретной ортогонализации для решения задач о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – 44. – С.133 – 137.
3. Григоренко А.Я., Лоза И.А. Неосесимметричные колебания полых цилиндров из функционально градиентных материалов, поляризованных в осевом направлении // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. сер. «Механіка» – 2011. – 15. – 2, № 5. – С. 48 – 53.
4. Григоренко А.Я., Лоза И.А. Неосесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре из функционально градиентного материала, поляризованного в осевом направлении слоями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – 20. – С. 137 – 143.
5. Григоренко А.Я., Лоза И.А. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими радиально поляризованными слоями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – 17. – С. 87 – 95.
6. Григоренко А.Я., Лоза И.А., Шульга Н.А. Распространение осесимметричных волн в полом пьезокерамическом цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3. – С. 35 – 39.
7. Григоренко О.Я., Сфімова Т.Л., Лоза І.А. Розв'язання осесимметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 112 – 119.
8. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
9. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
10. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти т., Т. 5.)
11. Ивина Н.Ф., Касаткин Б.А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27 – 32.
12. Лазуткин В.Н., Михайлов А.И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – 22, № 3. – С. 393 – 399.
13. Лоза И.А. Применение сплайн-аппроксимации и метода дискретной ортогонализации для решения задач о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров // Теор. и прикл. механика. – 2008. – 44. – С. 61 – 65.
14. Лоза И.А. О неосесимметричных волнах в слоистых полых волноводах, содержащих пьезокерамические слои, поляризованные в окружном направлении // Прикладные проблемы механики и математики – 2010. – 8. – С. 188 – 196
15. Ambadar A., Ferris C.D. Wave propagation in piezoelectric two-layered cylindrical shell with hexagonal symmetry. Some application for long bone // J. Acoust. Soc. Amer. – 1965. – 63, N 3. – P. 781 – 792.
16. Berg M., Hagedorn P., Gutschmidt S. On the dynamics of piezoelectric cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 2004 – 274, N 1 – P. 91 – 109.
17. Berlincourt D. Piezoelectric crystals and ceramics. In: Ultrasonic Transducer Materials, Mattiat, O.E. (ed.) – New York: Plenum Press, 1971. – P. 62 – 124.
18. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mechanics Rev. – 2007. – 60. – P. 195 – 216.
19. Chen W.Q., Ding H.J. On free vibrations of a functionally graded piezoelectric rectangular plate // Acta Mech. – 2002. – 153. – P. 207 – 216.
20. Chen W.Q., Lu Y., Ye J.R., Cai J.B. 3D electroelastic fields in a functionally graded piezoceramic hollow sphere under mechanical and electric loading // Arch. Appl. Mech. – 2002. – 72. – P. 39 – 51.
21. Crawly E.F., de Luis J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures // AIAA J. – 1987. – 25, N 10. – P. 1373 – 1385.
22. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1886. – 21. – P. 287 – 298.
23. Dai H.L., Hong L., Fu Y.M., Xiao X. Analytical solution for electromagnetoelastothermoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder // Appl. Math. Modeling. – 2010. – 34. – P. 343 – 357.
24. Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere // Acta Mech. Sin. – 2007. – 23. – P. 55 – 63.
25. Dai H.L., Wang X. Transient wave propagation in piezoelectric hollow spheres subjected to thermal shock and electric excitation // Struct. Eng. Mech. – 2005. – 19, N 4. – P. 441 – 457.
26. Dökmeci M.C. A Dynamic Analysis of Piezoelectric Strained Elements. – New York: Research Development and Standardization Group, 1992. – 283 p.
27. Grigorenko A., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S. Numerical Solution of Stress-Strain State in Hollow Cylinder by Means of Spline Approximation // J. Math. Sci. – 2012. – 180, N 2 – P. 135 – 145.

28. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Spline-approximation method for investigation of mechanical behavior of anisotropic inhomogeneous shells // Selected Papers 9th int. conf. "Modern Building Materials, Struct. and Techniques". – Vilnius: Technika, 2007. – P. 918 – 924.
29. *Grigorenko A.Ya.* Numerical Solution of Problems of Free Axisymmetric Vibrations of a Hollow Orthotropic Cylinder under Various Boundary Conditions at Its End Faces // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 5. – P. 388 – 393.
30. *Grigorenko A.Ya.* Numerical Studying the Stationary Dynamical Processes in Anisotropic Inhomogeneous Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 8. – P. 831 – 866.
31. *Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S.* Determination of the Stressed State of Rectangular Anisotropic Plates in the Space Statement // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, N 4. – P. 699 – 707.
32. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Application of Spline-Approximation for Solving the Problems on Natural Vibrations of Rectangular Shallow Shells with Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P. 1161 – 1169.
33. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Using Spline-Approximation to Solve Problems of Axisymmetric Free Vibration of Thick-Walled Orthotropic Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1137 – 1147.
34. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Free Axisymmetric Vibrations of Solids Cylinders: Numerical Problem Solving // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 499 – 508.
35. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A.* Free Axisymmetric Vibrations of Hollow Cylinder of Finite Length Made of Functionally Graded Materials // J. Math. Sci. – 2016. – **207**, N 2. – P. 1 – 16.
36. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A.* Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 654 – 665.
37. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Loza I.A.* Solution of an Axisymmetric Problem of Free Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders of Finite Length by the Spline Collocation Method // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, N 2. – P. 290 – 300.
38. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Loza, I.A.* Free Vibrations of Axially Polarized Piezoceramic Hollow Cylinders of Finite Length // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 625 – 623.
39. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.* On the Approach to Studying Free Vibrations of Cylindrical Shells of Variable Thickness in the Circumferential Direction Within a Refined Statement // J. Math. Sci. – 2010. – **181**, N 4. – P. 548 – 563.
40. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.* On the Investigation of Free Vibrations of Non-cylindrical Shells of Variable Thickness by Spline-Collocation Method // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, N 4. – P. 506 – 519.
41. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Free Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Piezoceramic Cylinders of Finite Length // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 11. – P. 1229 – 1237.
42. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 707 – 713.
43. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Free Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Piezoceramic Cylinders of Finite Length // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 11. – P. 1229 – 1237.
44. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Solution of the Problem of Nonaxisymmetrical Free Vibrations of the Piezoceramic Hollow Cylinders with Axial Polarization // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, N 1. – P. 69 – 77.
45. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Radially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 641 – 640.
46. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 150 – 158.
47. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 374 – 380.
48. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Propagation of Axisymmetric Electroelastic Waves in a Hollow Layered Cylinder under Mechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 562 – 567.
49. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N.* Numerical Analysis of Free Vibrations of Piezoelectric Cylinders. In: New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2019. – Berlin: Springer. – P. 187 – 196.
50. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G.* Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. General Theory and Applications of Classical Theory. – Vol. I. – Berlin: Springer, 2016. – 116 p.
51. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G.* Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. – Vol. IIA. – Berlin: Springer, 2016. – 42 p.
52. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G.* Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory – Vol. IIB. – Berlin: Springer, 2016. – 108 p.
53. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Loza I.A.* Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Cylinders Made of Functionally Gradient Piezoelectric Materials // Continuum Mech. Thermodyn. – 2012. – **24**, N 4 – 6. – P. 515 – 524.

54. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Influence of Orthotropy on the Stress–Strain State of Quadrangular Plates of Different Shapes // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 199 – 209.
55. Grigorenko A.Ya., Puzyrev S.V., Prigoda A.P., Horishko V.V. Theoretical-Experimental Investigation of Frequencies of Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, N 2. – P. 254 – 267.
56. Grigorenko A.Ya., Puzyrev S.V., Volchek E.A. Investigation of Free Vibrations of Noncircular Cylindrical Shells by the Spline-Collocation Method // *J. Math. Sci.* – 2012. – **185**, N 6. – P. 824 – 827.
57. Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Some problems of the theory of elasticity for anisotropic bodies of cylindrical form. – Kyiv: Inst. Mech. of NAS of Ukraine and Techn. Center of NAS of Ukraine, 2002. – 217 p.
58. Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Investigation of the Static and Dynamic Behaviour of Anisotropic Cylindrical Bodies with Noncircular Cross-Section // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – **41**. – P. 2781 – 2790.
59. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Investigation of Static and Dynamic Behaviour of Anisotropic Inhomogeneous Shallow Shells by Spline Approximation Method // *J. Civil Eng. and Management* – 2009. – **15**, N 1. – P. 87 – 93.
60. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the Axisymmetric Strain–Stress State of a Continuously Inhomogeneous Hollow Sphere // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 577 – 583.
61. Grigorenko Ya.M. Solution of problems in the theory of shells by numerical-analysis methods // *Soviet Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 10. – P.881 – 897.
62. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-based Investigation of Natural Vibrations of Orthotropic Rectangular Plates of Variable Thickness within Classical and Refined Theories // *J. Mech. and Struct.* – 2008. – **3**, N 5. – P. 929 – 952.
63. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells on Basis of Different Models. – Kyiv: Akadempriodika, 2009. – 549 p.
64. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariichenko L.I. Analysis of Influence of the Geometrical Parameters of Elliptic Cylindrical Shells with Variable Thickness on Their Stress-Strain State // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 155 – 162.
65. Guz A.N. Modern Directions in the Mechanics of a Solid Deformable Body // *Int. Appl. Mech.* – 1985. – **21**, N 9. – P. 823 – 828.
66. Guz A.N., Makhort F.G. The Physical Fundamentals of the Ultrasonic Nondestructive Stress Analysis of Solids // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 9. – P. 1119 – 1149.
67. Heyliger P.R. A note on the static behavior of simply-supported laminated piezoelectric cylinder // *Int. J. Solids and Struct.* – 1997 – **34**, N 29. – P. 3781 – 3794.
68. Heyliger P.R., Brooks S. Exact solution for piezoelectric laminates in cylindrical bending // *J. Appl. Mech.* – 1994. – **63**, N 4. – P. 903 – 910.
69. Heyliger P.R., Ramirez G. Free vibrations of laminated circular piezoelectric plates and discs // *J. Sound and Vibr.* – 2000. – **229**, N 4. – P. 935 – 956.
70. Hussein M., Heyliger P.R. Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders // *J. Sounds and Vibr.* – 1996. – **192**, N 5. – P. 995 – 1013.
71. Kharouf N., Heyliger P.R. Axisymmetric Free Vibrations of Homogeneous and Laminated Piezoelectric Cylinders // *J. Sound and Vibr.* – 1994. – **174**, N 4. – P. 539 – 561.
72. Khoroshev K.G., Glushchenko Yu.A. The two-dimensional electroelasticity problems for multiconnected bodies situated under electric potential difference action // *Int. J. Solids and Struct.* – 2012 – **49**, № 18. – P. 2703 – 2711.
73. Khoroshev K.G., Glushchenko Yu.A. Plane electroelastic problem for a cracked piezoelectric half-space subject to remote electric field action // *Europ. J. of Mech. A. Solids.* – 2020. – **82**. 103984 – P. 1 – 20.
74. Kuang Z.B. Theory of Electroelasticity. – Shanghai: Springer-Verlag, 2014. – 431 p.
75. Loza I.A. Axisymmetric Acoustoelectrical Wave Propagation in a Hollow Circularly Polarized Cylindrical Waveguide // *Soviet Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 12. – P. 1103 – 106.
76. Loza I.A. Propagation of Nonaxisymmetric Waves in Hollow Piezoceramic Cylinder with Radial Polarization // *Soviet Appl. Mech.* – 1985. – **21**, N 1 – P. 22 – 27.
77. Loza I.A. Free Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders with Radial Polarization // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, N 3. – P. 295 – 302.
78. Loza I.A. Torsional Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders with Circular Polarization // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, N 2. – P. 146 – 152.
79. Loza I.A., Medvedev K.V., Shul'ga N.A. Propagation of Acoustoelectric Waves in a Planar Layer Made of Piezoelectrics of Hexagonal Syngony // *Soviet Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 7. – P. 611 – 615.
80. Loza I.A. Medvedev K.V., Shul'ga N.A. Propagation of Nonaxisymmetric Acoustoelectric Waves in Layered Cylinders // *Soviet Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 8. – P. 703 – 706.
81. Loza I.A. Shul'ga N.A. Effect of Electrical Boundary Conditions on the Propagation of Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder with Axial Polarization // *Soviet Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 9. – P. 832 – 839.

82. *Loza I.A., Shul'ga N.A.* Forced axisymmetric vibrations of a hollow piezoceramic sphere with an electrical method of excitation // Soviet Appl. Mech. – 1990. – **23**, N 8. – P. 703 – 706.
83. *Paul H.S.* Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric β -quartz // Arch. Mech. Stosow. – 1962. – N 5. – P. 127 – 134.
84. *Paul H.S.* Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – **40**, N 5. – P. 1077 – 1080.
85. *Paul H.S., Nelson V.K., Vazhapadi K.* Flexural vibration of piezoelectric composite cylinder // J. Acoust. Soc. Am. – 1996. – **99**, N 1. – P. 309 – 313.
86. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**. – P. 324 – 336.
87. *Saravanos D.A., Heyliger P.R.* Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**. – P. 305 – 320.
88. *Shul'ga N.A.* Propagation of Harmonic Waves in Anisotropic Piezoelectric Cylinders. Homogeneous Piezoceramic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 8. – P. 933 – 953.
89. *Shul'ga N.A., Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Elastic Wave Propagation in Hollow Anisotropy Cylinders // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 5. – P. 357 – 362.
90. *Shul'ga N.A., Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric Electroelastic Waves in a Hollow Piezoelectric Ceramic Cylinder // Soviet Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 1. – P. 23 – 28.
91. *Shul'ga N.A., Grigorenko A. Ya., Loza I.A.* Propagation of Nonaxisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder // Soviet Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 6. – P. 517 – 521.
92. *Shul'ga N.A., Loza I.A.* Axial vibrations of a hollow piezoceramic ball with axial polarization // J. of Soviet Math. – 1992. – **36**. – P. 3296 – 3300.
93. *Wang J., Shi Z.* Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers // J. Intelligent Mater. Systems and Structures. – 2016. – **27**, N 4. – P. 500 – 511.
94. *Yang J.* An Introduction to the Theory of Piezoelectricity. – Berlin: Springer, 2005. – 284 p.
95. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – New York: McGraw-Hill, 1989. – 564 p.
96. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M.* Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells // Int. J. Numer Methods Eng. – 1971. – **3**, N2. – P. 275 – 290.

Поступила 24.10.2019

Утверждена в печать 09.07.2020