

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

**О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РАЗВИТИЯ ОБЛАСТИ ПАССИВНОЙ
ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОМ УПРУГОМ ОРТОТРОПНОМ
ТЕЛЕ С ТРЕЩИНОЙ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. Considered is a nonlinear elastic orthotropic body with a mode I crack. It is assumed that there is a fracture process zone in the crack tip. The boundary-value problem for the body is stated in terms of the displacement vector. Equations are used as an interlink between components of the stress vector at the points on the opposite faces of the fracture process zone and components of the mutual displacement vector for these points. The boundary-value problem solution allows us to conclude that a passive deformation area appears around the fracture process zone. An analysis is given for the deformed state at some points of the passive deformation area. It is found that the passive deformation area undergoes transformation with the body loading. A comparison is given between the passive deformation area and the nonlinearity area around the crack tip.

Key words: nonlinear elastic orthotropic body, mode I crack, fracture process zone, passive deformation area.

Введение.

Эксперименты свидетельствуют, что возле фронта трещины образуется зона предразрушения – узкая область, в которой наблюдаются микротрещины, поры и расслоения [12]. Эту зону надлежит учитывать при постановке краевых задач механики разрушения, что сопряжено со значительными трудностями. Во многом удается их избежать, представляя границы зоны предразрушения как поверхности раскрытого разреза, к которым приложены противоположные векторы напряжения [3, 10, 17, 18]. При этом компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения следует принять зависящими от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек, и воспользоваться соответствующими уравнениями. Необходимо также требовать, чтобы в конце зоны предразрушения соблюдался критерий прочности [3, 14].

Как установлено в работе [11], с увеличением нагрузки на тело возрастает длина зоны предразрушения и уменьшаются напряжения по ее границам. Все это приводит к возникновению вокруг зоны предразрушения некоторой области, в которой совершается пассивная деформация.

Изучим закономерности развития области пассивной деформации в нелинейном упругом ортотропном теле с трещиной нормального отрыва.

Ограничимся малыми деформациями. Соответствующую краевую задачу поставим в компонентах вектора перемещения.

§1. Определяющие уравнения.

Обратимся к следующим тензорно-линейным определяющим уравнениям, связывающим компоненты тензора напряжений \mathbf{S} с компонентами тензора деформаций \mathbf{D} [13]:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\Phi}{\Omega} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.1)$$

Здесь

$$\Phi = \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}; \quad \Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (1.2)$$

Инварианты E , а также Z , K и Ξ таковы:

$$E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad K = F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (1.3)$$

Взаимно обратные тензоры четвертого ранга F и G характеризуют анизотропию.

При выводе уравнений (1.1) предполагалось, что для окрестности начального состояния известны зависимости всех компонент тензора D от каждой компоненты тензора S :

$$D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(S^{\gamma\delta}).$$

По этим зависимостям определены компоненты тензора F :

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left. \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial S^{\gamma\delta}} \right|_{S^{\gamma\delta}=0}.$$

Заметим, что компоненты тензоров F и G , как компоненты взаимно обратных тензоров четвертого ранга, должны удовлетворять формулам [9]

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\alpha\beta\epsilon\zeta} = \delta_\gamma^\epsilon \delta_\delta^\zeta (\epsilon, \zeta). \quad (1.4)$$

В формулах (1.4) фигурируют символы Кронекера δ_η^i :

$$\delta_\eta^i = \begin{cases} 1 & (\eta = i); \\ 0 & (\eta \neq i). \end{cases} \quad (1.5)$$

Если тело является изотропным, то компоненты тензора F могут быть выражены через две константы (ν и ξ) [9]:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \xi g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} (\gamma, \delta). \quad (1.6)$$

Подстановка в формулы (1.4) выражений (1.6) с учетом равенств (1.5) дает

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\xi} \left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - \frac{\nu}{3\nu + \xi} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) (\gamma, \delta). \quad (1.7)$$

Согласно выражениям (1.6) и (1.7) уравнения (1.1) преобразуются в уравнения Хенки – Надаи [8, 16], причем величины Φ и Ω переходят (с точностью до постоянных множителей) в интенсивности напряжений и деформаций, соответственно.

Важно отметить, что физическая интерпретация величин Φ и Ω [11] совпадает, по сути, с физической интерпретацией интенсивностей напряжений и деформаций, принадлежащей Хенки [5].

В работе [2] деформация бесконечно малого элемента нелинейного изотропного тела, следующего уравнениям Хенки – Надаи [8, 16], названа активной, если интенсивность напряжений возрастает, и пассивной, если интенсивность напряжений убывает.

Отметим, что по своей структуре уравнения (1.1) идентичны уравнениям Хенки – Надаи [8, 16]. В частности, они содержат величины Φ и Ω , аналогичные интенсивностям напряжений и деформаций, соответственно.

Ввиду этого, деформацию бесконечно малого элемента нелинейного анизотропного тела, следующего уравнениям (1.1), будем называть активной, если величина Φ возрастает, и пассивной, если величина Φ убывает.

При условии, что функция $\varphi(\Omega)$ является возрастающей, величина Φ будет возрастать или убывать тогда, когда возрастает или убывает величина Ω .

Таким образом, деформацию бесконечно малого элемента нелинейного анизотропного тела, следующего уравнениям (1.1), можно называть активной, если величина Ω возрастает, и пассивной, если величина Ω убывает.

В соответствии с началами термодинамики [6, 7] величины Φ и Ω связаны между собой [4]:

$$\Phi = \varphi(\Omega). \quad (1.8)$$

Из условия термодинамического равновесия вытекает, что функция $\varphi(\Omega)$ должна быть возрастающей.

Представим функцию $\varphi(\Omega)$ следующим образом:

$$\varphi(\Omega) = [1 - \tilde{\varphi}(\Omega)]\Omega. \quad (1.9)$$

С учетом формул (1.8) и (1.9) уравнения (1.1) принимают вид

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.10)$$

§2. Постановка краевой задачи.

Пусть система координат x^1, x^2, x^3 , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (2.1)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения \mathbf{u} .

Представим компоненты тензора \mathbf{D} через частные производные от компонент вектора \mathbf{u} по координатам, для чего обратимся к соотношениям Коши [15]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} (\varepsilon, \zeta). \quad (2.2)$$

Привлекая соотношения (2.2), запишем уравнения (1.10) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (2.3)$$

В силу соотношений (2.2) первый и четвертый из инвариантов (1.3) будут

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (2.4)$$

Предположим, что тело является ортотропным, а главные направления совпадают с направлениями осей x^1, x^2, x^3 .

Остановимся на случае плоского напряженного состояния, в котором

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (2.5)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (2.6)$$

Так как $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$, то, учитывая равенства (2.1) и первые четыре из равенств (2.6), на основании уравнений (2.3) установим, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (2.7)$$

А учитывая равенства (2.1) и пятое из равенств (2.6), на основании уравнений (2.3) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (2.8)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
G^{1111} &\equiv \mu_{AA}; \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}; \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}; \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD}; \\
G^{1133} &\equiv \mu_{AF}; \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}; \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF}; \\
G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{AA}; \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{AD}; \\
G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{DA}; \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{DD}.
\end{aligned}$$

Согласно уравнениям (2.3), а также равенствам (2.1) и выражению (2.8), для компонент тензора \mathcal{S} , не равных нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}
S^{11} &= \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \check{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right]; \\
S^{12} = S^{21} &= \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \check{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \\
S^{22} &= \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \check{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right]. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

В соответствии с равенствами (2.1) первый из инвариантов (2.4) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (2.10)$$

Используя равенства (2.7), представим второй из инвариантов (2.4) в виде

$$\begin{aligned}
\Xi &= \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\
&\quad + \left(2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Обратимся к уравнениям Навье [15]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.12)$$

Допустим, что тело однородно.

Учитывая формулы (2.5), а также используя равенства (2.6) и уравнения (2.9), на основании уравнений (2.12) установим

$$\begin{aligned}
\check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) &= Q^1; \\
\mu_{BB} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \right) + \check{\mu}_{DA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\} + \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\check{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right]; \\
Q^2 &= \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\check{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\}. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

На границах тела, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения \mathbf{P} с компонентами P^α .

Обратимся к граничным условиям [15]:

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \quad (2.15)$$

где n_β – компоненты единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} .

Используя равенства (2.6) и уравнения (2.9), на основании условий (2.15) получим

$$\begin{aligned} \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\ \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^1 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \left[\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right\}; \\ R^2 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left[\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left(1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси x^1, x^2 .

Нагрузку на тело будем задавать симметрично относительно осей x^1, x^2 . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части тела, например, расположенной в первом квадранте (рис. 1).

Для верхней и боковой границ рассматриваемой части тела $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ и $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, соответственно. А для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения $-n_1 = 1$, $n_2 = 0$.

Будем считать, что только компонента P^1 вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе рассматриваемой части тела не равна нулю (рис. 1).

Введем вектор \mathbf{v} , показывающий смещение точек на верхней границе зоны предразрушения относительно точек на нижней границе зоны предразрушения.

Компоненты вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо представить, используя соответствующие уравнения, через компоненты вектора \mathbf{v} .

В записи через соответствующие квадратичные формы модуль $|\mathbf{P}| \equiv P$ вектора \mathbf{P} и модуль $|\mathbf{v}| \equiv v$ вектора \mathbf{v} будут

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}. \quad (2.18)$$

Положим, что $P|_{v=0} = P_0$.

Обратимся к таким уравнениям [1]:

$$P^\alpha = P_0 \left[\tilde{f}(v) - 1 \right] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}, \quad (2.19)$$

где $\tilde{f}(v)$ – функция, возрастающая в промежутке $(0, \eta)$.

Очевидно, что в данной задаче

$$v_1 > 0; \quad (2.20)$$

а

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (2.21)$$

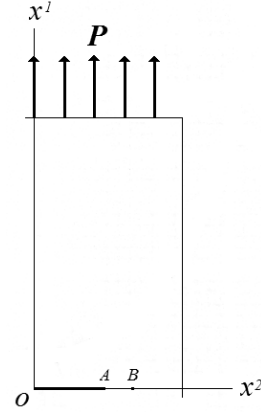


Рис. 1

Учитывая равенства (2.1), а также неравенство (2.20) и равенства (2.21), на основании второй из формул (2.18) получаем

$$v = v_1. \quad (2.22)$$

Для компоненты v_1 вектора \mathbf{v} имеем

$$v_1 = 2u_1. \quad (2.23)$$

Согласно уравнениям (2.19), равенствам (2.1), а также равенствам (2.21) и формуле (2.22), для компонент вектора \mathbf{P} будем иметь

$$P^1 = P_0 [\tilde{f}(v) - 1]; \quad (2.24)$$

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (2.25)$$

Для решения краевой задачи потребуются еще одна группа уравнений.

Из симметрии относительно осей x^1, x^2 следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) = 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) = 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Кроме того, из симметрии относительно оси x^2 вытекает, что компонента u_1 вектора \mathbf{u} в конце зоны предразрушения будет

$$u_1 = 0. \quad (2.27)$$

Выведем уравнение для компоненты u_2 вектора \mathbf{u} в конце зоны предразрушения.

Выделим около конца зоны предразрушения точку (a^1, a^2) . Будем полагать, что $u_2(x^1, x^2)$ – действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (до второго порядка включительно) в окрестности точки (a^1, a^2) .

Составив кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням $x^1 - a^1, x^2 - a^2$, и записав координаты конца зоны предразрушения как $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$, получаем

$$\begin{aligned} -u_2(a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2) + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Решение краевой задачи получим численно. Для этого частные производные в основных уравнениях представим через конечные разности.

Будут разобраны три варианта краевой задачи, различающиеся длиной зоны предразрушения. Для каждого из вариантов будет определена величина Ω . Сравнивая найденные значения для первого и второго (первый случай), а также для второго и третьего (второй случай) вариантов, выявим точки, в которых величина Ω не изменялась. Соединив эти точки, установим (в обоих случаях) границы области пассивной деформации.

§3. Числовой пример.

Использованы данные для сплава Д16, приведенные в статье [13].

Компоненты тензора \mathbf{F} являются такими:

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \quad F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Для второго из инвариантов (1.3) с учетом равенств (2.1) имеем:

$$Z = 0,250 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Компоненты тензора \mathbf{G} вычислены по формулам (1.4) (с учетом равенств (1.5)):

$$\begin{aligned} G^{1111} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1122} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1133} &= 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ G^{1212} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{1313} &= 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{2222} &= 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ G^{2233} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{2323} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}; & G^{3333} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ принята в виде [4]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega} & \Omega \in [\nu, \psi]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Постоянные ν и ψ , а также коэффициент a являются следующими:

$$\nu = 0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad \psi = 9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 0,1112866 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}.$$

В дальнейшем используем критерии нелинейности

$$\Omega = \nu \quad (3.2)$$

и прочности

$$\Omega = \psi, \quad (3.3)$$

установленные в статье [4].

Функция $\tilde{f}(\nu)$ принята в виде [1]

$$\tilde{f}(\nu) = b_{k_1} \nu^{k_1} + b_{k_2} \nu^{k_2}, \quad (3.4)$$

где k_1, k_2 – целые числа ($1 < k_1 < k_2$).

Коэффициенты b_{k_1}, b_{k_2} таковы:

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$m = - \left. \frac{d}{d\nu} \tilde{f}(\nu) \right|_{\nu=\eta}.$$

Принято, что

$$k_1 = 2; \quad k_2 = 3; \quad m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

По формулам (3.5) вычислены коэффициенты b_{k_1}, b_{k_2} :

$$b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}; \quad b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Размеры рассматриваемой части тела по осям x^1, x^2 , обозначенные $s_{(1)}, s_{(2)}$, соответственно, приняты такими:

$$s_{(1)} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad s_{(2)} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Координата x^2 начала зоны предразрушения (точки A) записана как x_f^2 , а конца зоны предразрушения (точки B) – как x_g^2 (рис. 1).

Были заданы

$$x_f^2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_g^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Итак, длина трещины $l_R = x_f^2$ была равна $1,50 \cdot 10^{-2}$ м, а длина зоны предразрушения $l_S = x_g^2 - x_f^2$ составляла $0,08 \cdot 10^{-2}$ м для первого варианта, $0,10 \cdot 10^{-2}$ м для второго варианта, $0,12 \cdot 10^{-2}$ м для третьего варианта.

Компонента P^1 вектора \mathbf{P} в точках на верхней границе рассматриваемой части тела выражена через параметр w : $P^1 = w$.

Решая краевую задачу, следовало определить параметр w (из условия, что в точке B соблюдается критерий (3.3)).

При решении краевой задачи принимали во внимание, что в точке B компонента S^{11} тензора \mathbf{S} должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = P_o. \quad (3.6)$$

Изначально величину P_o и параметр w задавали.

Затем, используя уравнения (2.13), (2.16), уравнение (2.24) и первое из равенств (2.25), а также уравнения (2.26) – (2.28), определяли компоненты u_1, u_2 . Делали это по методу последовательных приближений, изложенному в статье [11]. В первом приближении полагали, что $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$. При этом в соответствии с формулами (2.14) и (2.17) имели место равенства $Q^1, Q^2 = 0$ и $R^1, R^2 = 0$. Кроме того, в первом приближении полагали, что $\tilde{f}(v) = 0$. В каждом последующем приближении, одном из восьмидесяти девяти приближений, значения функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$, величин Q^1, Q^2 и R^1, R^2 , а также функции $\tilde{f}(v)$ устанавливали на основе значений компонент u_1, u_2 , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулу (3.1), вторую из формул (1.2), инварианты (2.10), (2.11), выражение (2.8), формулы (2.14), (2.17), а также формулы (3.4), (2.22) и (2.23).

После этого по первому из уравнений (2.9) вычисляли компоненту S^{11} тензора \mathbf{S} в точке B . Если она не удовлетворяла равенству (3.6), то величину P_o корректировали, и всю процедуру повторяли.

Наконец, проверяли соблюдение критерия (3.3) в точке B . Если это не имело места, то параметр w изменяли.

§4. Анализ полученных результатов.

В результате решения краевой задачи определен параметр w (табл. 1).

Из табл. 1 явствует, что с повышением параметра w увеличивается длина зоны предразрушения.

Таблица 1

$l_S \cdot 10^2, \text{м}$	$w \cdot 10^{-7}, \text{Па}$
0,08	5,8463
0,10	5,9037
0,12	5,9098

В результате решения краевой задачи определены также компонента u_1 вектора \mathbf{u} и компонента S^{11} тензора \mathbf{S} в точках, принадлежащих верхней границе зоны предразрушения (для нее $x^1 = 0$). В табл. 2 приведены значения $u_1 \cdot 10^5, \text{м}$ и $S^{11} \cdot 10^{-8}, \text{Па}$ (верхние и нижние значения, соответственно).

Таблица 2

$w \cdot 10^{-7}, \text{Па}$	$x^2 \cdot 10^2, \text{м}$						
	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62
5,8463	1,5218 0,9701	1,1935 1,3075	0,8164 1,6452	0,4379 1,8893	0 2,0026		
5,9037	1,7951 0,6795	1,5104 0,9831	1,1819 1,3200	0,8118 1,6503	0,4356 1,8919	0 2,0046	
5,9098	2,0311 0,4345	1,7908 0,6858	1,5063 0,9897	1,1808 1,3238	0,8110 1,6539	0,4352 1,8947	0 2,0087

Согласно табл. 2, с повышением параметра w увеличивается компонента u_1 вектора \mathbf{u} в точках на верхней границе зоны предразрушения. При этом, в соответствии с формулами (2.22) и (2.23), увеличивается модуль v вектора \mathbf{v} . Поэтому, в силу

уравнения (2.24), увеличивается, оставаясь отрицательной, компонента P^1 вектора P . А это означает, что уменьшается компонента S^{11} тензора S в точках на верхней границе зоны предразрушения. Однако компонента S^{11} тензора S в конце зоны предразрушения не только не уменьшается, но даже несколько увеличивается.

В ходе решения краевой задачи определялась величина Ω . В табл. 3 приведены отдельные значения $\Omega \cdot 10^{-3}, \text{Па}^{1/2}$ для первого, второго и третьего вариантов (верхние, средние и нижние значения, соответственно). Анализируя данные значения, обнаруживаем, что к началу координат примыкает область активной деформации. В этой области с повышением параметра w величина Ω возрастает. Это происходит при повышении параметра w как с $5,8463 \cdot 10^7 \text{ Па}$ до $5,9037 \cdot 10^7 \text{ Па}$, так и с $5,9037 \cdot 10^7 \text{ Па}$ до $5,9098 \cdot 10^7 \text{ Па}$. В обоих случаях протяженность области активной деформации по осям x^1, x^2 составляет более $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, но менее $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Таблица 3

$x^1 \cdot 10^2, \text{м}$	$x^2 \cdot 10^2, \text{м}$				
	0	0,5	1,0	1,5	2,0
0	0,32257	0,32662	0,34965	1,42232	0,52491
	0,32703	0,33127	0,35504	1,16041	0,55568
	0,32897	0,33333	0,35718	0,97908	0,58116
0,5	0,14048	0,13293	0,17726	0,45737	0,63892
	0,14342	0,13545	0,17590	0,45777	0,66956
	0,14546	0,13715	0,17281	0,45104	0,68917
1,0	0,05626	0,10300	0,20916	0,32621	0,41049
	0,05671	0,10295	0,20926	0,32817	0,41897
	0,05676	0,10191	0,20729	0,32740	0,42215
1,5	0,07642	0,11804	0,19646	0,27143	0,32376
	0,07600	0,11805	0,19726	0,27347	0,32764
	0,07480	0,11693	0,19635	0,27333	0,32893
2,0	0,11098	0,13628	0,18972	0,24471	0,29043
	0,11087	0,13658	0,19087	0,24697	0,29411
	0,10970	0,13564	0,19039	0,24721	0,29536
2,5	0,13974	0,15516	0,19128	0,23239	0,26991
	0,14004	0,15579	0,19265	0,23472	0,27328
	0,13905	0,15501	0,19236	0,23506	0,27433
3,0	0,16299	0,17272	0,19709	0,22701	0,25562
	0,16372	0,17368	0,19863	0,22928	0,25862
	0,16297	0,17309	0,19844	0,22959	0,25941
3,5	0,18172	0,18797	0,20425	0,22520	0,24565
	0,18285	0,18926	0,20595	0,22743	0,24837
	0,18235	0,18887	0,20585	0,22768	0,24895
4,0	0,19651	0,20050	0,21112	0,22512	0,23882
	0,19798	0,20208	0,21296	0,22731	0,24134
	0,19771	0,20187	0,21295	0,22753	0,24177
4,5	0,20775	0,21019	0,21678	0,22557	0,23412
	0,20949	0,21200	0,21875	0,22776	0,23651
	0,20939	0,21194	0,21847	0,22796	0,23684
5,0	0,21568	0,21705	0,22079	0,22583	0,23075
	0,21761	0,21902	0,22285	0,22801	0,23305
	0,21764	0,21908	0,22297	0,22821	0,23332

Анализируя значения, приведенные в табл. 3, также обнаружим, что с областью активной деформации граничит область пассивной деформации. В этой области с повышением параметра w величина Ω убывает. Координаты x^1, x^2 точек, принадлежащих области пассивной деформации, удовлетворяют в первом случае неравенствам

$0 \leq x^1 < 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $0 \leq x^2 < 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, а во втором случае неравенствам $0 \leq x^1 < 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $0 \leq x^2 < 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Распределение величины Ω по верхней границе зоны предразрушения и в ее окрестности иллюстрируют рис. 2, а (первый вариант), б (второй вариант), в (третий вариант). Для кривых 1 координата x^1 равна нулю, а для кривых 2 и кривых 3 – составляет $0,10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и $0,20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, соответственно.

В конце зоны предразрушения величина Ω принимает наибольшее значение, составляющее $9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$. Это само собой разумеется, ибо при решении краевой задачи требовалось, чтобы в конце зоны предразрушения соблюдался критерий (3.3).

Покажем, как с повышением параметра w , а значит и с увеличением длины зоны предразрушения (см. табл. 1), изменяется в некоторых точках перед трещиной величина Ω .

Выделим точки с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Если параметр w равен $5,8463 \cdot 10^7 \text{ Па}$, то конец зоны предразрушения совпадает с точкой, имеющей координаты $x^1 = 0$, $x^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

При повышении параметра w с $5,8463 \cdot 10^7 \text{ Па}$ до $5,9037 \cdot 10^7 \text{ Па}$ и с $5,9037 \cdot 10^7 \text{ Па}$ до $5,9098 \cdot 10^7 \text{ Па}$ конец зоны предразрушения продвигался в точки с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и $x^1 = 0$, $x^2 = 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Графики зависимостей величины Ω от длины зоны предразрушения для точек с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ представлены на рис. 3 (кривые 1, 2, 3, соответственно).

Следует подчеркнуть, что в выделенных точках величина Ω существенно зависит от длины зоны предразрушения.

По мере приближения конца зоны предразрушения к выделенной точке величина Ω в ней заметно возрастает, а по мере удаления от нее – убывает. Это отвечает распределению величины Ω по верхней границе зоны предразрушения (рис. 2, а, б, в).

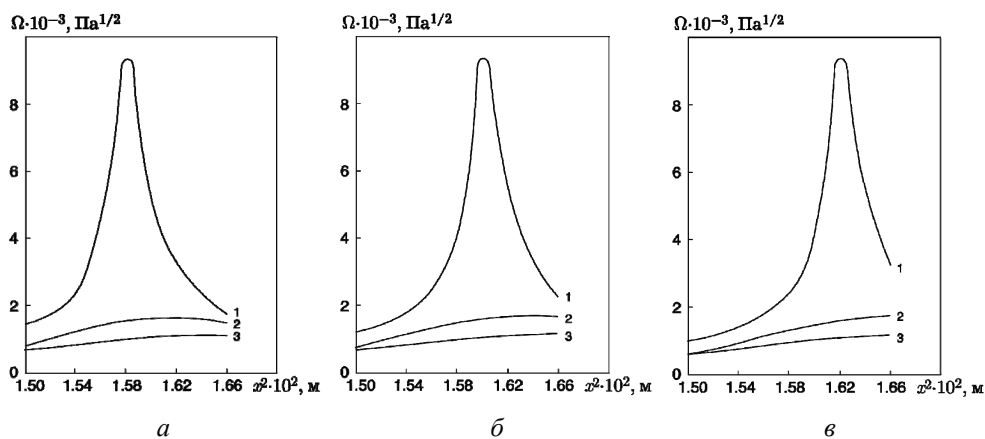


Рис. 2

Когда конец зоны предразрушения оказывается в какой-либо из выделенных точек, величина Ω принимает в этой точке значение $9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$.

Для всех вариантов в точках с координатами $x^1 = ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), $x^2 = jh$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) ($h = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}$) определялась величина Ω .

Сравнение найденных значений для первого и второго, а также для второго и третьего вариантов позволило выявить точки, в которых величина Ω оставалась неизменной при повышении параметра w . По этим точкам построены границы области пассивной деформации. Они показаны пунктирными линиями на рис. 4, *a* (первый случай), *б* (второй случай). Как видно, в первом и во втором случаях область пассивной деформации получилась различной.

С повышением параметра w происходило расширение области пассивной деформации в направлениях осей x^1, x^2 . Так, наибольший размер области пассивной деформации в направлении оси x^1 в первом и во втором случаях составил $2,12 \cdot 10^{-2}$ м и $4,84 \cdot 10^{-2}$ м, соответственно. Вместе с тем, наибольший размер области пассивной деформации в направлении оси x^2 в первом и во втором случаях оказался меньшим, равным $1,62 \cdot 10^{-2}$ м и $1,64 \cdot 10^{-2}$ м, соответственно.

Интересно, что при повышении параметра w с $5,9037 \cdot 10^7$ Па до $5,9098 \cdot 10^7$ Па нижняя граница области пассивной деформации, в отличие от ее верхней границы, не претерпела существенных изменений. Она лишь несколько сместилась к началу координат.

Для второго и третьего вариантов выявлены точки, в которых величина Ω принимала значение $0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}$, т.е. соблюдался критерий (3.2). Эти точки соединены линиями, являющимися границами зоны нелинейности. Сама зона нелинейности показана в виде затемненной области на рис. 4, *a* (второй вариант), *б* (третий вариант).

Появившись возле вершины трещины, зона нелинейности почти полностью вышла на боковую границу рассматриваемой части тела. Исключением стал лишь малый участок этой границы напротив трещины.

Сопоставляя область пассивной деформации с зоной нелинейности, можно констатировать следующее. По форме область пассивной деформации напоминает зону нелинейности. Но есть между ними и существенные различия. Если область пассивной деформации выходит на ось x^1 , то зона нелинейности – на боковую границу рассматриваемой части тела. Заслуживает внимания и то, что размеры зоны нелинейности слабо зависят от параметра w . В частности, ее площадь с повышением параметра w лишь незначительно увеличивается.

$\Omega \cdot 10^{-3}, \text{ Па}^{1/2}$

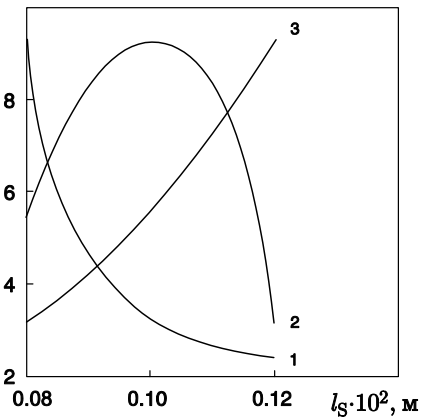
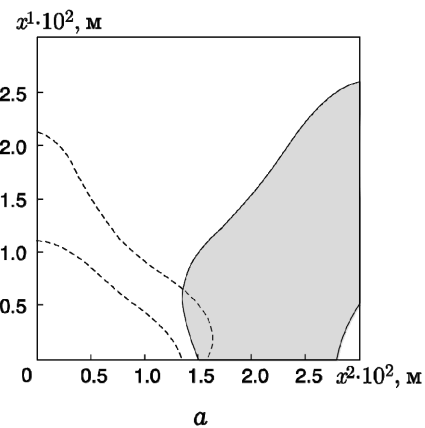
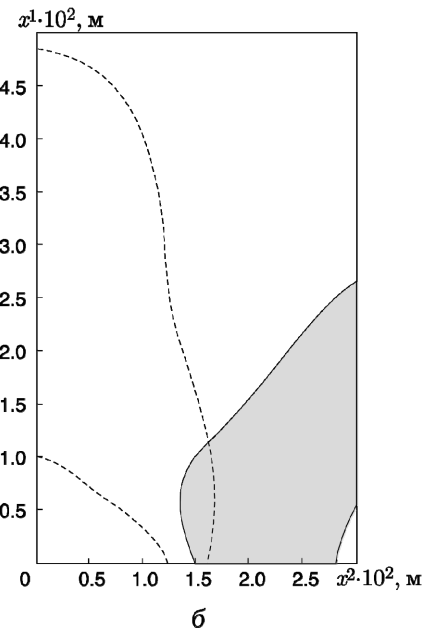


Рис. 3



a



б

Рис. 4

Заклучение.

Рассмотрено нелинейное упругое ортотропное тело малой толщины с трещиной нормального отрыва, у вершины которой имеется зона предразрушения. В компонентах вектора перемещения поставлена краевая задача о равновесии этого тела. При этом использованы уравнения, связывающие компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения с компонентами вектора смещения относительно друг друга этих точек. В результате решения краевой задачи установлено, что вокруг зоны предразрушения возникает область пассивной деформации. Проанализировано деформированное состояние в некоторых точках области пассивной деформации. Изучена эволюция области пассивной деформации, происходящая при нагружении тела. Выполнено сопоставление области пассивной деформации с зоной нелинейности возле вершины трещины.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто нелінійне пружне ортотропне тіло малої товщини з тріщиною нормального відриву, перед вершиною якої є зона передруйнування. У компонентах вектора переміщення поставлено крайову задачу про рівновагу цього тіла. При цьому використано рівняння, які зв'язують компоненти векторів напруження в точках на протилежних межах зони передруйнування й компоненти вектора зміщення відносно одна одної цих точок. В результаті розв'язання крайової задачі встановлено, що навколо зони передруйнування виникає область пасивної деформації. Проаналізовано деформований стан в деяких точках області пасивної деформації. Досліджена еволюція області пасивної деформації, котра відбувається при навантаженні тіла. Порівняно області пасивної деформації та зони нелінійності біля вершини тріщини.

1. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле // Доп. НАН України. – 2017. – № 5. – С. 25 – 33.
2. Ильющин А.А. Пластичность. – Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. – 376 с.
3. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле // Доп. НАН України. – 2018. – № 10. – С. 44 – 55.
4. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела // Доп. НАН України. – 2015. – № 9. – С. 46 – 53.
5. Хенки Х. Развитие и современное состояние теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1940. – 4, № 3. – С. 31 – 36.
6. Clausius R. Uber eine veranderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Warmetheorie // Annalen der Physik und Chemie. – 1854. – 93, N 12. – P. 481 – 506.
7. Helmholtz H. Uber die Erhaltung der Kraft // Wissenschaftliche Abhandlungen. – 1847. – 1, N 1. – P. 12 – 75.
8. Hencky H. Zur Theorie plastische Deformationen // Proc. 1-st Int. Congress Appl. Mech. – Delft, 1924. – P. 312 – 317.
9. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of Tension Along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 130 – 148.
10. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Fracture Process Zone at the Tip of a Mode I Crack in a Nonlinear Elastic Orthotropic Material // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 23 – 40.
11. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E., Gavrilov G.V. Study of the Plastic Zone Near a Crack in an Anisotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 7. – P. 749 – 764.
12. Kurchakov E.E. Experimental Study of the Plastic Zone at the Front of a Mode I Crack // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 213 – 219.
13. Kurchakov E.E. Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium // Sov. Appl. Mech. – 1979. – 15, N 9. – P. 803 – 807.
14. Lebedev A.A., Kovalchuk B.I., Giginjak F.F., Lamashewsky V.P. Handbook of Mechanical Properties of Structural Materials at a Complex Stress State. – New York: Begel House Inc., 2001. – 305 p.
15. Love A. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: At the University Press, 1927. – 674 p.
16. Nadai A. Plasticity. – New York – London: McGraw – Hill Book Company, 1931. – 186 p.
17. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A Semi-Analytical Solution Method for Problems of Cohesive Fracture and Some of Its Applications // Int. J. of Fracture. – 2018. – 212, N 1. – P. 113 – 121.
18. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., Kononchuk O.P. Determination of Crack Opening Displacement and Critical Load Parameter within a Cohesive Zone Model // Cont. Mech. and Thermodynamics. – 2019. – 31, N 2. – P. 569 – 586.

Поступила 30.05.2019

Утверждена в печать 09.07.2020