

Л. В. Мольченко<sup>1</sup>, И. И. Лоос<sup>2</sup>, В. Н. Дармосюк

ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ  
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ  
С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА

*Николаевский национальный университет им. В. А. Сухомлинского,  
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup> l.molchenko@gmail.com, <sup>2</sup> Loiri@ukr.net*

**Abstract.** Theory and method for solving the geometrically nonlinear problems of the thermomagnetic elasticity of the orthotropic shells of revolution with orthotropic electrical conductivity and Joule heat in the microsecond range are proposed. A resolving system of the flexible orthotropic conical shell with the orthotropic electrical conductivity and Joule heating is given. An example of the solution for a flexible truncated orthotropic conical shell with the orthotropic electrical conductivity and Joule heat is considered. The results of the solutions of flexible orthotropic and flexible isotropic shells are compared with the Joule temperature.

**Key words:** magnetic field, Joule heat, Lorentz force, orthotropic conical shell, variable stiffness, orthotropic electrical conductivity.

**Введение.**

В теоретических и прикладных исследованиях значительное развитие получило направление, связанное с изучением нестационарных термомеханических процессов деформирования при воздействии на электропроводящие тела магнитных полей [8, 9, 17, 20]. Физические основы этих эффектов подробно обсуждены в ряде курсов по классической электродинамике и физике [12, 13, 16].

Действие магнитного поля на проводящие тела приводит к появлению нестационарного электрического поля и индукционных токов, которые, взаимодействуя с магнитным полем, вызывают объемные электромагнитные (пондеромоторные) силы и появление источников джоулевого тепла. Электромагнитные силы и источники тепла, в свою очередь, вызывают волны напряжений и деформаций и изменяют термодинамическое состояние тела, и, следовательно, изменяют электромагнитное поле и электрофизические свойства тела. Таким образом, механические, температурные и электромагнитные поля оказываются взаимосвязанными и должны определяться из совместного решения динамических уравнений термомеханики и электродинамики Максвелла [1, 6]. В конкретных ситуациях рассмотренная задача может допускать различные упрощения.

В частности, имея априорную информацию о характере распределения и изменения во времени магнитного поля на поверхностях оболочки (полученных, например, экспериментально), можно ограничиться рассмотрением только внутренней задачи. Однако даже в этом, наиболее простом случае, остается проблема – построение приближенных уравнений электродинамики и выражений для внутренних электромагнитных сил, согласованных с принятыми оболочечными гипотезами о распределении перемещений и деформаций по толщине оболочки.

В настоящей работе приводится двумерный вариант теории гибких конечнопроводящих ортотропных оболочек в микросекундном диапазоне при действии нестационарных магнитных полей. Уравнения движения оболочки при наличии пондеромоторных сил получены с помощью принципа виртуальных перемещений при использо-

вании гипотез Кирхгофа – Лява. Приближенные уравнения электродинамики и соответствующие им граничные условия получены путем введения некоторых гипотез о характере распределения электромагнитного поля по толщине гибкой оболочки, близких по содержанию к гипотезам магнитоупругости тонких тел [1, 4, 6, 7].

К решению таких столь сложных задач в настоящее время можно подойти лишь численно, именно с этих позиций и дается формулировка основных разрешающих уравнений механики и электродинамики ортотропных оболочек вращения переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности и джоулевого тепла. Изложение проведено в ортогональных криволинейных координатах с использованием теории конечных деформаций и лагранжевых переменных, как в уравнениях механики, так и в электродинамической группе уравнений.

### 1. Двумерные уравнения магнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения в нестационарном магнитном поле.

Рассмотрим гибкую ортотропную оболочку, находящуюся под действием нестационарных поверхностных и контурных силовых и нестационарных электромагнитных нагрузок. Предполагаем, что материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука. Геометрические и механические характеристики оболочки, способы ее закрепления такие, что для описания процесса деформирования можно применять вариант геометрически-нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении. Срединную поверхность оболочки в недеформированном состоянии отнесем к криволинейной ортогональной системе координат  $(s, \theta)$ , где  $s$  – длина меридиана;  $\theta$  – центральный угол в параллельном круге (рис. 1).

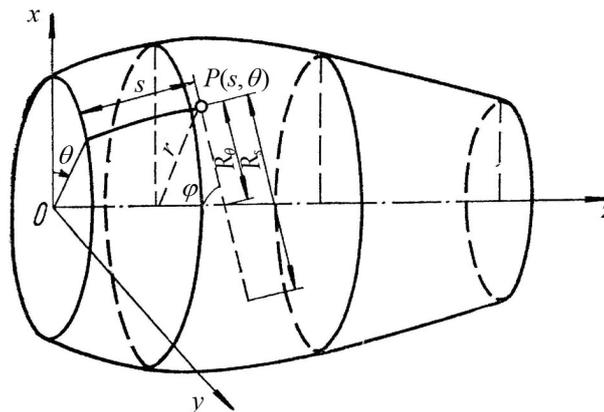


Рис. 1

Координатные линии  $s = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  являются линиями главных кривизн срединной поверхности. Отсчитывая координату  $\gamma$  по нормали к координатной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной криволинейной пространственной системе координат  $(s, \theta, \gamma)$ .

Запишем первую квадратичную форму срединной поверхности оболочки вращения в каноническом виде:

$$dS^2 = ds^2 + r^2 d\theta^2,$$

откуда видно, что коэффициенты первой квадратичной формы поверхности вращения в случае канонических координат будут  $A = 1, B = r$ .

Геометрические соотношения Кодацци – Гаусса принимают вид

$$\frac{dr}{ds} = \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между осью вращения и нормалью к оболочке, а также имеет место соотношение  $R_\theta \sin \varphi = r$  ( $R_\theta$  – главный радиус кривизны).

В современных технологиях все чаще используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии являются анизотропными. Отметим, что предлагаемая теория нелинейной магнитоупругости оболочек разработана для пара – и диамагнитных веществ. К таким веществам, в частности, относятся бериллий, бороалюминий, вольфрам, кадмий, цинк и многие другие. Наряду с анизотропией материала, они обладают анизотропией электропроводности и температуры. Все эти материалы имеют монокристаллическое строение. Монокристаллы – это однородные анизотропные вещества, во всем объеме которых атомы расположены регулярно, так что все вещество состоит из одинаковых периодически повторяющихся кристаллических ячеек. Кристаллы в общем случае анизотропны в отношении электропроводности. Процесс переноса электричества в анизотропном кристаллическом теле подчиняется обобщенному закону Ома. Они характеризуются симметричными тензорами второго ранга электрической проводимости  $\sigma_{ij}$ , магнитной проницаемости  $\mu_{ij}$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}$ .

Таким образом, как и любые симметричные тензоры второго ранга, тензора  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  путем надлежащего выбора осей координат могут быть приведены к диагональному виду. В общем случае тензора  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  определяются тремя независимыми величинами – тремя главными значениями. В зависимости от той или иной симметрии кристалла число различных главных значений рассматриваемых тензоров может оказаться и меньшим трех.

Отметим также, что диэлектрические и магнитные свойства твердого тела меняются не только при изменении его плотности, но и при деформациях, не изменяющих плотности (сдвигах). Деформация нарушает, вообще говоря, изотропию тела, в результате становятся анизотропными также и его диэлектрические и магнитные свойства, а скалярная диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  заменяются диэлектрическими и магнитными тензорами  $\varepsilon_{ij}$  и  $\mu_{ij}$ .

Таким образом, материальные соотношения электродинамики, обобщенный закон Ома и выражения пондеромоторных сил запишем, соответственно, в виде

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_{ij} \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \quad \vec{J} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}); \\ \rho \vec{F}^{\wedge} &= \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{J}_{cm} \times \vec{B}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь:  $\vec{J}$  – плотность электрического тока;  $\vec{J}_{cm}$  – плотность стороннего электрического тока;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{B}$  – магнитная индукция;  $\vec{D}$  – электрическая индукция;  $\rho \vec{F}^{\wedge}$  – сила Лоренца;  $\vec{V}$  – скорость деформирования.

При построении двумерного варианта уравнений магнитоупругости упругих ортотропных оболочек вращения воспользуемся принципом виртуальных перемещений с применением гипотез Кирхгофа – Лява и электромагнитных гипотез [4, 6, 20].

$$E_1 = E_1(s, \theta, t); \quad E_2 = E_2(s, \theta, t);$$

$$J_1 = J_1(s, \theta, t); \quad J_2 = J_2(s, \theta, t); \quad J_3 = 0;$$

$$H_1 = \frac{1}{2}(H_1^+ + H_1^-) + \frac{\gamma}{h}(H_1^+ - H_1^-);$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(H_2^+ + H_2^-) + \frac{\gamma}{h}(H_2^+ - H_2^-);$$

$$H_3 = H_3(s, \theta, t).$$

Здесь:  $E_1, E_2$  – компоненты напряженности электрического поля;  $J_1, J_2, J_3$  – компоненты плотности электрического тока;  $H_1, H_2, H_3$  – компоненты напряженности маг-

нитного поля;  $H_1^\pm, H_2^\pm$  – известные компоненты напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки;  $h = h(s, \theta)$  – толщина оболочки.

Отметим, что при выводе двумерных соотношений будем пренебрегать изменением плотности. Это упрощение не противоречит тому, что, допуская конечные деформации, они в металлических оболочках могут реализоваться только при развитом пластическом течении.

Из общих уравнений магнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения [4, 6, 19] и составляющих силы Лоренца (1) получим исходные соотношения гибких ортотропных оболочек вращения, находящихся в магнитном поле:

уравнения магнитоупругости

$$\frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - \cos\varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial\theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial\theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(P_s + \rho F_s^\wedge) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s}(r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s}(\sin\varphi H) + \frac{\cos\varphi}{R_s} H + \sin\varphi Q_\theta + r(P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) = r\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin\varphi N_\theta + r(P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - \cos\varphi M_\theta - rQ_s - r\left(N_s - \frac{\sin\varphi}{r} M_\theta\right) \mathcal{G}_s - rS \mathcal{G}_\theta = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s}(r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} - rQ_\theta - r\left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s\right) \mathcal{G}_\theta - rS \mathcal{G}_s = 0;$$

$$-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial\theta} \right); \quad (2)$$

$$\sigma_1 \left[ E_s - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial\theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h};$$

$$\sigma_2 \left[ E_\theta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] = -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};$$

выражения деформаций через перемещения

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r} u + \frac{\sin\varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2;$$

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r} \mathcal{G}_s; \quad (3)$$

$$\chi_{s\theta} = \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{r} v \right) + \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},$$

где

$$\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{r} v - \text{углы поворота нормали};$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
N_s &= \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} \left[ \varepsilon_{ss} + \nu_\theta \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \varepsilon_T \right]; \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - e_s e_\theta} \left[ \varepsilon_{\theta\theta} + \nu_s \varepsilon_{ss} - (1 + \nu_\theta) \varepsilon_T \right]; \\
S &= \frac{e_s h}{2(1 + \nu_\theta)} \varepsilon_{s\theta}; \quad H = \frac{e_\theta h^3}{12(1 + \nu_s)} \chi_{s\theta}; \\
M_s &= \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} \left[ \chi_{ss} + \nu_\theta \chi_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \chi_T \right]; \\
M_\theta &= \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} \left[ \chi_{\theta\theta} + \nu_s \chi_{ss} - (1 + \nu_\theta) \chi_T \right]; \\
\nu_s &= \nu_{\theta s}; \quad \nu_\theta = \nu_{s\theta}; \quad e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s.
\end{aligned} \tag{4}$$

Также

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma,$$

где:  $\varepsilon_T, \chi_T$  – интегральные характеристики температурного поля;  $R_s$  – главный радиус кривизны;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $T(s, \theta, \gamma, t)$  – джоулева температура оболочки.

Составляющие силы Лоренца  $\rho \vec{F}^\wedge$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho F_s^\wedge &= h J_{\text{от}} B_\gamma + \sigma_1 h E_\theta B_\gamma + \sigma_1 h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}; \\
\rho F_\theta^\wedge &= -h J_{\text{срт}} B_\gamma - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} B_\gamma + \\
&\quad + \sigma_2 h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{\mu} B_\gamma; \\
\rho F_\gamma^\wedge &= 0,5 h \left[ J_{\text{срт}} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\text{от}} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \\
&\quad - 0,5 \sigma_2 h E_\theta (B_s^+ + B_s^-) + \sigma_2 h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{(B_\theta^+)^2 - (B_\theta^-)^2}{\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

К полученным уравнениям необходимо присоединить начальные и граничные условия. Здесь:  $N_s, N_\theta$  – нормальные тангенциальные усилия;  $S$  – сдвигающее усилие;  $M_s, M_\theta$  – изгибающие моменты;  $H$  – крутящий момент;  $Q_s, Q_\theta$  – поперечные усилия;  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{s\theta}, \chi_{ss}, \chi_{\theta\theta}, \chi_{s\theta}$  – компоненты тензора деформаций;  $P_s, P_\theta, P_\gamma$  – составляющие механической силы;  $e_s, e_\theta$  – модули Юнга;  $\nu_s, \nu_\theta$  – коэффициенты Пуассона;  $\sigma_1, \sigma_2$  – ортотропные компоненты тензора электропроводности;  $\mu$  – коэффициент магнитной проницаемости.

## 2. Уравнение теплопроводности для анизотропных тел.

В общем случае закон Фурье можно записать в тензорном виде [10, 11]:

$$q_i = -\lambda_{ij} \nabla_j T, \quad (i, j = s, \theta, \gamma). \quad (6)$$

Здесь  $q_i$  – плотность теплового потока;  $\lambda_{ij}$  – тензор теплопроводности.

Тензор теплопроводности  $\lambda_{ij}$  в ортогональной криволинейной системе координат имеет следующий вид:

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ss} & \lambda_{s\theta} & \lambda_{s\gamma} \\ \lambda_{\theta s} & \lambda_{\theta\theta} & \lambda_{\theta\gamma} \\ \lambda_{\gamma s} & \lambda_{\gamma\theta} & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Выбором системы координат тензор теплопроводности можно привести к диагональному виду:

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Уравнение теплопроводности в этом случае принимает следующий вид:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \lambda_{ss} \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \lambda_{\gamma\gamma} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) + q_v$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{\rho C_v} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\lambda_{\beta\beta}}{\lambda_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda_{\gamma\gamma}}{\lambda_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{q_v}{\rho C_v}.$$

Здесь:  $q_v$  – плотность теплового потока;  $C_v$  – удельная теплоемкость.

С учетом обозначений:  $a_{ss} = \lambda_{ss} / \rho C_v$ ,  $K_\theta = \lambda_{\theta\theta} / \lambda_{ss}$ ,  $K_\gamma = \lambda_{\gamma\gamma} / \lambda_{ss}$  уравнение теплопроводности принимает стандартный вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{ss} \nabla_1^2 T + \frac{q_v}{\rho C_v}, \quad (7)$$

где  $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + K_\theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K_\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2}$ .

Таким образом, для анизотропной оболочки уравнение теплопроводности также приводится к стандартному виду, однако изменяется вид оператора Лапласа, в нем появляются коэффициенты анизотропии  $K_\theta, K_\gamma$ , корректирующие теплопроводность по направлениям.

### 3. Термодинамические соотношения для определения температуры проводящих оболочек.

Сформулируем уравнения термодинамики гибких проводящих оболочек с учетом джоулевой температуры при действии магнитного поля в микросекундном диапазоне (переходный процесс) [3, 7, 15, 19].

Плотность магнитной энергии на единицу объема запишем в виде функции

$$W = 0,5(\vec{B}\vec{H}),$$

а количество тепла, выделяемого током  $\vec{J}$  в единицу времени (мощность джоулева тепла на единицу массы) определяется формулой

$$\dot{Q}_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}.$$

Запишем магнитное давление  $P$  в виде суммы двух составляющих

$$P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T),$$

где  $P_\chi(\rho)$  – составляющая давления, зависящая только от плотности  $\rho$ ,  $P_T(\rho, T)$  – тепловая составляющая, зависящая от температуры и плотности. Также представим приращение внутренней энергии в виде энергии без учета температуры и тепловой составляющих, т.е.

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

где

$$\rho dU_\chi = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de;$$

$$\rho dU_T = 3P_T de + \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T) dt. \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_T$  – коэффициент теплопроводности.

Примем далее, что приращение тепловой энергии пропорционально приращению температуры, т.е.

$$dU_T = C_\varepsilon(T) dT; \quad U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT,$$

где  $C_\varepsilon$  – удельная теплоемкость при постоянной деформации. Тогда уравнение (8) можем использовать для вычисления температуры

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T). \quad (9)$$

Учитывая, что удельная теплоемкость металлов для температур выше  $T_0$  вплоть до точки плавления изменяется незначительно (не более чем на 5 – 10 % от среднего значения), тепловую энергию можно представить в виде

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT \approx C_\varepsilon^{cp} (T - T_0) + U_{T0}; \quad U_{T0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T) dT,$$

где  $C_\varepsilon^{cp}$  – среднее значение теплоемкости на интервале  $[T_0, T]$ .

Следуя [7], уравнение (9) преобразуется в известное уравнение теплопроводности с источником джоулева тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{cp}} \dot{Q}_{дж} + \alpha_T \Delta T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{cp}}; \quad \lambda_T = \text{const}, \quad (10)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент тепловой диффузии.

Используя выражение для расчета джоулева тепла, оценим величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в зависимости от величины магнитной индукции  $\vec{B}$ . Используя (8) и уравнение Максвелла  $\text{rot } \vec{H} = \sigma_{ij} \vec{E}$ , из соображений теории размерности и на основании (10) имеем

$$\tilde{T} \approx T_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{cp}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \frac{\tilde{B}^2}{\mu}, \quad (11)$$

где  $\alpha_D = 1/\sigma_{ij}\mu$  – коэффициент магнитной диффузии. В качестве характерного времени принято время диффузии магнитного поля на расстояние  $\tilde{L}$ , т.е.  $\tilde{t} = \tilde{L}/\alpha_D$ . Так как  $\alpha_T/\alpha_D \ll 1$  для металлов (например, для алюминия при  $T_0 = 20^\circ\text{C}$   $\alpha_T/\alpha_D \approx 4,3 \cdot 10^{-6}$ , для нержавеющей стали –  $\alpha_T/\alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$ ), то из символического уравнения (11) следует, что процессом теплопроводности в переходном режиме можно пренебречь.

Таким образом, учитывая оценку членов уравнения (10) и в соответствии с формулой (7), окончательно определяем величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 + \frac{1}{\sigma_{ij} \rho C_\varepsilon^{cp}} Q_{джк}. \quad (12)$$

Как известно, при действии на оболочку магнитного поля в ней возникают объемные силы Лоренца

$$\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Исходя из уравнений для магнитной энергии оболочки и используя тождество

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \nabla \vec{A} = 0,5 \nabla (\vec{A} \vec{A}),$$

выражение для пондеромоторных сил запишется в виде

$$\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} = \vec{B} \nabla \vec{H} - \frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k,$$

где  $\frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k$  – член силы Лоренца отвечающий джоулеву нагреву оболочки;  $\vec{G}^k$  – базовый вектор;  $\nabla$  – оператор в лагранжевой метрике;  $\xi^k$  – лагранжевы переменные ( $k = 1, 2, 3$ ).

Таким образом, влияние джоулева тепла учитывается как в уравнениях магнитоупругости, так и в формуле силы Лоренца.

Исходя из уравнения (12) имеем

$$\frac{h}{2} Q_{джк} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{cp} dT_{II} + \lambda_F (T_{II} - T_C) dt, \quad (13)$$

где  $T_{II}$  – температура на поверхности оболочки;  $T_C$  – температура срединной поверхности оболочки;  $\lambda_F$  – коэффициент теплоотдачи.

Выражение температуры, при изменении вдоль  $\gamma$ , принимает вид

$$T = T_{II} + \frac{Q_{джк} h^2}{8 \lambda_T} \left[ 1 - 4 \left( \frac{\gamma}{h} \right)^2 \right].$$

Исходя из симметрии задачи для оболочек вращения, на срединной поверхности тепловой поток  $q = 0$  при  $\gamma = 0$ , а на поверхности –  $q = Q_{джк} h/2$  и  $T = T_{II}$ .

С учетом (13), выражение для определения температуры принимает вид

$$T = T_C + \frac{Q_{ож} h^2}{8\lambda_T} \left[ 1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} - 4 \left( \frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \dot{T}_\Pi. \quad (14)$$

Компоненты электрического тока с учетом стороннего тока имеют вид

$$J_s = J_{cms} + \sigma_1 \left[ E_s + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right];$$

$$J_\theta = J_{cm\theta} + \sigma_2 \left[ E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right]; \quad J_\gamma = 0.$$

#### 4. Разрешающая система уравнений осесимметричных ортотропных оболочек вращения переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности и джоулевого тепла в геометрически нелинейной постановке.

Принимая, что все компоненты возбужденного электромагнитного поля и поля перемещений не зависят от координаты  $\theta$ , положим [4, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad v = 0; \quad S = 0; \quad H = 0; \quad E_s = 0; \quad B_\theta = 0; \quad P_\theta = 0; \quad \rho F_\theta^\wedge = 0.$$

При построении разрешающей системы уравнений термомагнитоупругости усеченной гибкой ортотропной конической оболочки выбираем в качестве искомым функций следующие:

$$u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

В этом случае, разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений термомагнитоупругости гибкой ортотропной конической оболочки с учетом джоулевой температуры принимает вид [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1 + \nu_s) \varepsilon_T;$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\mathcal{G}_s, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s;$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} \left[ (\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left( \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - P_s - h J_{\theta CT} B_\gamma -$$

$$- \sigma_1 h \left[ E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{e_s h \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} = -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[ \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - P_\gamma -$$

$$- 0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 -$$

$$- \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) +$$

$$+ \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \frac{e_s h \sin \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[ (v_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \left[ v_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma_2 \left[ E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial s} &= -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varepsilon_T &= \alpha T_c + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left( 1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[ E_\theta^2 + 0,25 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left( 1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ 2 \sigma_2 J_{\theta cm} \left[ E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2 \lambda_F} \dot{T}_{II}; \\ \chi_T &= 0.\end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений (15) является нелинейной смешанной гиперболо-параболической системой дифференциальных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Для определения произволов, которые появляются в общем решении системы уравнений (15) после интегрирования, необходимо присоединить граничные условия на контурах оболочки. Краевые условия для функций, характеризующие механическую часть задачи, ставятся так же, как и в теории оболочек. Краевые условия для электромагнитных параметров могут задаваться через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. Начальные условия задаются в классическом виде.

### 5. Методика решения задач термомагнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения переменной жесткости с учетом джоулевой температуры в осесимметричной постановке.

Решение краевых задач магнитоупругости ортотропных оболочек вращения с учетом джоулевого тепла в нелинейной постановке связано с большими вычислительными сложностями. Это объясняется тем, что система (15), описывающая напряженно-деформируемое состояние (НДС) оболочки, является связанной, т.е. состоит из уравнений движения и электродинамики. Кроме того, она является нелинейной смешанной гиперболо-параболической системой дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка с переменными коэффициентами. Объемные силы Лоренца – нелинейные и изменяются с изменением материальной и временной координат.

Предложенный подход численного решения нелинейных задач магнитоупругости теории гибких оболочек вращения построен на последовательном применении конечно-разностной схемы Ньюмарка [21], методов квазилинеаризации [2] и дискретной ортогонализации [5].

Представим разрешающую систему уравнений (15) в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left( s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right); \quad (16)$$

с граничными условиями

$$g_1 \vec{N}(s_0, t) = \vec{b}_1; \quad g_2 \vec{N}(s_N, t) = \vec{b}_2$$

и начальными условиями

$$\vec{N} = 0; \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь:  $\vec{N} = \{u, w, \mathcal{G}_s, N_s, \mathcal{Q}_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$ ;  $\vec{F}$  – в общем случае нелинейная вектор – функция;  $g_1, g_2$  – прямоугольные матрицы;  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  – известные вектора.

Для разделения переменных по времени использована конечно-разностная схема Ньюмарка

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{0,25(\Delta t)^2} - \frac{1}{0,25} \left( \frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + 0,25\dot{u}^t \right); \dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + 0,5\Delta t (\ddot{u}^t + \ddot{u}^{t+\Delta t}). \quad (17)$$

Применение этой схемы позволяет весь интервал по времени разбить на конечные интервалы и отследить НДС на каждом временном промежутке.

После применения схемы Ньюмарка (17), разрешающую систему магнитоупругости (16) для соответствующего временного промежутка можно записать в векторной форме:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{F}_1(s, \vec{N}), \quad (18)$$

где  $\vec{F}_1$  – восьмимерный вектор.

Граничные условия на контуре  $s = \text{const}$  имеют вид:

$$D_1 \vec{N} /_{s=s_0} = \vec{d}_1; D_2 \vec{N} /_{s=s_N} = \vec{d}_2, \quad (19)$$

где  $D_1, D_2$  – известные прямоугольные матрицы соответственно порядков  $k \times 8$  и  $(8-k) \times 8$ , ( $k < 8$ )  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  – заданные векторы;  $k$  – количество граничных условий на контуре  $s = s_0$ .

Решение нелинейных краевых задач методом квазилинеаризации является аналогом метода Ньютона для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в функциональном пространстве вектор-функций искомых решений поставленной задачи. Проводится линеаризация системы дифференциальных уравнений и граничных условий, а также строится итерационный процесс решения нелинейной краевой задачи, для которого задается начальное приближение и на каждом шаге решается линейная краевая задача.

Таким образом, нелинейная краевая задача (18), (19) приводится к последовательности линейных краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}^{k+1}}{ds} &= \vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k); B_1(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_0) = \vec{b}_1(\vec{N}^k); \\ B_2(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_N) &= \vec{b}_2(\vec{N}^k), \quad (k = 0, 1, 2 \dots), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\vec{N} = \{u, w, \mathcal{G}_s, N_s, \mathcal{Q}_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$ , а  $\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k$  – решения, соответственно, на  $(k+1)$ -ой и  $k$ -ой итерациях;  $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$  – вектор правой части системы уравнений;  $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$  – соответственно, матрицы и правые граничные условия.

После применения изложенных выше методов, линейная краевая задача (20) решается методом дискретной ортогонализации [5].

Отметим, что на каждом шаге итерационного процесса коэффициенты правой части линейной системы уравнений (20), элементы матриц  $B_1, B_2$  и компоненты векторов  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  граничных условий зависят от количества шагов по материальной и часо-

вой переменной, а также от решения линейной задачи на предыдущем шаге, т.е. последовательность краевых задач – связанная последовательность линейных задач. На первом шаге по времени за начальное приближение в итерационном процессе выбираем решение линейной задачи. На следующих шагах – решение, полученное на предыдущем шаге, что уже является решением нелинейной задачи. Выбор такой схемы существенно уменьшает количество итераций, необходимых при решении задачи.

Заменяя производные по времени конечноразностными выражениями соответственно схеме Ньюмарка, необходимо учитывать взаимосвязь между шагом по времени и шагом интегрирования по переменной  $s$ . Для получения сходящегося алгоритма и выполнения критерия Куранта, преобразуем систему уравнений к «массовым» координатам Лагранжа. Эта процедура позволяет существенно увеличить шаг по времени.

При решении краевых задач для проводящих оболочек необходимо также учитывать ограничения, накладываемые на плотность тока и внешнее магнитное поле, действующее на нее. Эти ограничения связаны с джоулевым теплом и значением критической силы.

### 6. Числовой пример.

Рассмотрим осесимметричную геометрически-нелинейную краевую задачу термомагнитоупругости об определении НДС гибкой ортотропной конической оболочки переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности и джоулевого тепла (рис. 2).

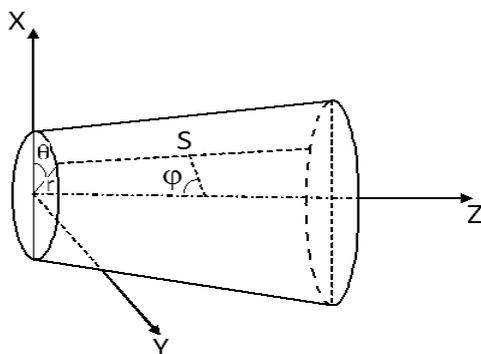


Рис. 2

Оболочка упругая ортотропная, изготовленная из металлического композитного материала бороалюминия. Бороалюминий (парамагнетик) – композитный материал на основе матрицы из алюминия, армированный борными волокнами, обладающий высокими удельными характеристиками. Особо эффективное применение бороалюминия в ракетно-космической технике. Его использование для деталей ракет «Атлас», космических кораблей «Аполлон» и «Шатл» позволило уменьшить их массу на 20 – 50 %.

Полагаем, что на поверхностях ортотропной оболочки осуществляется теплообмен по закону Ньютона – Рихмана с внешней средой, имеющей температуру  $0^{\circ}\text{C}$  (с коэффициентом теплообмена  $\lambda_F$ ). Также оболочка является проводником стороннего электрического тока  $\vec{J}_{cm}$ .

Пусть стационарная задача магнитоупругости для возмущенного состояния решена, т. е., известны векторы магнитной индукции начального состояния для внешней и внутренней областей.

Рассматриваем случай, когда оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической силы  $F_y = 5 \cdot 10^2 \sin \omega t \text{ Н/м}^2$  и внешнего электрического тока  $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t \text{ А/м}^2$  ( $\omega$  – круговая частота). Толщина оболочки переменная и изменяется за законами: 1)  $h_1 = 5 \cdot 10^{-4} (1 - 0,5 \cdot s^2 / b) \text{ м}$ ; 2)  $h_2 = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0,5s^2 / b) \text{ м}$ , где  $b = 0,4 \text{ м}$ .

Граничные условия выбраны в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = 0; M_s = 0; Q_s = -200; B_y = 0,5 \sin \omega t \quad \text{при } s_0 = 0; \\ u = 0; w = 0; M_s = 0; B_y = 0 \quad \text{при } s_N = 0,4. \end{aligned}$$

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,4 \text{ м}; e_s = 22,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \mu = 1,256 \text{ Гн/м}; \rho = 2600 \text{ кг/м}^3;$$

$$\nu_s = 0,262; \nu_\theta = 0,32; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; B_s^\pm = 0,5 \text{ Тл}; C_\varepsilon = 820 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)};$$

$$\alpha = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/°C}; \lambda_T = 228 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}; \lambda_F = 225 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}; \varphi = \pi/10.$$

Отметим, что в справочной литературе отсутствуют точные данные по анизотропии бора. Поэтому, коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи вынуждены рассматривать как изотропные. Однако, такое допущение хорошо согласуется с экспериментом.

Для определения влияния ортотропии на НДС оболочки, проведено сравнение напряженного состояния изотропной конической оболочки той же длины, аналогичной толщины и нагружения при тех же граничных условиях, что и для ортотропной оболочки.

Параметры алюминиевой оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,4 \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \varphi = \pi/10;$$

$$\nu = 0,3; \rho = 2670 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \sigma = 3,13 \cdot 10^7 \text{ (ом} \cdot \text{м)}^{-1};$$

$$C_\varepsilon^{cp} = 820 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}; \lambda_T = 228 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}; \lambda_F = 225 \text{ (м}^2 \cdot \text{°C)};$$

$$\alpha = 2,36 \cdot 10^{-5} \text{ 1/°C}; B_s^\pm = 0,5 \text{ Тл}.$$

Решения задач получено на интервале  $t = 1 \cdot 10^{-2}$  с, временной шаг интегрирования  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  с.

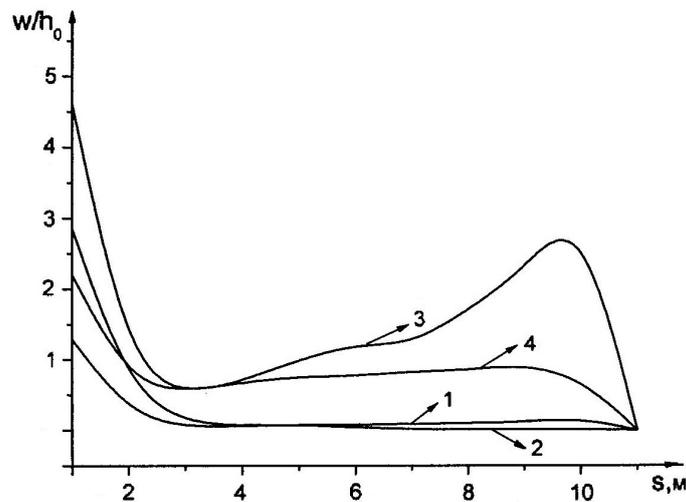


Рис. 3

На рис. 3 представлено безразмерное распределение прогиба  $w/h_0(s)$ . Здесь и на дальнейших графиках линия 1 отвечает толщине 1; линия 2 — толщине 2 в случае ортотропной оболочки; линия 3 отвечает толщине 1; линия 4 — толщине 2 для изотропной оболочки. Под  $h_0$  понимаем среднее значение толщины оболочки.

Максимальная нелинейность безразмерного прогиба оболочки из ортотропного материала достигается на торце оболочки  $s=0$  при  $t=5 \cdot 10^{-3}$  с и равняется  $w/h_0 = 2,85$  (линия 1). Максимальное значение нелинейного прогиба на линии 2 со-

ставляет 1,28, т. е., нелинейность наблюдается только в первой точке. Начиная с точки  $s = 0,08$  м безразмерный прогиб близок к нулевому значению.

Максимальная нелинейность безразмерного прогиба изотропной оболочки достигается также на торце  $s = 0$  при  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  с и равняется  $w/h_0 = 4,60$  (линия 3). Максимальное значение безразмерного прогиба на линии 4 составляет 2,20.

Исходя из результатов, представленных на рис. 3, делаем вывод, что в случае ортотропного материала (линии 1, 2), прогиб значительно меньше по сравнению с прогибом оболочки из изотропного материала (линии 3, 4) при тех же параметрах оболочки. Это указывает на преимущество использования ортотропного материала при изготовлении элементов конструкций.

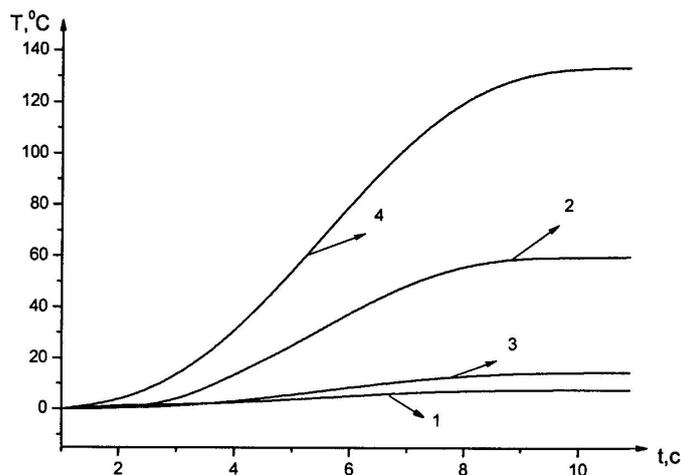


Рис. 4

Рис. 4 иллюстрирует распределение джоулевой температуры  $T(t)^\circ C$  при  $s = 0$ . Максимальное значение температуры в случае ортотропного материала достигает значений 7,79°C (линия 1) и 59,90°C (линия 2). В случае изотропного материала максимальное значение температуры достигает 14,56°C (линия 3) и 133,36°C (линия 4).

Сравнивая полученные результаты, отмечаем, что значения температуры ортотропного материала меньше значений температуры изотропного материала.

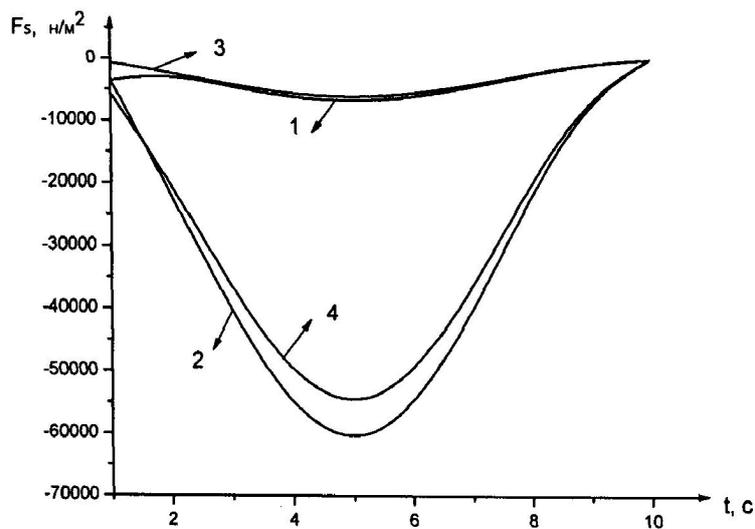


Рис. 5

Изучая рис. 5, 6, отмечаем, что тангенциальная составляющая  $F_s^\wedge(t)$  и нормальная составляющая силы Лоренца  $F_y^\wedge(t)$  при  $s = 0$ , принимают меньшие значения в случае использования ортотропного материала конической оболочки, по сравнению с изотропным материалом. Отметим также, что значения тангенциальной составляющей

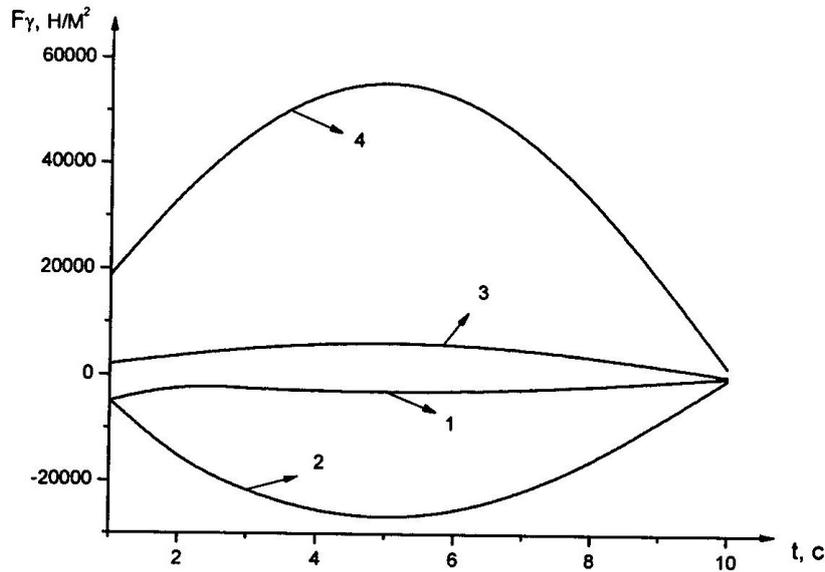


Рис. 6

сей силы Лоренца принимают отрицательные значения на всем часовом интервале (рис. 5). На рис. 6 нормальная составляющая силы Лоренца принимает отрицательные значения для ортотропного материала (линии 1, 2). В случае изотропного материала значения нормальной составляющей силы Лоренца – положительные (линии 3, 4).

#### Заключение.

На основании полученных нелинейных уравнений термомагнитоупругости с использованием предложенной методики, имеем возможность определять НДС гибких ортотропных оболочек вращения переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности и джоулевого нагрева. Предложенная методика позволяет рассматривать различные варианты физико-механических параметров ортотропных оболочек вращения в геометрически-нелинейной постановке.

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрена задача осесимметричной усеченной гибкой ортотропной конической оболочки переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности и джоулевого тепла, а также гибкой изотропной конической оболочки аналогичной длины, толщины и нагружения при тех же граничных условиях, что и для ортотропной оболочки. Проведено обсуждение полученных результатов. Полученные результаты подтверждают преимущество использования ортотропного материала.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто побудову рівнянь термомагнітопружності для гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності і джоулевого тепла. Проведено аналіз термомагнітопружності зрізаної ортотропної конічної оболонки в осесиметричній постановці з урахуванням ортотропії електропровідності і джоулевого нагріву в порівнянні з гнучкою оболонкою з ізотропного матеріалу.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будаk В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Численно-аналитическое решение краевых задач магнитоупругости. – Николаев: Илион, 2016. – 148 с.
4. Будаk В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1963. – 16, вып. 5(99). – С. 171 – 174.
6. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости: Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с.
7. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32 – 47.
8. Зодмерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 501 с.
9. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
10. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
11. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 639 с.
12. Стрэттон Д.А. Теория электромагнетизма. – Москва, Ленинград: ГТТИ, 1948. – 540 с.
13. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – М.: Наука, 1976. – 624 с.
14. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически-нелинейной теории тонких оболочек. // Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56 – 62.
15. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 120.
16. Elhajjar R., Saponara V., Muliana A. Smart composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press. – 2013. – 430 p.
17. Hutter K., Van de Ven A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer. – 382 p.
18. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 11. – P. 1261 – 1267.
19. Mol'chenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasilieva L.Yu. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54. – N 3. P. 306 – 314.
20. Moon F.C. Magneto-Solid Mechanics. – New York: John Wiley and Sons Inc. – 1984. – 448 p.
21. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 28.01.2019

Утверждена в печать 03.03.2020