

В. Д. Кубенко<sup>1</sup>, И. В. Янчевский<sup>2</sup>

**АНОМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ЖИДКОСТЬЮ  
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ  
СФЕРИЧЕСКИМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ**

<sup>1</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup> *Национальный технический университет Украины «КПИ им. И. Сикорского»,  
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина, e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua*

**Abstract.** A semi-infinite circular cylindrical cavity filled with an ideal compressible liquid which contains a spherical body located near to its end is considered. The body surface radiates the periodic pressure with the given frequency and amplitude. The problem of determining the hydrodynamic characteristics of the system depending on the frequency of excitation and geometrical parameters is solved. The method of separation of variables, the translational addition theorems for the spherical wave functions, and the relations representing the spherical wave functions through the cylindrical ones and inverse are applied. This approach allows to satisfy all boundary conditions and to obtain the exact solution of boundary problem. The calculations are reduced to solving the infinite system of algebraic equations. Further, it is asserted that its solution obtained by the truncation method converges. Determination of the pressure fields and velocities is displayed that the considered system has the series of frequencies of excitation at which the acoustic performances can exceed several orders the amplitude of excitation. These anomalous frequencies differ from the frequencies inherent for an infinite cylindrical cavity with a spherical body. Thus, even in a case when the radius of spherical emitter is small, and therefore the anomalous phenomena in an infinite vessel are poorly expressed, in a semi-infinite vessel they can appear essentially.

**Key words:** semi-infinite cylindrical vessel, compressible liquid, spherical oscillator, anomalous phenomena.

**Введение.**

Взаимодействие акустических, упругих и электромагнитных волн с системой отражающих тел в безграничном пространстве является предметом многочисленных исследований уже более века и отражено в ряде монографий и статей. В подавляющем большинстве случаев рассматриваются системы однотипных тел, как правило, это системы либо цилиндрических, либо сферических тел [5, 7, 18, 27, 29]. При аналитическом подходе к решению задач для таких систем применяется разделение переменных в общем решении волновых уравнений в соответствующих системах координат и применяются трансляционные теоремы сложения для записи волновых функций в координатах каждого тела системы. Применяются также численные методы и методы граничных интегральных уравнений.

Дифракционные задачи для систем тел, ограниченных неоднотипными поверхностями, например, цилиндрическими и сферическими, исследованы в значительно меньшей степени. Можно указать на подход, изложенный в публикации [19], в которой, на основе представления цилиндрических волновых функций через сферические и обратно [6, 19], использования теорем сложения для цилиндрических волновых функций и, отдельно, для сферических функций [7, 13], предложен способ изучения дифракции стационарных акустических волн на системах неоднотипных препятствий, сводящий исходную граничную задачу к решению бесконечных систем алгебраических уравнений с коэффициентами в виде несобственных интегралов.

Наиболее доступными к исследованию являются осесимметричные задачи, когда внутри бесконечного акустического или упругого цилиндра расположено сферическое тело с центром на оси цилиндра, а действующая нагрузка обладает осевой либо центральной симметрией. Отметим несколько исследований такого рода. Отражение упругих волн сферическим препятствием внутри упругого цилиндра рассмотрено в работе [30]. Случай акустического волновода с акустически мягкой и жесткой поверхностью волновода и сферы представлен в статье [24]. В работе [8] изучается динамическое взаимодействие осциллирующей сферы с заполненной жидкостью цилиндрической оболочкой в упругой среде. Отражению волны кручения от поверхности сферической полости в упругом цилиндре посвящена публикация [23]. Несимметричное возбуждение такой системы рассмотрено в работе [17].

В практическом отношении такие задачи могут быть связаны с изучением акустических процессов в рамках установления принципов организации движения и взаимодействия плавающих частиц, капель жидкости, газовых пузырьков и кавитационных образований в топливопроводах посредством возникающих в таких процессах радиационных сил [16, 34]. Методы акустики достаточно интенсивно используются в разнообразных геофизических исследованиях, в нефтеразведке и нефтедобыче. В частности, расшифровка отраженного сигнала акустического источника, помещенного в ствол скважины, позволяет определить свойства извлекаемого продукта. Может быть предложено еще одно применение акустического излучателя в скважине. В публикациях [20, 21, 33] показано, что система, состоящая из заполненной жидкостью цилиндрической полости и погруженного в нее сферического тела, обладает так называемыми аномалиями или «условно резонансными» свойствами – при некоторых частотах возбуждения имеет место многократное увеличение акустического давления в полости. Это явление положено в основу патента Украины [9], согласно которому при закупоривании перфорированной области цилиндрического коллектора нефтяной скважины можно добиться очистки перфорации, возбуждая специально погружаемое в скважину тело на одной из «резонансных» частот системы. Очевидно, что скважина, ограниченная в донной части, например, рабочим инструментом, акустически более адекватно моделируется в виде заполненной жидкостью полубесконечной цилиндрической полости с жестким днищем (торцом). С учетом сказанного в публикации [22] построено аналитическое решение акустической задачи для полубесконечной круговой цилиндрической полости, заполненной сжимаемой жидкостью и содержащей сферическое тело. Рассматривается граничная задача Неймана – среда в жесткой полости цилиндра испытывает *кинематическое* возбуждение за счет излучаемой телом периодической радиальной скорости, торцевое сечение полости также является жестким. Установлено, что при такой постановке задачи в полубесконечном акустическом цилиндре появляются новые аномальные частоты, приводящие к существенному увеличению (на несколько порядков) гидродинамических характеристик.

В данной работе рассматривается акустическая система, принятая к рассмотрению в публикации [22], однако предполагается, что среда испытывает *динамическое* возбуждение за счет излучаемого сферическим телом акустического давления. Целью работы является получение частотных зависимостей для давления и скорости при различных соотношениях геометрических параметров системы с целью выявления возможных аномальных частот, обусловленных волновым взаимодействием сферического тела с торцом сосуда. Установлено, что, как и в случае кинематического возбуждения, изученного в работе [22], ограниченность сосуда с жидкостью в осевом направлении приводит к появлению в полубесконечном сосуде (при небольшом удалении сферического возбудителя от жесткого днища сосуда) аномальных частот, отличных от подобных частот, свойственных бесконечному сосуду. Амплитуды давления (скорости) при таких частотах многократно возрастают. При этом даже в случае, когда в бесконечном сосуде аномальные явления слабо выражены (радиус сферического излучателя мал по сравнению с радиусом сосуда), в полубесконечном сосуде они могут проявиться существенно.

Как и в работах [22, 32], решение задачи строится методом «мнимых источников» (методом изображений) [4, 5]: вместо полубесконечного сосуда с жидкостью вводится в рассмотрение бесконечный сосуд, в котором кроме реального тела предполагается наличие «мнимого» сферического тела, зеркально расположенного относительно торцевого сечения. Мнимое тело имеет тот же радиус и возбуждается таким образом, что удастся реализовать соответствующее граничное условие в торцевом сечении, моделирующее жесткое днище или свободную поверхность. Таким образом, фактически решается акустическая задача для двух одинаковых сферических тел, возбуждаемых специальным образом. Аналогичный прием использован в работе [14], в которой рассмотрена задача дифракции для сферического тела вблизи границы акустического полупространства. Здесь уместно вспомнить, что исследования рассеяния волн на системе двух сфер имеют многолетнюю историю, и одни из первых решений получены для акустической [15, 26], упругой [4, 5] и электромагнитной сред [3, 11] с применением теорем сложения для сферических волновых функций, являющихся решениями скалярных или векторных уравнений Гельмгольца. Указанные теоремы, по-видимому, впервые опубликованные в работах [7, 13], дают возможность представить волновое поле каждой сферы в координатах другой сферы и таким образом удовлетворить граничным условиям посредством разделения переменных. Задачи многократного отражения (multiple scattering), по-прежнему являются актуальными в различных областях естествознания (см. [27, 28]).

Для выполнения граничных условий на поверхности каждой сферы, а также на поверхности цилиндрической полости и ее торца применяются трансляционные теоремы сложения скалярных сферических волновых функций и соотношения, позволяющие представить сферические волновые функции через цилиндрические и обратно [6, 19]. В результате решение граничной задачи сведено к решению бесконечной системы алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов общего решения, матрица которой содержит несобственные интегралы. Бесконечная система решается методом усечения. Точность удовлетворения граничным условиям контролируется. Как результат определены зависимости акустического давления и скорости от частоты динамического возбуждения в характерных точках полости при различных соотношениях между радиусами полости и сферы и зазором между сферическим телом и днищем. Решена осесимметричная задача, однако, в принципе подход может быть развит для рассмотрения достаточно общих конфигураций.

Таким образом, в работе получено точное решение многосвязной скалярной задачи многократного рассеяния для полубесконечного сосуда с жидкостью и расположенным вблизи торца динамически возбуждаемым сферическим телом. Произведенные вычисления показали, что взаимодействие излучаемого сферическим телом акустического давления с днищем полубесконечной цилиндрической полости приводит к возникновению новых аномальных частот возбуждения [31], при которых происходит многократное повышение давления (скорости) в жидкости.

### **§1. Постановка задачи и общее решение.**

Полубесконечная жесткая круговая цилиндрическая полость заполнена идеальной сжимаемой жидкостью и содержит сферическое тело, на поверхности которого задано давление, периодически изменяющееся во времени с частотой  $\omega$ . Требуется найти волновой потенциал жидкости и через него зависимость давления и скорости от частоты колебаний в различных точках полости. Предположим, что сферическое тело находится на оси цилиндра и, таким образом, имеет место осевая симметрия. Обозначим через  $\rho_0$  радиус цилиндра;  $r_0$  – радиус сферы,  $h$  – расстояние между центром сферы и торцевым сечением цилиндра.

Отнесем рассматриваемую систему к цилиндрическим координатам  $(\rho, z)$  с началом в центре  $O$  торцевого сечения и введем также сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в точке  $O_1$ , совпадающей с центром тела (рис. 1). В дальнейшем координата  $\varphi$  выпадает из рассмотрения вследствие осевой симметрии.

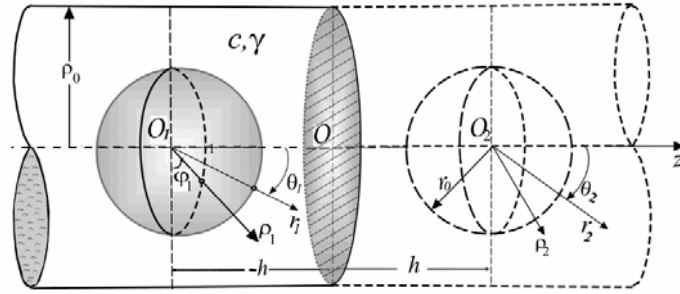


Рис. 1.

Используются безразмерные переменные, в которых характерными единицами являются радиус цилиндра  $\rho_0$ , скорость звука в жидкости  $c$  и величина  $\gamma c^2$ , имеющая размерность давления.

Здесь и далее обозначено:  $\gamma$  – плотность среды;  $p$  – заданное давление на поверхности сферического тела;  $\omega = 2\pi/\lambda$  – круговая частота ( $\lambda$  – длина волны);  $p$  и  $V$  – гидродинамические давление и скорость.

Если принять, что временной множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду подразумевается, то задача состоит в построении решения уравнения Гельмгольца относительно волнового потенциала возмущений  $\Phi$  [10] при соответствующих граничных условиях на боковых поверхностях цилиндра и сферы, на торце цилиндра. Потенциал  $\Phi$  связан с давлением и скоростью посредством формул

$$p = -i\omega\Phi; \quad \vec{U} = \text{grad } \Phi. \quad (1.1)$$

Если на поверхности сферы задано осесимметричное осциллирующее давление в виде функции  $p(\theta_1)$ , относительно которой предполагается возможность представления ее в виде ряда по полиномам Лежандра  $P_m(\cos \theta_1)$  [1], то граничное условие в системе координат  $O_1 r_1 \theta_1$  имеет вид

$$-\omega\Phi|_{r_1=r_0} = p(\theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m P_m(\cos \theta_1). \quad (1.2)$$

На жесткой поверхности цилиндрической полости ( $\rho = \rho_0 = 1$ ) имеет место условие непроницаемости

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0. \quad (1.3)$$

В торцевом сечении  $z = 0$  в общем случае граничное условие можно записать в виде

$$[\alpha p + \beta V]_{z=0} = 0, \quad (1.4)$$

где  $V$  обозначает нормальную компоненту вектора скорости. При  $\beta = 0$  условие (1.4) определяет сечение  $z = 0$  как свободную границу, при  $\alpha = 0$  – как жесткую стенку. Ниже при вычислениях ограничимся случаем жесткой стенки в торцевом сечении цилиндра. Решение для других случаев строится аналогично.

Задача решается методом «мнимых источников» [5]. В соответствии с этим, вместо полубесконечной области рассматривается бесконечная цилиндрическая полость с жидкостью, содержащая два одинаковых сферических тела, которые расположены на

оси полости симметрично на расстоянии  $\pm h$  от торцевой плоскости  $z = 0$ . При этом тело 1 – реальное, тело 2 – «мнимое», искусственно вводимое определенным образом возбуждаемое тело, наличие которого позволит реализовать необходимое граничное условие в плоскости  $z = 0$ .

С центром мнимого тела  $O_2$  (на расстоянии  $2h$  от  $O_1$ ) свяжем сферическую систему координат  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  (рис. 1).

Для такой системы тел в соответствии с имеющимися граничными поверхностями и принципом суперпозиции волновой потенциал  $\Phi$  можно представить в виде суммы цилиндрического  $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$  и сферических потенциалов  $\Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1)$  и  $\Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2)$

$$\Phi = \Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) + \Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2). \quad (1.5)$$

Цилиндрический потенциал  $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$ , ограниченный на оси цилиндра ( $\rho = 0$ ), запишем в виде [10]

$$\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (1.6)$$

Здесь  $B(\xi)$  – искомая плотность,  $J_0(x)$  – цилиндрическая функция Бесселя индекса 0 [1]. Потенциалы  $\Phi_{\text{sph}}^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) в сферических координатах  $(r_j, \theta_j)$  с учетом условий излучения при  $r_j \rightarrow \infty$  [10] может быть записано следующим образом:

$$\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(j)} h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) \quad (j = 1, 2). \quad (1.7)$$

Здесь  $X_m^{(j)}$  – искомые коэффициенты,  $h_m(x)$  – сферическая функция Ханкеля I-го рода индекса  $m$  [1].

Суммарный потенциал  $\Phi$  необходимо представить в координатах, связанных с каждой граничной поверхностью. Это даст возможность удовлетворить граничным условиям (1.2) – (1.4). С этой целью перепишем сферическое решение (1.7) в цилиндрических координатах, для чего используется известное соотношение [6, 19]

$$h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) = \frac{i^{-m}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi(z \pm h)} d\xi \quad (j = 1, 2), \quad (1.8)$$

позволяющее представить сферическую волновую функцию через цилиндрическую.

В формуле (1.8) сферической системе координат  $(r_1, \theta_1)$  соответствует цилиндрическая система  $(\rho, Z = z + h)$ , системе  $(r_2, \theta_2)$  – система  $(\rho, Z = z - h)$ .

Если представить

$$\Phi_{\text{sph}} = \Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2)$$

и использовать соотношения (1.7) и (1.8), можно суммарный сферический потенциал переписать в цилиндрических координатах

$$\Phi_{\text{sph}} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (1.9)$$

Здесь  $A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} [X_m^{(1)} e^{i\xi h} + X_m^{(2)} e^{-i\xi h}] P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right)$ .

В свою очередь цилиндрическое решение (1.6) можно записать в сферических координатах  $(r_j, \theta_j)$  ( $j = 1, 2$ ) на основе использования следующего известного представления [10]:

$$e^{i\xi z} J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_m(\omega r) P_m(\cos \theta). \quad (1.10)$$

Здесь  $j_m(x)$  – сферическая функция Бесселя индекса  $m$ .

В результате цилиндрический потенциал в сферических системах координат  $(r_j, \theta_j)$  ( $j=1, 2$ ) имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{cyl}} &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} j_m(\omega r_1) P_m(\cos \theta_1); \quad B_m^{(1)} = i^m (2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi h} d\xi; \\ \Phi_{\text{cyl}} &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} j_m(\omega r_2) P_m(\cos \theta_2); \quad B_m^{(2)} = i^m (2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{-i\xi h} d\xi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Потенциалы  $\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j)$  ( $j=1, 2$ ) из формулы (1.7) могут быть переписаны в сферических координатах  $(r_k, \theta_k)$  ( $k=2, 1$ ) при помощи трансляционных теорем сложения сферических функций. В литературе, посвященной задачам многократного рассеяния (multiple scattering), представлено значительное количество публикаций с изложением скалярных и векторных теорем сложения. В данной работе будут использованы обозначения и теоремы, приведенные в монографии [7], которые применительно к рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{0n0m}(2h\omega, \theta_{jk}) j_n(\omega r_k) P_n(\cos \theta_k); \\ Q_{0n0m}(2h\omega, \theta_{jk}) &= \frac{2i^{n-m}}{N_{0n}} \sum_{l=|n-m|}^{n+m} i^l b_l^{(m0n0)} h_l(2h\omega) P_l(\cos \theta_{jk}); \\ N_{0n} &= \frac{2}{2n+1}; \quad j, k=1, 2; \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Здесь угол  $\theta_{jk}$  обозначает координату начала системы координат  $O_k$  в сферической системе с началом в точке  $O_j$ . В данной задаче  $\theta_{12} = 0$  и  $\theta_{21} = \pi$ . Так как  $P_l(\cos \theta_{12}) = 1$  и  $P_l(\cos \theta_{21}) = (-1)^l$ , теоремы сложения можно переписать в более компактном виде

$$h_m(\omega r_j) P_m(\cos \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{0n0m}^{(j)}(2h\omega) j_n(\omega r_k) P_n(\cos \theta_k) \quad (j=1, 2), \quad (1.12)$$

где

$$Q_{0n0m}^{(j)}(2h\omega) = \frac{2i^{n-m}}{N_{0n}} \sum_{l=|n-m|}^{n+m} i^{l(2j-1)} b_l^{(m0n0)} h_l(2h\omega) \quad (j=1, 2); \quad (1.13)$$

$$b_l^{(m0n0)} = (m, n, 0, 0 | l, 0)^2 =$$

$$= \begin{cases} \frac{(2l+1) \left[ \left( \frac{k}{2} \right)! \right]^2 (k-2m)! (k-2n)! (k-2l)!}{\left[ \left( \frac{k}{2} - m \right)! \left( \frac{k}{2} - n \right)! \left( \frac{k}{2} - l \right)! \right]^2 (k+1)!} & \text{если } k \text{ четное;} \\ 0 & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь  $k = m + n + l$ ;  $(m, n, 0, 0 | l, 0)$  – частный случай коэффициентов Клебша-Гордана  $(m, n, \dots, m_1, m_2 | l, m_1 + m_2)$  [1, 2 7] при  $m_1 + m_2 = 0^*$ .

\*Укажем, что в выражении коэффициентов Клебша-Гордана (в общем случае) в русскоязычном издании справочника [1] допущена опечатка, которая также воспроизведена в [7]. Правильное выражение указанных коэффициентов можно получить, используя [2].

Представления (1.5), (1.9), (1.11) и (1.12) позволяют записать полный потенциал в координатах, связанных с каждой граничной поверхностью. Это даст возможность удовлетворить всем граничным условиям.

Так, полный потенциал возмущений в сферических координатах приобретает следующий вид:

– в координатах  $(r_1, \theta_1)$ :

$$\Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(2)} Q_{0m0f}^{(2)} (2h\omega) j_m(\omega r_1) + B_m^{(1)} j_m(\omega r_1) \right] P_m(\cos \theta_1); \quad (1.15)$$

– в координатах  $(r_2, \theta_2)$ :

$$\Phi(r_2, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{(2)} h_m(\omega r_2) + \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} Q_{0m0f}^{(1)} (2h\omega) j_m(\omega r_2) + B_m^{(2)} j_m(\omega r_2) \right] P_m(\cos \theta_2). \quad (1.16)$$

Здесь коэффициенты  $B_m^{(1)}$  и  $B_m^{(2)}$  определяются через неизвестную плотность  $B(\xi)$  по формулам (1.11), величины  $Q_{0m0f}^{(1)}$ ,  $Q_{0m0f}^{(2)}$  – по формулам (1.13), (1.14).

Полный потенциал в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Phi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) + A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) \right] e^{i\xi z} d\xi. \quad (1.17)$$

Здесь

$$A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} (X_m^{(1)} e^{-i\xi h} + X_m^{(2)} e^{i\xi h}) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right).$$

## §2. Удовлетворение граничным условиям.

Рассмотрим последовательно удовлетворение граничным условиям на каждой поверхности.

**2.1. Условие на цилиндрической поверхности полости.** Из условия непроницаемости на этой поверхности (1.4) и выражения (1.17) при  $\rho = 1$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ B(\xi) J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) + A(\xi) H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \right] \sqrt{\omega^2 - \xi^2} e^{i\xi z} d\xi = 0.$$

Отсюда вследствие единственности преобразования Фурье следует

$$B(\xi) J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) + A(\xi) H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) = 0,$$

или, с учетом выражения для  $A(\xi)$  из формулы (1.12), получим

$$B(\xi) = -\frac{1}{2\omega} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} (X_m^{(1)} e^{i\xi h} + X_m^{(2)} e^{-i\xi h}) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) дает возможность представить коэффициенты  $B_m^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ;  $m = 0, 1, \dots$ ), заданные формулами (1.11), через неизвестные  $X_m^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ):

$$B_m^{(1)} = -\frac{2m+1}{2\omega} \sum_{f=0}^{\infty} i^{m-f} (X_f^{(1)} q_{fm} + X_f^{(2)} q_{fm}^{(2)});$$

$$B_m^{(2)} = -\frac{1}{2\omega} \sum_{f=0}^{\infty} (2m+1) i^{m-f} (X_f^{(1)} q_{fm}^{(1)} + X_f^{(2)} q_{fm}). \quad (2.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
q_{jm} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi; \\
q_{jm}^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i2\xi h} d\xi; \\
q_{jm}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{-i2\xi h} d\xi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

**2.2. Условие на торце цилиндрической полости.** Если при  $z = 0$  имеем свободную границу ( $\beta = 0$  в формуле (1.4)), то из (1.4), (1.5) и (1.7) следует равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) P_m(\cos \theta_1) + X_m^{(2)} h_m(\omega r_2) P_m(\cos \theta_2) \right]_{z=0} = 0. \tag{2.4}$$

Учитывая, что в плоскости  $z = 0$  имеют место равенства  $r_1 = r_2$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ , и, кроме того, для полиномов Лежандра справедливо соотношение  $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$  [1], из формулы (2.4) получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{(1)} + (-1)^m X_m^{(2)} \right] h_m(\omega r) P_m(\cos \theta_1) = 0,$$

откуда вследствие ортогональности полиномов Лежандра вытекает следующее соотношение между коэффициентами  $X_m^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ):

$$X_m^{(1)} = (-1)^{m+1} X_m^{(2)}. \tag{2.5}$$

Аналогично, в случае жесткой границы ( $\alpha = 0$  в формуле (1.4))

$$X_m^{(1)} = (-1)^m X_m^{(2)}. \tag{2.6}$$

Ниже ограничимся последним случаем.

**2.3. Условие на поверхности сферического тела.** Из граничного условия на поверхности сферического тела (1.2), применяя представление волнового потенциала возмущений в сферических координатах (1.15) и выражения (1.13), (2.2), (2.3) и (2.6), а также используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов

$$\begin{aligned}
X_m^{(1)} h_m(\omega r_0) + \frac{1}{2\omega} j_m(\omega r_0) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(1)} \left\{ 2\omega Q_{0m0f}^{(2)}(2h\omega) - (2m+1) i^{m-f} \left[ (-1)^f q_{mf}^{(1)} + q_{mf} \right] \right\} = \frac{i}{\omega} p_m \\
(m = 0, 1, 2, \dots, \infty).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Если в системе уравнений (2.7) произвести замену переменных

$$h_m(\omega r_0) X_m^{(1)} = x_m, \tag{2.8}$$

она приобретет стандартную форму

$$x_m + \sum_{f=0}^{\infty} A_f^{(m)}(\omega, r_0, h) x_f = \frac{i}{\omega} p_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty). \tag{2.9}$$

Коэффициенты системы (2.9) имеют вид

$$A_f^{(m)}(\omega, r_0, h) = \frac{(2m+1) j_m(\omega r_0)}{2\omega h_m(\omega r_0)} \left[ (-1)^f \frac{2\omega}{2m+1} Q_{0m0f}^{(2)}(2h\omega) - i^{m-f} (-1)^f q_{fm} + q_{fm}^{(1)} \right]. \tag{2.10}$$



Величины  $Q_{0m0f}^{(2)}$ ,  $q_{fm}$  и  $q_{fm}^{(1)}$  вычисляются по формулам (1.13) и (2.3), соответственно.

Практические вычисления выполнены на основе системы уравнений (2.9) в следующей последовательности.

1. Задается множество исходных параметров задачи: радиус цилиндрической полости  $\rho_0=1$ ; радиус сферы  $r_0$ ; расстояние от стенки до центра сферы  $h$ ; частота возбуждения  $\omega$ .

2. Задается амплитуда давления на поверхности сферического излучателя (функция  $p(\theta_1)$ ) и вычисляются коэффициенты  $p_m$  разложения по полиномам Лежандра.

3. Коэффициенты бесконечной системы  $A_f^{(m)}(\omega, r_0, h)$  вычисляются по формуле (2.10).

Методом усечения решается бесконечная система уравнений (2.9) относительно  $x_m$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ), где  $N$  определяет необходимое для достижения требуемой точности число членов в выражении для суммарного потенциала.

4. Из формулы (2.8) находятся коэффициенты  $X_m^{(1)}$ .

5. Выражение для суммарного потенциала возмущений  $\Phi$  строится по формуле (1.15) с учетом (2.2), (2.3) или, если воспользоваться (2.9),

$$\Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{m=0}^N \left\{ X_m^{(1)} h_m(\omega r_1) + \left[ \frac{i}{\omega} p_m - X_m^{(1)} h_m(\omega r_0) \right] \frac{j_m(\omega r_1)}{j_m(\omega r_0)} \right\} P_m(\cos \theta_1). \quad (2.11)$$

6. Вычисляются давление  $p$  и нормальная скорость  $V$ :

$$p = -i\omega\Phi; \quad |p| = \sqrt{\text{Re}(p)^2 + \text{Im}(p)^2};$$

$$V = \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}; \quad |V| = \sqrt{\text{Re}(V)^2 + \text{Im}(V)^2}. \quad (2.12)$$

Здесь  $\text{Re}(p)$  – давление в начале периода колебания,  $\text{Im}(p)$  – спустя четверть периода;  $|p|$  – амплитуда колебаний.

7. Проверяется точность выполнения граничных условий на поверхности сферы, цилиндра и на торце.

Для вычислений искомых характеристик на цилиндрической поверхности можно использовать выражение для потенциала в цилиндрических координатах (1.17) с учетом (2.1) и (2.6). В ниже приведенных примерах вычислений рассматривалась только центрально-симметричная форма возбуждения сферического излучателя, то есть в выражении (1.3) положено  $p_0=1$ ;  $p_m=0$  ( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ).

### §3. Особенности процедуры вычислений.

Трудности вычислений были связаны, в первую очередь, с использованием теорем сложения в сферических координатах, в частности, с вычислением функций  $Q_{0n0m}^{(j)}(2h\omega)$  ( $j = 1, 2$ ) в выражении (1.13). Эти функции содержат коэффициенты Клебша-Гордана или тесно связанные с ними коэффициенты Гаунта [11] в виде множителей и, кроме того, функцию Ханкеля  $h_j(2h\omega)$ . Количество подлежащих вычислению коэффициентов Клебша-Гордана быстро растет с ростом числа  $N$ . Кроме того, коэффициенты Клебша-Гордана имеют вид дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения нескольких факториалов, и вследствие этого они достаточно громоздки для вычислений (см. (1.14)). Во второй половине прошлого века были предложены способы вычисления этих величин при помощи ряда рекуррентных соотношений [11, 12, 25]. К сожалению, применение авторами разных обозначений и нор-

мировок несколько затрудняет их использование. В то же время вычислительная мощность современных компьютеров позволяет в настоящее время реализовать прямое вычисление коэффициентов Клебша-Гордана. Здесь для вычислений использовалась формула (2.9). Трудности оперирования с очень большими числами, которые возникают в вычисляемых коэффициентах при больших значениях числа усечения  $N$ , удалось преодолеть представив дробь в правой части (1.14) в виде произведения нескольких дробей (от трех до девяти). Количество дробей выбиралось разработанной авторами настоящей работы программой в автоматическом режиме в зависимости от значений входных параметров  $(\omega, h, N)$ . Другой метод вычисления выражений такого рода состоит в использовании операций логарифмирования произведений.

Более серьезным препятствием при вычислениях оказалось наличие в функциях  $Q_{0n0m}^{(j)}(2h\omega)$  ( $j=1, 2$ ) функции Ханкеля  $h_l(2h\omega)$ . При больших значениях  $N$  ее порядок становится большим и, соответственно, значение функции  $h_l$  ( $l \in [0, 2N]$ ) при малых значениях аргумента также становится большим по абсолютному значению. В результате имеет место существенный разброс в точности вычислений значений функций. Это вынуждает ограничить параметр усечения  $N$ , что, в свою очередь, ограничивает диапазон расчетных соотношений между значениями радиуса сферы  $r_0$  и расстоянием до торца  $h$ . Проверка точности удовлетворения граничных условий показала, что необходимая точность вычислений (порядка 2 – 4 % погрешности при выполнении граничных условий) имеет место тогда, когда величины  $\rho_0 - r_0$  и  $h - r_0$  являются величинами одного порядка. При этом для всех нижеследующих примеров вычислений достаточным значением параметра усечения оказалось значение  $N = 20$ .

Еще одна проблема состоит в вычислении параметров  $q_{fm}$ ,  $q_{fm}^{(1)}$  и  $q_{fm}^{(2)}$ , представленных несобственными интегралами (2.3). Они упрощаются на основе свойства  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ , а именно

$$q_{fm} = \begin{cases} 2 \int_0^\infty \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi & \text{если } f+m \text{ четное;} \\ 0 & \text{если } f+m \text{ нечетное;} \end{cases}$$

$$q_{fm}^{(1)} = \begin{cases} 2 \int_0^\infty \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) \cos 2\xi h d\xi & \text{если } f+m \text{ четное;} \\ 2i \int_0^\infty \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_f\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) \sin 2\xi h d\xi & \text{если } f+m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Для  $q_{fm}^{(2)}$  справедливо равенство  $q_{fm}^{(2)} = (-1)^{f-m} q_{fm}^{(1)}$ .

Процедуры вычислений  $q_{fm}$  и  $q_{fm}^{(1)}$  идентичны. На рассматриваемом интервале интегрирования  $(0, \infty)$  подынтегральные функции имеют одну или несколько особых точек (в зависимости от значения  $\omega$ ), при приближении к которым их значения неограниченно возрастают. К ним относятся точки  $\xi = \omega$  и  $\sqrt{\omega^2 - \xi^2} = \zeta_s$  ( $\zeta_s$  – нули функции Бесселя первого порядка), в которых знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. При вычислении интегралов эти точки выделялись малой  $\varepsilon$ -окрестностью. Исследование поведения подынтегральных функций в окрестности этих точек показало, что справа и слева от них они принимают одинаковые по модулю и противоположные по знаку значения, поэтому значением интегралов на этих

бесконечно малых интервалах при устремлении  $\varepsilon$  к нулю можно пренебречь, и сами интегралы понимаются как интегралы в смысле главного значения. При интегрировании на интервале  $(\omega + \varepsilon, \infty)$  функции  $H_1$  и  $J_1$  выражаются через модифицированные функции Бесселя (функции Бесселя мнимого аргумента). Верхний бесконечный предел заменялся на конечное значение, которое принималось таким, чтобы была обеспечена стабильность числовых результатов, как минимум, в третьем десятичном знаке.

#### §4. Числовые результаты.

Вычисления были произведены для нескольких значений безразмерных радиуса сферы  $r_0$  и расстояния  $h$  между центром сферы и дном. Основное внимание было

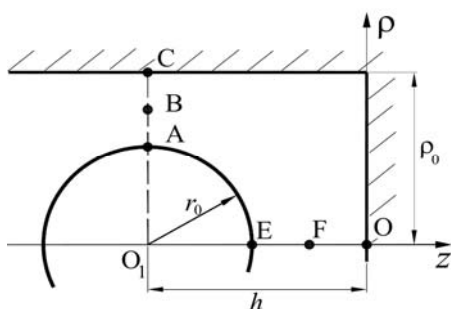


Рис. 2

сосредоточено на случае, когда сферическое тело достаточно близко расположено к дну. Диапазон безразмерных частот возбуждения сферы был выбран в виде  $0 < \omega \leq 10$ . Шаг сканирования частоты выбирался равным 0,1; 0,05 и 0,01 (для обеспечения достоверности результатов с ростом частоты приходилось выбирать более мелкий шаг задания ее значений). Ниже приведены числовые результаты, полученные для безразмерного радиуса сферического тела  $r_0 = 0,1; 0,25$  и  $r_0 = 0,5$  ( $\rho_0 = 1$ ) при значениях величины  $h$ ,

равной  $h = 1,0$  и  $0,75$ . Определялось гидродинамическое давление и скорость в нескольких характерных точках полости (в проходящем через центр сферы поперечном сечении цилиндра и на оси симметрии задачи – оси  $z$ ) со следующими цилиндрическими координатами – см. рис. 2, на котором показано осевое сечение полости и характерные точки рассматриваемой системы: точки А и Е лежат на поверхности сферы; точка С – на поверхности цилиндра; точка О – на поверхности торца; точки В и F – на середине отрезков АС и ЕО, соответственно: 1 – А ( $\rho = r_0, z = -h$ ); 2 – В ( $\rho = (\rho_0 + r_0)/2, z = -h$ ); 3 – С ( $\rho = \rho_0, z = -h$ ); 4 – Е ( $\rho = 0, z = r_0 - h$ ); 5 – F ( $\rho = 0, z = (r_0 - h)/2$ ); 6 – О ( $\rho = 0, z = 0$ ).

На нижеприведенных рисунках сплошными линиями обозначены характеристики, вычисленные для полубесконечного сосуда, пунктиром для сравнения показаны соответствующие кривые для бесконечного сосуда. При этом всюду на рисунках представлены абсолютные значения расчетных величин. Ввиду большого количества графического материала ниже приведены результаты вычисления давления как наиболее показательные.

**Пример 1.**  $r_0 = 0,1; h = 1,0$ .

На рис. 3, а сплошной линией представлено значение детерминанта  $|D_N|$  усеченной системы (2.9) как функция частоты  $\omega$  для полубесконечной полости. Пунктиром представлено значение детерминанта системы  $|D_{N0}|$ , соответствующего случаю бесконечной полости. Напомним, что при вычислениях был выбран параметр усечения бесконечной системы (2.9)  $N = 20$ .

Анализ поведения детерминанта позволяет визуально обнаружить значения частоты возбуждения, при которых можно ожидать аномальных значений искомых характеристик. Таким частотам отвечают минимумы детерминанта. Сравнение сплошных и пунктирных кривых показывает, что такие минимумы (и, следовательно, соответствующие частоты) гораздо резче выражены в случае полубесконечного сосуда. При этом они не являются собственными значениями – детальный анализ значений

детерминанта  $|D_N|$  показывает, что его минимумы малы, однако не равны нулю. Аналогичное утверждение справедливо и для последующих примеров.

Рисунки 3, б, в показывают давление  $p$  как функцию частоты в шести выше обозначенных характерных точках (см. рис. 2). Рис. 3, б представляет графики давления в функции частоты возбуждения в поперечном сечении цилиндра ( $z = -h$ ) в точках А (кривые 1 и  $\bar{1}$ ), В (кривые 2 и  $\bar{2}$ ) и С (кривые 3 и  $\bar{3}$ ); рис. 3, в – в точках оси  $z$ : Е (кривые 4 и  $\bar{4}$ ), F (кривые 5 и  $\bar{5}$ ) и О (кривые 6 и  $\bar{6}$ ). Каждая кривая на рисунках обозначена цифрой, совпадающей с цифровым обозначением характерной точки на рис. 2. При этом цифровое обозначение кривых для бесконечного сосуда помечено макроном (например, цифрами 1 и  $\bar{1}$  на рис. 3, а обозначены кривые давления в точке А при  $h=1,0$  и  $h \rightarrow \infty$ , соответственно).

Кривые 1,  $\bar{1}$ , 4,  $\bar{4}$  на рис. 3, б, в позволяют визуально убедиться в выполнении граничного условия на поверхности излучателя. В данной конфигурации рассматриваемой системы ( $r_0=0,1; h=1,0$ ) радиус сферического тела невелик по сравнению с радиусом сосуда  $\rho_0=1$  и расстоянием до торца  $h$ . Вследствие этого аномальные явления, присущие задаче для бесконечной полости, проявляются слабо. Об этом свидетельствуют кривые  $\bar{2}, \bar{3}$  на рис. 4, б, кривые  $\bar{5}, \bar{6}$  на рис. 3, в.

Действительно, диапазон изменения амплитуды скорости невелик, максимумы кривых незначительны. В то же время, для полубесконечной полости влияние торца, как свидетельствует соответствующие кривые 2, 5 и 6, является существенным: даже при рассмотренном удалении сферического тела от торца величиной в 9 радиусов сферы значение давления при некоторых частотах возбуждения увеличивается на порядок. Такие частоты будем называть аномальными или «условно резонансными».

**Пример 2.**  $r_0=0,25; h=1,0$ .

Графики значений детерминантов усеченной разрешающей системы (4.2)  $|D_N|$  и  $|D_{N0}|$  в зависимости от частоты приведены на рис. 4, а.

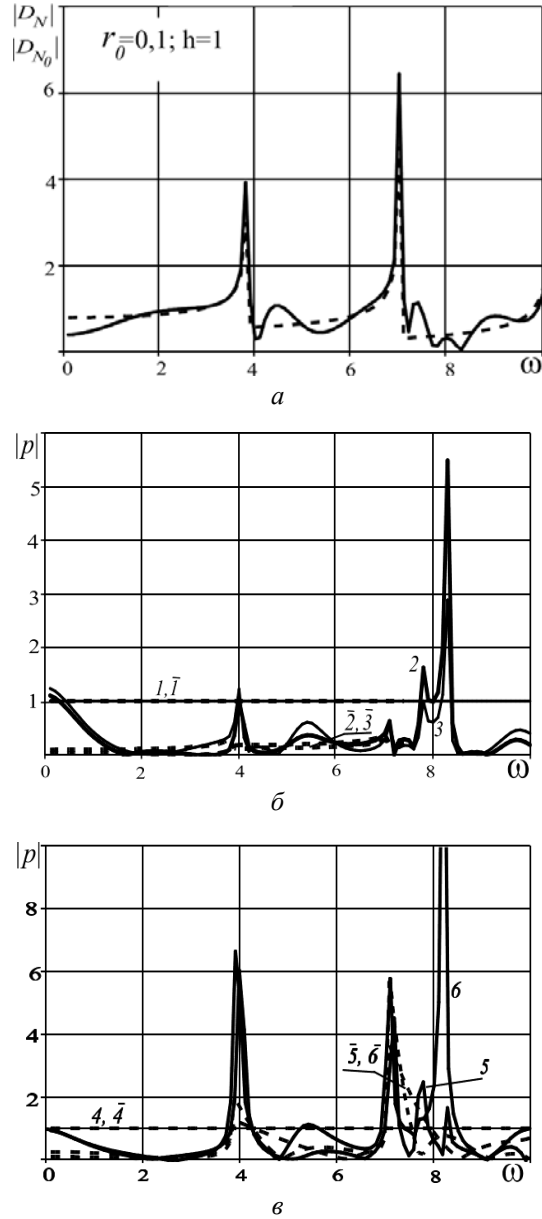


Рис. 3

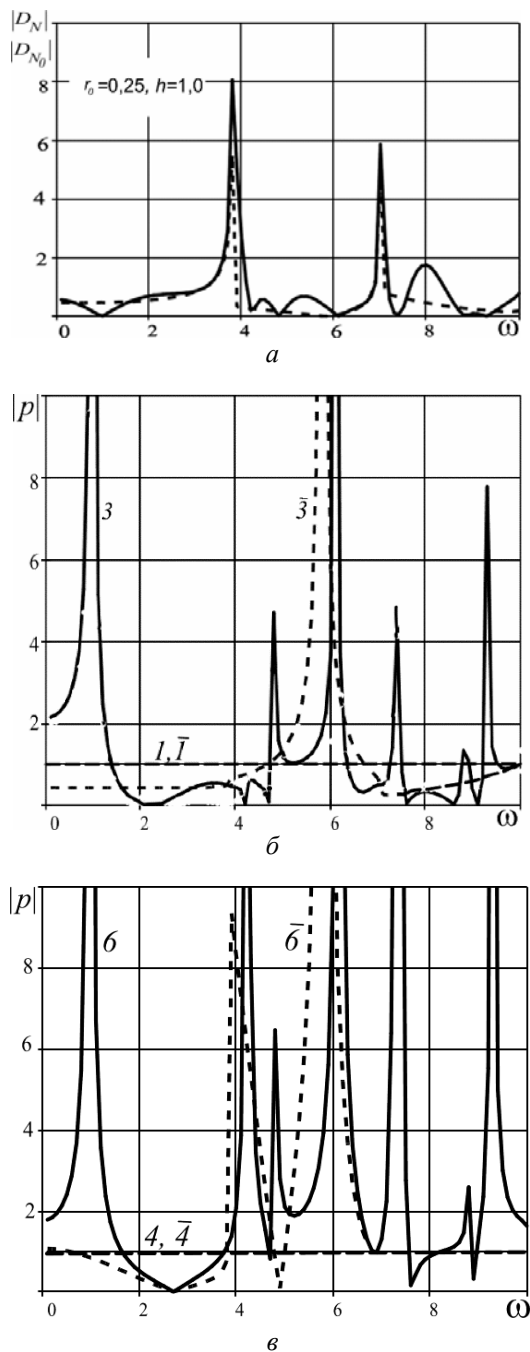


Рис. 4

Показанные на рис. 5, а кривые детерминантов  $|D_N|$  и  $|D_{N0}|$  свидетельствуют о возможных нескольких значениях аномальных частот. Показанные на рис. 5, б, в графики давления в точках А (кривые 1 и  $\bar{1}$ ) и Е (кривые 4 и  $\bar{4}$ ), как и ранее, свидетельствуют об удовлетворении граничному условию на сферическом излучателе.

Показанные на рис. 5, а кривые детерминантов  $|D_N|$  и  $|D_{N0}|$  свидетельствуют о возможных нескольких значениях аномальных частот. Показанные на рис. 5, б, в графики давления в точках А (кривые 1 и  $\bar{1}$ ) и Е (кривые 4 и  $\bar{4}$ ), как и ранее, свидетельствуют об удовлетворении граничному условию на сферическом излучателе.

На рисунке обе кривые приближаются к нулю при некоторых значениях частоты, поэтому следует ожидать особенности поведения кривых давления и скорости как для сферы в полуограниченном сосуде, так и для сферы в бесконечной полости. Рис. 4, б представляет кривые давления в точках А (кривые 1,  $\bar{1}$ ), С (кривые 3,  $\bar{3}$ ); рис. 4, в – в точках Е (кривые 4,  $\bar{4}$ ) и О (кривые 6,  $\bar{6}$ ). Мы не приводим данные для точек В и F, так как они подобны кривым, построенным для точек С и О, соответственно, и загромождают рисунок.

Кривые 1,  $\bar{1}$ , 4 и  $\bar{4}$  демонстрируют удовлетворение граничных условий. Так как в данном примере радиус сферического тела больше, чем в предыдущем, аномальные явления проявляются гораздо интенсивнее. Имеет место один максимум для бесконечной полости – кривая  $\bar{3}$  на рис. 4, б и четыре максимума различной интенсивности для полубесконечной – кривая 3. Рис. 4, б демонстрирует наличие двух максимумов для бесконечной полости (кривая  $\bar{6}$ ) и шесть максимумов для полубесконечной – кривая 6. Можно заметить, что значения «резонансных» частот отличаются от аналогичных частот бесконечного сосуда.

В работе [20] для бесконечной полости было установлено, что в случае бесконечной полости с жидкостью аномальные частоты коррелируются с собственными частотами колебаний кольца, лежащего в поперечном сечении цилиндра. В случае полубесконечной области аномальные частоты не совпадают с указанными частотами.

**Пример 3.**  $r_0 = 0,5; h = 1,0$ .

В этом примере радиус сферического тела увеличен вдвое при том же значении параметра  $h$ , что и в предыдущем примере, так что расстояние между его поверхностью и плоскостью торца теперь равно радиусу сферы.

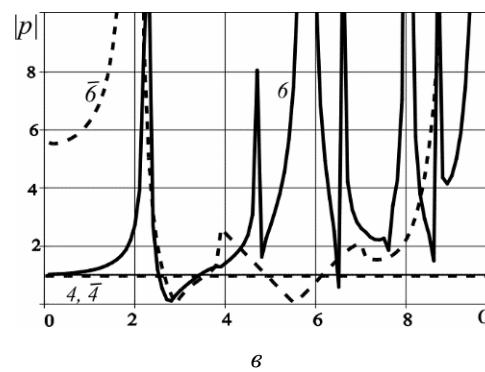
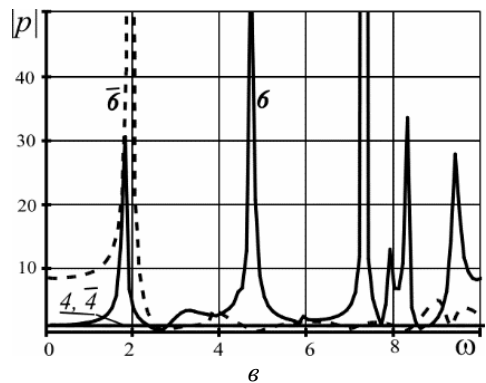
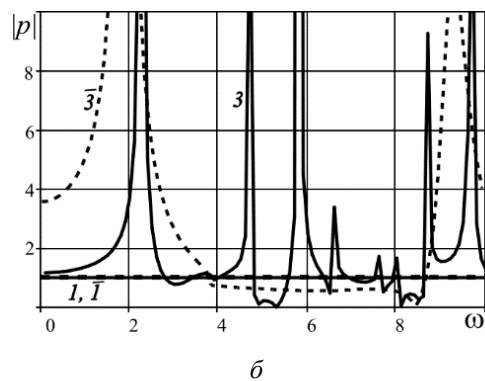
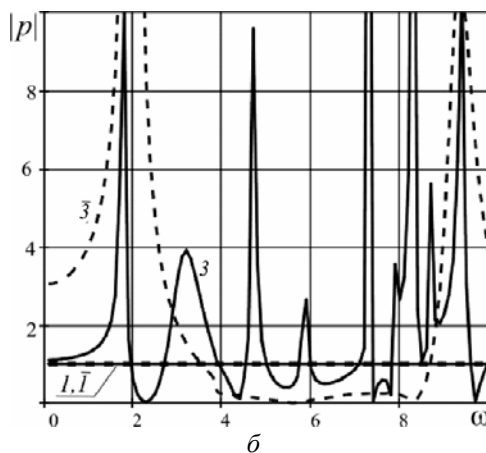
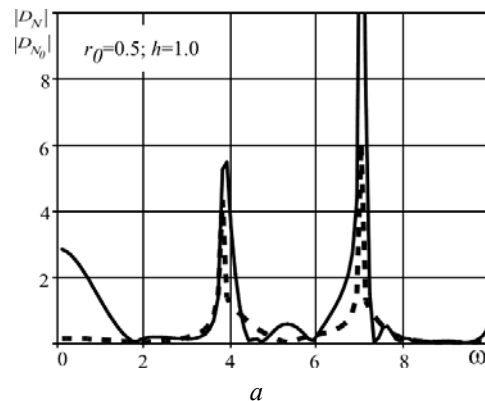
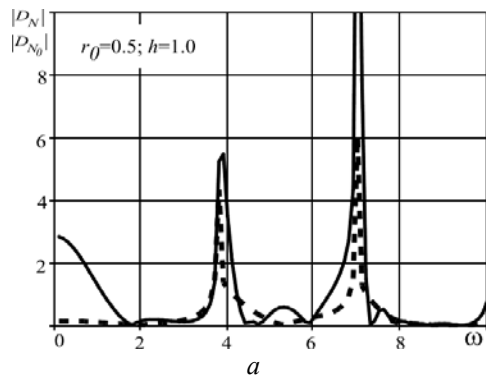


Рис. 5

Рис. 6

Кривые 3 и б показывают наличие 8 аномальных частот, которые в большей или меньшей мере проявляются в увеличении амплитуды давления в точках С и О. В случае бесконечной полости имеется две такие частоты – кривые  $\bar{3}$  и  $\bar{б}$ . Укажем, что графики на рисунках 5, а также на последующих рисунках 6, намеренно ограничены по оси ординат в частности для того, чтобы было видно поведение кривых на граничных поверхностях. На рис. 5, б масштаб по оси ординат увеличен в пять раз, однако пиковые значения кривых показать все равно не удалось. Реальный порядок значений давления и скорости для фиксированных частот можно наблюдать ниже на рис. 7 – 10.

**Пример 4.**  $r_0 = 0,5$ ;  $h = 0,75$ .

Эти же явления наблюдаются в системе с конфигурацией, в которой радиус сферы сохранен, а расстояние между поверхностью сферы и торцевой плоскостью цилиндрической полости уменьшено до половины радиуса сферы.

Рис. 6, *a* представляет детерминанты  $|D_N|$  (сплошная линия) и  $|D_{0N}|$  (пунктир). Как и ранее, можно визуально (приблизительно) указать частоты, при которых следует ожидать аномальных значений амплитуды давления (скорости).

Рис. 6, *b* показывает давление в характерных точках А и С, рис. 6, *в* – давление в точках Е и О. Для бесконечной полости имеет место задача из предыдущего примера. Для полубесконечного сосуда наблюдается до восьми значений аномальных частот, причем их значения изменились.

**Пример 5.** Пространственное распределение физических характеристик при фиксированной частоте.

Для конфигурации системы из примера 2 ( $r_0 = 0,5; h = 1,0$ ) приведем распределение давления и скорости вдоль радиуса цилиндра и вдоль его оси при двух характерных частотах (рис. 7 – 10). По оси абсцисс откладываются приведенные безразмерные координаты  $\bar{r} = (r - r_0) / (1 - r_0)$  и  $\bar{z} = (z - r_0) / (h - r_0)$ , так что значению  $\bar{r} = 0$  и значению  $\bar{z} = 0$  отвечает, соответственно, точка А и точка Е на поверхности сферы (см. рис. 2); значению  $\bar{r} = 1$  – точка С на поверхности полости; значению  $\bar{z} = 1$  – точка О на торце.

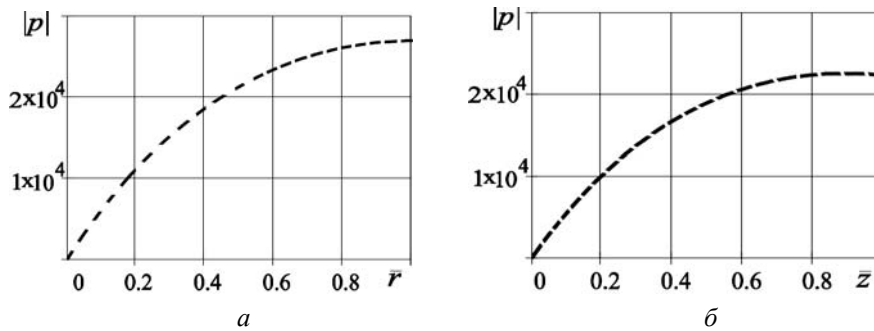


Рис. 7

Графики, показанные на рис. 7, получены для частоты возбуждения  $\omega = 1,984$ , которая является аномальной («условно резонансной») частотой для бесконечного сосуда. При этом рис. 7, *a* представляет распределение амплитуды давления вдоль радиуса цилиндра (между поверхностями сферы и цилиндра) в сечении  $z = -h$ , а рис. 7, *б* – вдоль оси цилиндра (между поверхностью сферы и сечением цилиндра  $z = 0$ ). Эти рисунки кроме распределения в пространстве показывают уровень амплитуд гидродинамических характеристик в случае возбуждения системы на аномальной частоте: указанные амплитуды могут превышать амплитуду возбуждения на 4 – 5 порядков.

Для полубесконечного сосуда при той же частоте аналогичные графики приведены на рис. 8. Частота  $\omega = 1,984$  не является аномальной частотой в этом случае, вследствие чего значения амплитуд на рис. 7 для бесконечного сосуда отличаются от аналогичных для полубесконечного сосуда (рис. 8) на несколько порядков.

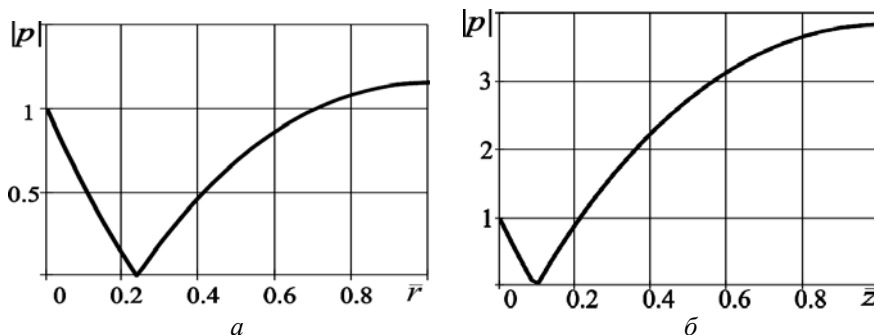


Рис. 8

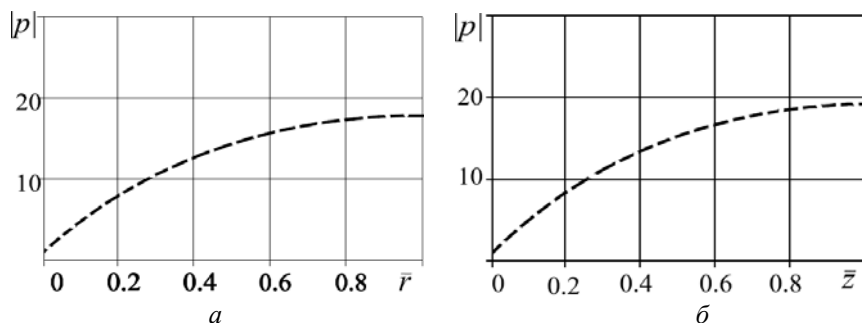


Рис. 9

Графики, изображенные на рис. 9, получены для бесконечного сосуда при частоте возбуждения  $\omega = 1,7705$ . Эта частота не является для него частотой аномалии. Распределение давления вдоль радиуса цилиндра в сечении  $z = -h$  показано на рис. 9, а, а вдоль оси цилиндра (между поверхностью сферы и торцом цилиндра) – на рис. 9, б.

В то же время для полубесконечного сосуда эта частота является аномальной. Графики распределения давления, представленные, соответственно, на рис. 10 для полубесконечного сосуда показывают, что значения амплитуд для такого сосуда при аномальной частоте возбуждения превосходят аналогичные для бесконечной полости (при той же частоте возбуждения, которая для нее не является аномальной) на несколько порядков.

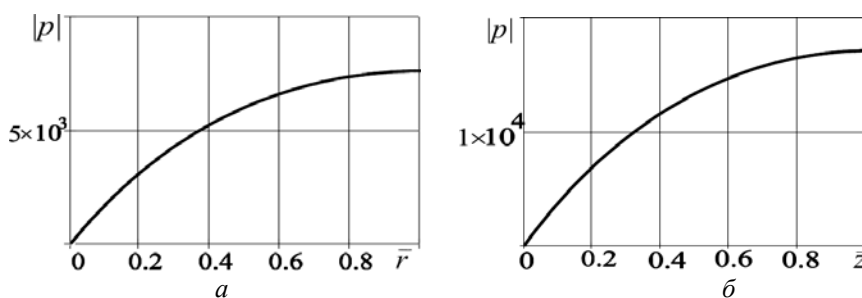


Рис. 10

Заметим, что приведенные здесь числовые результаты удалось получить для случая, когда зазоры ЕО и АС (рис. 2) являются сопоставимыми величинами. Это обусловлено тем, что был выбран прямой метод вычисления соответствующих коэффициентов трансляционных теорем сложения.

#### Выводы.

В работе исследуются особенности акустических процессов в полубесконечном цилиндрическом сосуде с жидкостью, динамически возбуждаемом сферическим телом, которое расположено вблизи торца сосуда. Акцент сделан на изучении влияния ограниченности сосуда в осевом направлении и сравнении со случаем бесконечного сосуда. Метод разделения переменных вместе с использованием трансляционных теорем сложения для сферических волновых функций, а также соотношений, которые представляют сферические волновые функции через цилиндрические и обратно, позволил удовлетворить всем граничным условиям и получить точное решение рассматриваемой граничной задачи. Вычисление искомых физических характеристик сведено к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Можно утверждать, что определитель этой системы является определителем нормального типа, и, следовательно, ее решение находится методом усечения.

Ранее при решении аналогичной задачи для бесконечного сосуда [21, 33] было установлено существование спектра частот возбуждения (так называемые «условно резонансные» или аномальные частоты), при которых давление или скорость много-



кратно возрастают. Эти частоты коррелируют с собственными частотами колебаний поперечного сечения цилиндра с жидкостью. При решении данной задачи установлены следующие особенности, которые во многом аналогичны результатам работы [22].

Аномальные явления, присущие бесконечному сосуду, имеют место и в случае полубесконечного сосуда. Ограничение сосуда с жидкостью в осевом направлении приводит к появлению в полубесконечном сосуде отличных от свойственных бесконечному сосуду аномальных частот, при которых амплитуды давления (скорости) многократно возрастают. При этом даже в случае, когда в бесконечном сосуде аномальные явления слабо выражены (радиус сферического излучателя мал относительно радиуса сосуда), аномальные явления в соответствующем полубесконечном сосуде могут проявиться существенно. Значения аномальных частот зависят как от соотношения между радиусами цилиндрической полости и сферического тела, так и от расстояния между сферой и торцом сосуда. Возбуждение бесконечного сосуда с жидкостью на аномальной (условно резонансной) частоте полубесконечного сосуда не приводит к появлению аномальных особенностей. Обратное также верно.

Приведенные в работе числовые результаты получены для случая, когда кратчайшие расстояния «сфера – торец сосуда» и «сфера – цилиндрическая поверхность» имеют сопоставимые значения.

Причину появления аномальных частот в полубесконечном сосуде, по-видимому, можно объяснить, если отталкиваться от частного случая, когда радиус сферического включения совпадает с радиусом цилиндра, так что имеет место ограниченный объем среды между сферическим телом и торцом сосуда. Этот объем, очевидно, обладает спектром собственных частот. С уменьшением радиуса сферического тела спектр трансформируется в полученные здесь аномальные частоты, при которых амплитуда давления в сосуде существенно выше амплитуды возбуждения.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається заповнена ідеальною стисливою рідиною напівнескінченна кругова циліндрична порожнина, що містить розташоване поблизу її торця сферичне тіло. Поверхня тіла випромінює періодичний тиск із заданою частотою і амплітудою. Розв'язується задача визначення гідродинамічних характеристик системи залежно від частоти збудження і геометричних параметрів. Застосовується метод розділення змінних, трансляційні теореми додавання для сферичних хвильових функцій і співвідношення, що представляють сферичні хвильові функції через циліндричні і навпаки. Такий підхід дозволяє задовольнити усім граничним умовам і отримати точний розв'язок граничної задачі. Обчислення зведені до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно якої стверджується, що її розв'язок методом зрізання сходиться. Визначення полів тиску і швидкості показало, що дана система має низку значень частоти збудження, при яких акустичні характеристики перевищують амплітуду збудження на декілька порядків. Ці аномальні частоти відрізняються від частот, властивих нескінченній циліндричній порожнині зі сферичним тілом. При цьому навіть у випадку, коли радіус сферичного випромінювача малий і аномальні явища в нескінченній посудині слабо виражені, в напівнескінченній порожнині вони можуть проявитися суттєво.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. – М.: Наука, 1965. – 576 с.
3. *Гермогенова О.А.* Отражение плоской электромагнитной волны двумя сферами // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. – 1963. – Т. 4. – С.403–405.
4. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
5. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
6. *Ерофеев В.Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1972. – № 4. – С. 42 – 46.
7. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
8. *Кубенко В.Д., Дзюба В.В.* Динамика взаимодействия жесткой цилиндрической полости, заполненной сжимаемой жидкостью, со сферическими включениями при гармоническом возбуждении

- // Проблемы механики: Сб. науч. тр. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. – М.: Физ.-мат. лит., 2003. – С. 489 – 501.
9. Кубенко В.Д., Луговой П.З., Головки К.Г. Спосіб обробки привибійної зони пласта. – Патент України на корисну модель № 65064 від 25.11.2011.
  10. Морс Ф.М., Феибах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. – М.: ИЛ, 1960. – 896 с.
  11. Brunning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering by spheres. Tech. Rep. – Illinois: Antenna Laboratory, University of Illinois, 1969. – 180 p.
  12. Cruzan O.R. Translation addition theorem for spherical wave functions // Quart. Appl. Math. –1962. – Vol. 20, Iss. 1. – P. 33 – 40.
  13. Friedman B., Russek O. Addition theorems for spherical waves // Quart. Appl. Math. –1954. – 12. – P. 13 – 23.
  14. Gaunaurd G.C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. – 1994. – 96. – P. 2526 – 2536.
  15. Gaunaurd G.C., Huang H., Strifors H.C. Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Am. – 1995. – Vol. 98. – P. 495 – 507.
  16. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamic of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 5. – P. 449 – 507.
  17. Hasheminejad S.M., Hosseini H. Nonaxisymmetric interaction of a spherical radiator in a fluid-filled permeable borehole // Int. J. of Solids and Str. – 2008. – 45. – P. 24 – 47.
  18. Kubenko V.D. Determining the Dynamic Characteristics of Viscous Liquid in a Cylindrical Cavity Acted upon by a Spherical Radiator // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 3. – P. 296 – 304.
  19. Kubenko V.D. Diffraction of Steady Waves at a Set of Spherical and Cylindrical Bodies in an Acoustic Medium // Sov. Appl. Mech. – 1987. – 23, N 6. – P. 605 – 610.
  20. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Interaction of an Infinite Thin Elastic Cylindrical Shell and a Pulsating Spherical Inclusion in Potential Flow of Ideal Compressible Liquid: Internal Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 3. – P. 297 – 312.
  21. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Resonant phenomena in axisymmetric hydroelastic systems from cylindrical shell with inclusion under presence of internal compressible liquid and external elastic medium // J. of Fluids and Structures. – 2006. – 22, N 4. – P. 577 – 594.
  22. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. "Resonance" phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // Acta Mechanica. – 2019. – 230. – P. 1009 – 1025.
  23. Lee D.S. Scattering of torsional waves by a spherical cavity in a long circular elastic cylinder // Acta Mechanica. – 2003. – 164. – P. 47 – 59.
  24. Linton C.M. Acoustic scattering by a sphere in a circular cylindrical waveguide // The Quart. J. of Mech. and Appl. Math. – 1995. – 48. – P. 211 – 235.
  25. Makovsky D.W. Configurations analysis of radiative scattering for multiple sphere // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1991. – 433. – P. 599 – 614.
  26. Marnevskaia L. Diffraction of a plane scalar wave by two spheres // Soviet Physics Acoustics. – 1969. – 14. – P. 356 – 360.
  27. Martin P.A. Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. – London: Cambridge University Press, 2006. – 450 p.
  28. Martin P.A. Multiple scattering and scattering cross sections // J. Acoust. Soc. Am. –2018. – 143, N 2. – P. 995 – 1002.
  29. Mishchenko M.I., Travis I.D., Lacis A.A. Multiple Scattering of Light by Particles. Radiative Transfer and Coherent Backscattering. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 478 p.
  30. Olsson S. Transmission and reflection of elastic waves by a spherical obstacle in an infinite circular cylindrical rod // The Quart. J. of Mech. and Appl. Math. – 1994. – 47. – P. 583 – 606.
  31. Wood R.W. Anomalous diffraction gratings // Phys. Rev. – 1935. – 48. – P. 928 – 933.
  32. Yanchevskii I.V. Nonstationary Vibrations of Electroelastic Cylindrical Shell in Acoustic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 4. – P. 431 – 442.
  33. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – 132, N 4. – P. 2189 – 2197.
  34. Zhuk A.P., Zhuk Ya.A. On the Acoustic Radiation Force Acting upon a Rigid Spherical Particle Near the Free Liquid Surface // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 5. – P. 544 – 551.

Поступила 03.01.2019

Утверждена в печать 05.11.2019