

В.Б.Ларин<sup>1</sup>, А.А.Тунник<sup>2</sup>

**ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ОТКАЗЕ ДАТЧИКА  
В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА**

<sup>1</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

<sup>2</sup>НАУ, проспект Комарова, 1, Киев, Украина; e-mail: aatunik@hotmail.com

**Abstract.** An algorithm of synthesis the regulator of quadrocopter lateral movement is offered. This algorithm guarantees a stability of system in the case of the sensor failure which is measuring the roll angle. The synthesized regulator does not demand the change of configuration of the circuit of feedback at the sensor refusal. It is marked, that all procedures connected to synthesis of such regulator can be executed with the help of standard procedures of the MATLAB package.

**Key words:** quadrocopter, fault isolation, feedback.

**Введение.**

В инженерной практике значительное место занимают математические задачи, которые, в той или иной постановке, могут быть связаны с управлением механическими системами (см., например [1, 3, 6, 8]). Сюда же можно отнести и некоторые задачи повышения надежности функционирования системы (см., например [4, 12, 13]). Так, в [9] задача повышения надежности системы управления боковым движением quadroкоптера была рассмотрена в такой постановке: в случае отказа датчика, определяющего угол крена, предлагалось использовать в качестве источника соответствующей информации сигнал динамического наблюдателя (т.е. имеет место изменение конфигурации цепи обратной связи). Ниже рассматривается задача повышения надежности системы управления боковым движением quadroкоптера, в которой не используется процедура изменения конфигурации цепи обратной связи. Так, предполагая, что в случае отказа датчика крена его сигнал будет равен нулю, рассматривается задача обеспечения устойчивости замкнутой системы (без изменения ее конфигурации) как в случае штатного функционирования, так и в случае отказа соответствующего датчика. Таким образом, на синтезированный регулятор накладываются дополнительные условия.

Ниже описан алгоритм синтеза регулятора бокового движения quadroкоптера, который обеспечивает устойчивость системы в случае отказа датчика, измеряющего угол крена. Эта задача рассматривается в предположении, что доступен наблюдению весь фазовый вектор и система имеет один вход. Отмечается, что процедура синтеза такого регулятора допускает реализацию путем использования стандартных процедур пакета MATLAB [5].

**§1. Общее соотношение.**

Пусть  $\xi = [x \ y \ z]^T$  – радиус-вектор центра quadroкоптера;  $\psi, \theta, \varphi$  – углы рыскания, тангажа и крена, соответственно.  $f_i$  – подъемная сила  $i$ -го двигателя  $M_i$

( $i = \overline{1,4}$ ). Штрих здесь и далее обозначает транспонирование. Согласно [3], уравнения движения такой системы имеют такой вид:

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta ; \quad (1.1)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \varphi ; \quad (1.2)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \varphi - mg ; \quad (1.3)$$

$$\dot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi ; \quad (1.4)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta ; \quad (1.5)$$

$$\ddot{\varphi} = \tilde{\tau}_\varphi . \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.1) – (1.6)  $m$  – масса аппарата;  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> – ускорение силы тяжести;  $u$ ,  $\tilde{\tau}_\psi$ ,  $\tilde{\tau}_\theta$ ,  $\tilde{\tau}_\varphi$  – управляющие воздействия, которые являются функциями  $f_1$ . В [4] воздействие  $u$  используется для управления высотой положения аппарата, управление  $\tilde{\tau}_\psi$  позволяет стабилизировать угол рыскания. Воздействия  $\tilde{\tau}_\theta$  и  $\tilde{\tau}_\varphi$  используются для управления углами  $\theta$  и  $\varphi$ , и перемещением аппарата по осям  $x$  и  $y$ , соответственно.

Согласно [3], управление высотой полета аппарата определяется следующим соотношением (предполагается, что  $\cos \theta \cos \varphi \neq 0$ ):

$$u = (r_1 + mg) \frac{1}{\cos \theta \cos \varphi} . \quad (1.7)$$

В (1.7)

$$r_1 = -a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d) . \quad (1.8)$$

В (1.8)  $a_{z_1}$ ,  $a_{z_2}$  – положительные константы, а  $z_d$  является заданной высотой полета. Аналогичным является алгоритм управления углом рыскания.

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d) . \quad (1.9)$$

Предполагая, что  $\cos \theta \cos \varphi \neq 0$ , согласно (1.7) – (1.9), имеем:

$$m\ddot{x} = -(r_1 + mg) \frac{\tan \theta}{\cos \varphi} ; \quad (1.10)$$

$$m\ddot{y} = (r_1 + mg) \tan \varphi ; \quad (1.11)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d)) ; \quad (1.12)$$

$$\dot{\psi} = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d) . \quad (1.13)$$

В (1.12), (1.13) коэффициенты  $a_{\psi_1}$ ,  $a_{\psi_2}$ ,  $a_{z_1}$ ,  $a_{z_2}$  должны быть выбраны из условия асимптотической устойчивости этих систем, что, в свою очередь, обеспечит выполнение условия  $\psi \rightarrow \psi_d$ ,  $z \rightarrow z_d$ .

В [3] отмечено, что после окончания переходных процессов в системах (1.12), (1.13) можно соотношения (1.10), (1.11) заменить следующими:

$$\ddot{x} = -g \frac{\tan \theta}{\cos \varphi}; \quad (1.14)$$

$$\dot{y} = g \tan \varphi. \quad (1.15)$$

Считая углы  $\theta$ ,  $\varphi$  малыми и, приняв во внимание уравнения (1.5), (1.6) в [4] приводятся следующие соотношения, определяющие изменения этих координат:

$$\dot{y} = g\varphi; \quad (1.16)$$

$$\ddot{\varphi} = \bar{\tau}_\varphi; \quad (1.17)$$

$$\dot{x} = -g\theta; \quad (1.18)$$

$$\ddot{\theta} = \bar{\tau}_\theta. \quad (1.19)$$

В [3] на примерах проведено сравнение линейных и нелинейных алгоритмов стабилизации аппарата. Так, в качестве примера рассмотрена система (1.16), (1.17), которую можно представить в следующем виде:

$$\dot{p} = Ap + Bu; \quad p = [y, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}]'; \quad (1.20)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]'; \quad u = \bar{\tau}_\varphi.$$

Для системы (1.20) авторы [3] синтезируют оптимальный линейный регулятор в соответствии со следующим критерием качества:

$$J = \int_0^{\infty} (p'Qp + u'Ru) dt. \quad (1.21)$$

В [11] при исходных данных (приведенных на Fig. 5 [3]):  $y(0) = 200\text{ м}$ ;  $\dot{y}(0) = 0$ ;  $\varphi(0) = 40^\circ$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$  проведено сравнение переходных процессов в случае линейного регулятора и нелинейного регулятора. В [10, 11] отмечено, что сравнение переходных процессов говорит о том, что линейный регулятор может обеспечить лучшие параметры этих процессов, чем нелинейный регулятор [3].

## §2. Динамический наблюдатель.

Предположим, что в системе (1.20) не наблюдается угол  $\varphi$  («отказ» соответствующего датчика). В этой связи возникает задача синтеза динамического наблюдателя, выход которого можно было бы использовать в алгоритме формирования управляющего воздействия.

Как показано в [9], структура системы (1.20) позволяет выбрать в качестве уравнения наблюдателя следующее соотношение:

$$\dot{z} = \dot{\varphi} + D, \quad (2.1)$$

в котором константа  $D$  обеспечивает его динамические свойства.

Таким образом, уравнение движения системы (1.20), дополненное уравнением наблюдателя (2.1), имеют вид:

$$\dot{p} = A_z p + B u; \quad p = [y \quad \dot{y} \quad \varphi \quad \varphi' \quad z]'; \quad (2.2)$$

$$B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]'; \quad A_z = \begin{bmatrix} A & A_0 \\ A_1 & D \end{bmatrix}; \quad A_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'; \quad A_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1],$$

матрица  $A$  определяется (1.20).

### §3. Процедура оптимизации.

Для оптимизации системы (2.2) можно использовать различные численные процедуры выбора регулятора, стабилизирующего систему по выходной переменной [1]. Однако, используя специфику структуры системы (2.2), можно указать «нетрадиционный» алгоритм оптимизации.

Итак, пусть в оптимизируемом функционале (1.21) матрица  $Q$  имеет следующую структуру:

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Размер матрицы  $Q$  равен  $5 \times 5$ , ненулевой блок  $\bar{Q}$  имеет размер  $4 \times 4$ . В случае, когда наблюдаются все координаты, оптимизируя систему (2.2) в соответствии с критерием оптимальности (1.21), (3.1), получим уравнения оптимального регулятора, который, как следствие структуры системы (2.2), будет иметь следующий вид:

$$K1 = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad 0]. \quad (3.2)$$

В случае, когда не наблюдается координата  $\varphi$ , уравнение регулятора (3.2) можно заменить следующим:

$$K3 = [k_1 \quad k_2 \quad 0 \quad k_4 \quad k_3]. \quad (3.3)$$

Отметим, что, переход от регулятора (3.2) к регулятору (3.3) связан с переключением, т.е. с изменением структуры цепи обратной связи. Возникает вопрос можно ли не менять конфигурацию системы в случае отказа датчика, измеряющего угол  $\varphi$ . Естественно, что при этом система должна оставаться устойчивой.

В этой связи пополним список регуляторов (3.2), (3.3) следующим:

$$K2 = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_3]. \quad (3.4)$$

Пусть объект с каждым из регуляторов (3.2) – (3.4) является устойчивым. Очевидно, если на объекте установлен регулятор (3.4), то в случае отказа датчика (координата  $x_3 = 0$ ), фактически, объект будет функционировать с регулятором (3.3). В свою очередь, это не требует, отмеченного выше, переключения регулятора в (3.2) на (3.3). Подчеркнем, что это возможно при условии, что объект сохраняет устойчивость как при регуляторе (3.4), так и при регуляторе (3.3). В этой связи, рассмотрим следующую процедуру оптимизации величины коэффициента  $k_3$  в регуляторах (3.3), (3.4). Оптимизируя систему (2.2) в соответствии с критерием (1.21), в котором матрица  $Q$  имеет вид (3.1). Найдем регулятор (3.2). Зафиксировав в (3.3), (3.4) значения коэффициентов  $k_1, k_2, k_4$ , определим оптимальное значение фигурирующего в (3.3), (3.4) коэффициента  $k_3$ . Процедура оптимизации величины коэффициента  $k_3$ , фигурирующего в (3.3), (3.4), состоит в следующем. Для принятого значения коэффициента  $k_3$  определяются  $\lambda_2, \lambda_3$  минимальные собственные значения матриц  $E_2, E_3$ , которые являются решениями следующих уравнений Ляпунова:

$$E_2 A_{z_2} + A_{z_2}^T E_2 + E_0 = 0; \quad E_3 A_{z_3} + A_{z_3}^T E_3 + E_0 = 0; \quad (3.5)$$

$$A_{z_2} = A - BK2; \quad A_{z_3} = A - BK3;$$

$E_0$  – единичная матрица размера  $5 \times 5$ .

Определяется значение  $\lambda = \min(\lambda_2, \lambda_3)$ . Далее, варьируя  $k_3$ , находим такое значение этого коэффициента, которому соответствует максимальное значение  $\lambda$ . Если найденное таким образом значение  $\lambda > 0$ , то можно утверждать, что соответствующее значение  $k_3$  обеспечивает устойчивость замкнутой системы как с регулятором  $K2$ , так и с регулятором  $K3$ .

Отметим, что все описанные выше процедуры могут быть реализованы с помощью стандартных процедур пакета MATLAB. Так, для определения  $K1$  можно использовать процедуру care.m. Для поиска решения уравнения Ляпунова можно использовать процедуру lyap.m, а для определения оптимального значения  $k_3$ , можно использовать процедуру fmin.m. Проиллюстрируем сказанное выше примером.

**Пример.** В [9] был синтезирован регулятор, когда в (2.1)  $D = -0,05$ , в (3.1)

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 30 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 & -12 \\ -4 & 8 & 16 \cdot 10^4 & -24 \\ 6 & -12 & -24 & 36 \cdot 10^4 \end{bmatrix}; \quad R = 10^4. \quad (3.6)$$

Однако, судя по рис. 3 [9], регулятор, синтезированный с такой матрицей  $Q$  не обеспечивает достаточно быстрое затухание угла  $\varphi$ . В этой связи целесообразно уменьшить значение элемента  $\bar{Q}(1,1)$  до значения  $\bar{Q}(1,1) = 3$ .

$$R_0 = 10^4; \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 & -12 \\ -4 & 8 & 16 \cdot 10^4 & -24 \\ 6 & -12 & -24 & 36 \cdot 10^4 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

При таких исходных данных (см. (3.7)), синтезированный регулятор  $K1$  имеет вид:

$$K1 = [0,0173 \quad 0,1469 \quad 5,9681 \quad 6,9236 \quad 0]. \quad (3.8)$$

Ему соответствует спектр замкнутой системы:

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} -5,9623 \\ -0,6722 \\ -0,1445 + 0,1465i \\ -0,1445 - 0,1465i \\ -0,0500 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в (3.8) коэффициент  $k_3 = 5,9681$ . После описанной выше процедуры оптимизации имеем следующее значение для  $k_3 = 6,7989$ . Ему соответствуют следующие выражения для регуляторов  $K2$  и  $K3$ :

$$K2 = [0,0173 \quad 0,1469 \quad 6,7989 \quad 6,9236 \quad 6,7989];$$

$$K3 = [0,0173 \quad 0,1469 \quad 0 \quad 6,9236 \quad 6,7989].$$

Им отвечают следующие собственные значения замкнутых систем:

$$E_{a2} = \begin{bmatrix} -3,4234 + 1,1569i \\ -3,4234 - 1,1569i \\ -0,0409 + 0,1132i \\ -0,0409 - 0,1132i \\ -0,0448 \end{bmatrix}; \quad E_{a3} = \begin{bmatrix} -5,7791 \\ -0,9912 \\ -0,0795 + 0,1645i \\ -0,0795 - 0,1645i \\ -0,0444 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1 – 4 приведены графики переходных процессов в системе при исходных данных примера [3] ( $x_1 = 200, x_2 = 0, x_3 = 40^\circ, x_4 = 0$ ). Здесь пунктирная линия соответствует регулятору  $K2$ , а штрихпунктирная –  $K3$ .

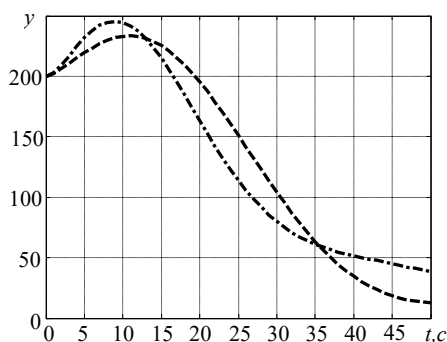


Рис. 1

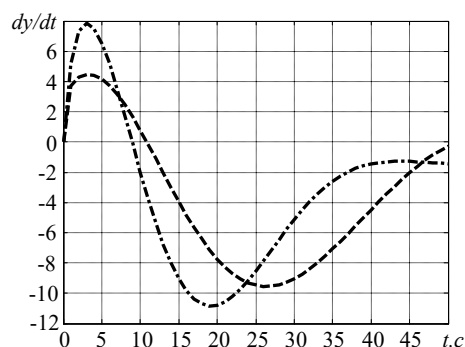


Рис. 2

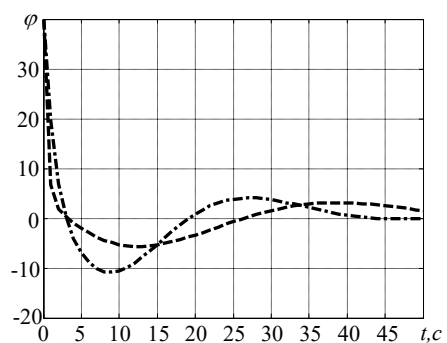


Рис. 3

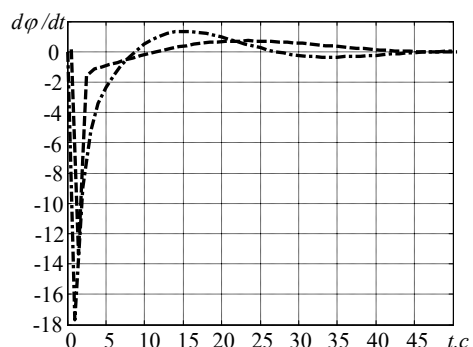


Рис. 4

Таким образом, оба регулятора ( $K2, K3$ ) обеспечивают устойчивость системы. Следовательно, регулятор  $K2$  может обеспечить работоспособность системы и при отказе датчика, определяющего  $\varphi$ . Другими словами, система с регулятором  $K2$  не требует изменения (переключения) конфигурации системы при отказе датчика  $\varphi$ .

#### Заключение.

Предложен алгоритм синтеза регулятора бокового движения квадрокоптера, который гарантирует устойчивость системы в случае отказа датчика, измеряющего угол крена. Синтезированный регулятор не требует изменения конфигурации цепи обратной связи при отказе вышеупомянутого датчика. Отмечается, что все процедуры, связанные с синтезом такого регулятора, могут быть выполнены с помощью стандартных процедур MATLAB.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано алгоритм синтезу регулятора бокового руху квадрокоптера, який гарантує стійкість системи у разі відмови датчика крену, що вимірює кут. Синтезований регулятор не вимагає зміни конфігурації ланцюга зворотного зв'язку при відмові вищезазначеного датчика. Наголошується, що всі процедури, пов'язані з синтезом такого регулятора можуть бути виконані за допомогою стандартних процедур MATLAB.

1. *Aliiev F.A., Larin V.B.* Stabilization Problems for a System with Output Feedback (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 3. – P. 225 – 267.
2. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia: SIAM. – 1994. – 193 p.
3. *Castillo P., Lozano R., Dzul A.* Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors // *IEEE Control Systems Magazine*. December. – 2005. – **25**, N6. – P. 45 – 55.
4. *Deyst J.J., Harrison J.V., Gai E., Daly K.C.* Fault Detection, Identification and Reconfiguration for Spacecraft Systems // *J. of the Astronautical Sciences*. – 1981. – XXIX, N 2. – P. 113 – 126.
5. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI Control Toolbox Users Guide. – Massachusetts: Natick, The MathWorks, Inc., 1995 – 310 p.
6. *Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P.* Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration. – NY: John Wiley&Sons, Inc., 2001. – 392 p.
7. *Khoroshun A.S.* Control of Takagi–Sugeno Fuzzy Fast/Slow Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 4. – P. 443 – 453.
8. *Khoroshun A.S.* Stabilization of Translation by an Eccentric Flywheel // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 600 – 610.
9. *Larin V.B.* Improving the Reliability of the Control Systems of a Quadcopter // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 4. – P. 454 – 462.
10. *Larin V.B., Tunik A.A.* Synthesis of the Quad-rotor Control Algorithms in the Basic Flight Modes // *TWMS J. of Pure and Appl. Math.* – 2018. – **9**, N 2. – P. 147 – 158.
11. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Problem of Synthesis of Control System for Quadcopter // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 342 – 348.
12. *Tanaka S., Muller J.C.* Fault detection in linear discrete dynamic systems by a pattern recognition of generalized-likelihood-ratio // *Transactions of the ASME, J. of Dynamic Systems. Measurement and Control*. – 1990. – 112. – P. 276 – 292.
13. *Tsay T.S.* Guidance and Control Laws for Quadrotor UAV // *WSEAS Trans. on System and Control*. – 2014. – **9**. – P. 606 – 613.

Поступила 16.01.2019

Утверждена в печать 05.11.2019