

Н. П. Семенюк, Н. Б. Жукова

**УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ С УЧЕТОМ ДАВЛЕНИЯ
ВО ВНУТРЕННЕМ ЦИЛИНДРЕ**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: compos@inmech.kiev.ua*

Abstract. A generalized design model is proposed for studying the stability and initial post-buckling equilibrium trajectory of sandwich cylindrical shells with elastic filler that resists only the transverse tension-compression. The components of this model are the non-linear equilibrium equations in a mixed form, the asymptotic equations obtained by the Koiter-Budiansky method, as well as an analytical solving the homogeneous eigenvalue problem and inhomogeneous one for finding the values of resolving functions near the critical point. The obtained numerical results allowed to establish a significant effect of internal pressure on the critical load and the initial post-buckling behavior of the shells under consideration.

Key words: stability, post-buckling behavior, sandwich shells, external pressure, pressure in inner layer, Koiter-Budiansky asymptotic method.

Введение.

Трехслойные оболочки с наполнителем (сэндвич-оболочки) – это оболочки с неоднородной структурой, характерной особенностью которой является то, что средний слой существенно отличается от внешних не только толщиной, но и механическими свойствами. Как правило, средний слой (заполнитель) имеет значительно большую толщину, но существенно меньшие по величине модули упругости и удельную плотность. Разработке методов расчета прочности и устойчивости трехслойных оболочек посвящено значительное число работ [1, 4, 9, 11, 12, 15]. Использование трехслойных оболочек целесообразно, в основном, при изготовлении летательных конструкций, что доказано многочисленными практическими решениями [15, 19].

Детальное изложение истории трехслойных оболочек, их преимуществ по сравнению с монококовыми, применением в настоящее время и перспективами на будущее представлены в докладе [15].

Возникла потребность в изучении такого варианта трехслойных оболочек, когда средний слой можно представить, как тело, обладающее упругостью только в трансверсальном направлении. Если внешние слои взаимодействуют посредством перпендикулярных к их поверхности линейных пружин, то эквивалентное континуальное тело будет обладать указанными свойствами. В работе [16] модель пружин между слоями двухслойной нанотрубки используется для учета взаимодействия, обусловленного силами отталкивания-притяжения Ван дер Ваальса. Сэндвич-оболочечные системы этого типа можно рассматривать также как потенциально оптимальные конструктивные конфигурации для глубоководных применений, в частности, для создания подводных аппаратов и трубопроводов. Необходимо частично изменить расчетную модель [4], так как внутренний слой трехслойной оболочки может испытывать не только поверхностное давление, передающееся от внешнего слоя через наполнитель,

но и давление противоположного знака, обусловленное наличием внутри цилиндра меньшего радиуса молекул другого вещества [18], а в подводных трубопроводах - жидкости или газа.

В настоящей работе развиты соответствующие аспекты теории трехслойных оболочек указанного типа. Вывод разрешающих уравнений для сэндвич-оболочек основан на модифицированном вариационном принципе Лагранжа. Для межслоевого пространства принята континуальная модель тела, обладающего упругостью только в трансверсальном направлении [1, 3, 4]. Уравнения получены без каких-либо дополнительных гипотез, кроме характерных для теории оболочек. Континуальные уравнения многослойных нанотрубок [7, 13, 14, 16, 17] по своей структуре аналогичны уравнениям теории многослойных оболочек, выведенным без применения единой гипотезы для всего пакета слоев [1 – 3]. Это относится и к трехслойным оболочкам, полученным с учетом трансверсальной податливости среднего слоя-заполнителя. Различие между рассматриваемыми реализациями трехслойных оболочек состоит в методах определения механических характеристик заполнителя [7, 15].

Опираясь на асимптотический метод Койтера – Будянского [5, 6, 8], сформулирована задача на собственные значения и неоднородная задача для нахождения приращений функций в начальном закритическом состоянии. Выведена формула для коэффициента b , по величине и знаку которого оцениваются возможные направления равновесной траектории в начальном закритическом состоянии, чувствительность сэндвич-оболочек к начальным геометрическим несовершенствам.

Устойчивость и начальное закритическое поведение композитных цилиндрических оболочек рассматривалась в работе [10].

1. Нелинейные уравнения равновесия трехслойных оболочек.

При выводе нелинейных уравнений равновесия трехслойных оболочек будем исходить из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta V - \delta A = 0, \quad (1)$$

где V – потенциальная энергия деформации оболочки; A – работа внешней нагрузки. Энергия V состоит из энергий двух внешних слоев V_1 и V_2 , а также среднего слоя V_3 . В соответствии с гипотезами Тимошенко для потенциальной энергии деформации V_i ($i = 1, 2$) справедливо выражение

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(T_{11,i} \varepsilon_{11,i} + T_{12,i} \varepsilon_{12,i} + T_{22,i} \varepsilon_{22,i} + T_{13,i} \varepsilon_{13,i} + T_{23,i} \varepsilon_{23,i} + \right. \\ \left. + M_{11,i} k_{11,i} + M_{12,i} k_{12,i} + M_{22,i} k_{22,i} \right) R_i dx d\varphi, \quad (2)$$

где L – длина оболочки; R_i – радиус срединной поверхности i -го слоя; $T_{mn,i}$, $M_{mn,i}$ – усилия и моменты, эквивалентные действующим в слоях напряжениям; $\varepsilon_{mn,i}$ – деформации; m, n – обозначения индексов; $k_{mn,i}$ – приращения кривизн и кручения.

Связь между силовыми и деформационными функциями задается в виде закона Гука

$$T_{11} = C_{11} \varepsilon_{11} + C_{12} \varepsilon_{12}; \quad T_{12} = C_{66} \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = C_{12} \varepsilon_{11} + C_{22} \varepsilon_{22}; \quad T_{13} = C_{55} \varepsilon_{13}; \\ T_{23} = C_{44} \varepsilon_{23}; \quad M_{11} = D_{11} \varepsilon_{11} + D_{12} \varepsilon_{12}; \quad M_{12} = D_{66} k_{12}; \quad M_{22} = D_{12} k_{11} + D_{22} k_{22}, \quad (3)$$

где C_{mn} , D_{mn} – жесткости оболочки на растяжение и изгиб [2].

Нелинейные выражения деформаций через перемещения принимаются в виде, соответствующем теории Муштари – Доннелла – Власова (МДВ)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_1^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \theta_1\theta_2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2}\theta_2^2; \\
\varepsilon_{13} &= \theta + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y}; \\
k_{11} &= \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad k_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial x},
\end{aligned} \tag{4}$$

где u, v – тангенциальные перемещения; w – перемещение по нормали, положительное направление которой определяется к центру окружности; θ, ψ – углы поворота; $y = R_i\varphi$ – для i -го слоя.

Средний слой (3-й) предполагается абсолютно податливым во всех направлениях, кроме трансверсального (ось z). Начало оси лежит на срединной поверхности этого слоя. В этом случае потенциальная энергия 3-го слоя определяется выражением

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-t_3/2}^{t_3/2} \sigma_{33} \varepsilon_{33} R_3 dx d\varphi dz. \tag{5}$$

Из соотношений теории упругости имеем

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \sigma_{33} = E_3 \varepsilon_{33}; \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad w = w_0 + z\chi,$$

где χ – функция, характеризующая изменение перемещения w по толщине.

Условия контакта при $z = -t_3/2$ и $z = t_3/2$ будут такими:

$$w_1 = w_0 - \frac{t_3}{2}\chi; \quad w_2 = w_0 + \frac{t_3}{2}\chi.$$

Получаем для перемещений среднего слоя

$$w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}; \quad \chi = \frac{w_2 - w_1}{t_3}. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{33} = \frac{w_2 - w_1}{t_3}; \quad T_{33} = t_3 \sigma_{33} = E_3 t_3 \varepsilon_{33} = E_3 (w_2 - w_1); \quad V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{E_3}{t_3} (w_2 - w_1)^2 R_3 dx d\varphi. \tag{8}$$

Известно, что отношение E_3/t_3 равно коэффициенту постели двумерного основания толщиной t_3 без учета поперечных напряжений. Пусть

$$C_3 = E_3 / t_3.$$

С использованием соотношений (2) – (8) из вариационного принципа (1), когда независимыми функциями принимаются перемещения u_i, v_i, w_i и углы θ_i, ψ_i , получим 10 уравнений в частных производных от указанных перемещений. В применяемом варианте теории оболочек использование выражения тангенциальных деформаций через перемещения (4) позволяет сократить разрешающую систему дифференциальных до 8-ми уравнений. Эта система будет иметь смешанный вид, так как она будет содержать производные не только от перемещений, но и от функции усилий. По-

ложим, что в функционале (2), кроме перемещений u, v, w , независимыми будут также тангенциальные усилия T_{11}, T_{12}, T_{22} . Для деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) будем иметь

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\Delta}(T_{11}C_{22} - T_{12}C_{12}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\Delta}(-T_{11}C_{12} + T_{22}C_{11}); \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{C_{66}}T_{12}; \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Составляющая функционала (2) V_i преобразуется к виду

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) T_{11} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \theta_1 \theta_2 \right) T_{12} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) T_{22} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} (C_{22}T_{11}^2 + C_{11}T_{22}^2 - 2C_{12}T_{11}T_{22}) - \frac{1}{C_{66}}T_{12}^2 + C_{13} \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{23} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + D_{11} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь индекс «2» опущен, так как выражение (9) справедливо для обоих несущих слоев. Введем функцию усилий F , приняв

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Учитывая, что перемещения среднего слоя, деформации ε_{33} и усилия T_{33} выражаются с помощью соотношений (5) – (7), варьируемые в функционале вариационного принципа Лагранжа (1) будут функции F_1 и F_2 , прогибы w_1 и w_2 , функции θ_1, θ_2 и ψ_1, ψ_2 . Вследствие этого вариационное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[L_1(w_i, F_i) + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(w_i, w_i) \right] \delta F_i + \left[L_2(w_i, F, \theta_i, \psi_i) + (F_i, w_i) + q_i \right] \delta w_i + \right. \\ \left. + L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \theta_i + L_4(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \psi_i \right\} R_i dx d\varphi - \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \psi^2} + T_{11,0}^i \right) \delta w \right]_0^L R_i d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагается, что на оболочку действует внешнее давление q_1 – приложенное к поверхности первого слоя и давление q_2 , обусловленное наличием во внутренней полости второго цилиндра жидкости или газа. В (11) использованы обозначения дифференциальных операторов $L_i(\)$ от разрешающих функций

$$\begin{aligned} L_1(\) = & \left(A_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2A_{12} \frac{\partial^4}{R^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + A_{22} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \varphi^4} \right) F_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}; \\ L_2(\) = & \left[D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} (D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial \varphi^2} \right] \theta_i + \left[\frac{1}{R_i} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R_i^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \psi_i + \\ & + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^3} - (-1)^i C_3 (w_2 - w_1) \frac{R_3}{R_i}; \\ L_3(\) = & \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \theta_i + \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial \varphi} - C_{35} \left(\theta_i + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

$$L_4(\cdot) = \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x \partial \varphi} + \left(D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi_i - C_{44} \left(\psi_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right). \quad (12)$$

В выражении L_i имеются коэффициенты

$$A_{11} = \frac{C_{11}}{\Delta}; \quad A_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{66}} - \frac{2C_{12}}{\Delta} \right); \quad A_{66} = \frac{C_{22}}{\Delta}; \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Оператор (\cdot, \cdot) от функций F и w может быть представлен в виде:

$$(F, w) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Из вариационного уравнения (11) получаем, приравнявая к нулю выражения при вариациях $\delta F_i, \delta w_i, \delta \theta_i, \delta \psi_i$, восемь нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_1(F_i) + \frac{1}{2}(w_i, w_i) &= 0; \quad L_2(\theta_i, \psi_i) + (F_i, w_i) = q; \\ L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) &= 0; \quad L_4(\theta_i, \psi_i, w_i) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя эти уравнения, можем исследовать напряженно-деформированное состояние оболочки на всей траектории деформирования, включая предельные точки, точки бифуркации, закритическое поведение.

2. Докритическое состояние оболочки.

В представленной выше расчетной модели сэндвич-оболочки каждый несущий слой обладает столькими же степенями свободы, что и отдельно взятый слой без учета связей, присущих трехслойному пакету. Это позволяет нагрузку на оболочку задавать распределенной по слоям. В рассматриваемой задаче к внешнему слою ($i=1$) приложено сжимающее давление интенсивностью q_1 , а к внутреннему ($i=2$) – давление противоположного направления q_2 . Торцевые сечения каждого слоя предполагаются шарнирно опертыми не нагруженными. При безмоментном докритическом состоянии из вариационного уравнения (1), принимая во внимание соотношения (2) – (8), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} T_{22,1} &= -C_{22} \frac{w_1}{R_1}; \quad T_{22,2} = -C_{22} \frac{w_2}{R_2}; \quad -C_{22} \frac{w_1}{R_1^2} + C_3 (w_2 - w_1) \frac{R_3}{R_1} = -q_1; \\ -C_{22} \frac{w_2}{R_2^2} - C_3 (w_2 - w_1) \frac{R_3}{R_2} &= -q_2. \end{aligned}$$

Решение этой системы позволяет найти докритические усилия

$$T_{22,1} = -\lambda a_q^{(1)}; \quad T_{22,2} = -\lambda a_q^{(2)},$$

где

$$\lambda = q_1 R_1; \quad a_q^{(1)} = 1 - \omega; \quad a_q^{(2)} = -\frac{q_2 R_2}{q_1 R_1} + \omega; \quad \omega = \frac{C_3 R_1 R_3 \left(1 + \frac{q_2 R_2^2}{q_1 R_1^2} \right)}{C_{22} + C_3 R_3 (R_1 + R_2)}.$$

Решение однородной задачи (17), (18) при заданных коэффициентах $a_q^{(1)}, a_q^{(2)}$ позволяет найти критическое значение параметра λ_c или, соответственно, значение интенсивности внешнего давления q_1^c . Прогибы w_1 и w_2 при достижении критического состояния найдем по формулам

$$w_1 = \lambda_c R_1 a_q^{(1)} / C_{22}; \quad w_2 = \lambda_c R_2 a_q^{(2)} / C_{22}. \quad (14)$$

Знание этих прогибов даст возможность оценить, как изменяется расстояние между несущими слоями перед бифуркацией. От этого зависит значение константы межслоевого взаимодействия, вычисляемой по методике работы [7].

3. Асимптотический анализ нелинейных уравнений.

Определив докритическое состояние, перейдем к расчету критической нагрузки и начального закритического поведения в окрестности критической точки. Для этого воспользуемся асимптотическим методом Койтера [8] в альтернативном варианте Будянского [5, 6]. Полагаем, что нагрузка на оболочку изменяется пропорционально параметру λ . Нагрузка бифуркации определяется значением этого параметра λ_q . Равновесное состояние оболочки после прохождения критической точки определяется изменившимся значением параметра λ , характер которого можно описать с помощью асимптотического разложения

$$\lambda = \lambda_c (1 + a\xi + b\xi^2 + \dots). \quad (15)$$

Таким образом, при известном значении параметра λ_c , согласно теории [8], закритическое поведение оболочки можно определить, если найти значения коэффициентов ряда (14) a и b . Следуя [6], представим разрешающие функции, относительно которых записаны уравнения (13) в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра

$$\begin{bmatrix} F_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} F_{i,1} \\ w_{i,1} \\ \theta_{i,1} \\ \psi_{i,1} \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} F_{i,2} \\ w_{i,2} \\ \theta_{i,2} \\ \psi_{i,2} \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} F_{i,3} \\ w_{i,3} \\ \theta_{i,3} \\ \psi_{i,3} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где ξ – малый параметр, амплитуда моды выпучивания, первый индекс i определяет номер слоя ($i = 1, 2$), второй – номер члена в разложении.

Подставим ряды (16) в вариационное уравнение (11). Приравнявая к нулю выражения при степенях параметра ξ , получим последовательность формулировок задач относительно функций, являющихся коэффициентами указанных рядов (16). При первой степени будем иметь вариационное уравнение равновесия в точке, где основная траектория пересекается с траекторией другого решения нелинейных уравнений. Однородная задача относительно функций с индексом «1» выводится из уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,1}, \dots) \delta F_{i,1} + \left[L_2(F_{i,1}, \dots) + \lambda_c (F_{i,0}, w_{i,1}) \right] \delta w_{i,1} + \right. \\ & \left. + L_3(w_{i,1}, \dots) \delta \theta_{i,1} + L_4(w_{i,1}, \dots) \delta \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Скобка $(\ , \)$ принимает вид

$$\lambda(F_{i,0}, w_{i,1}) = -\lambda_c a_q \frac{\partial^2 w_{i,1}}{R_i^2 \partial \varphi^2}. \quad (18)$$

Вариации функции в уравнении (17) могут принимать значения коэффициентов в разложениях (16). В результате получим соотношения их ортогональности в таком виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,n} + \left[L_2(F_{i,1}, \dots) - \lambda(F_{i,1}, w_{i,1}) \right] w_{i,n} + \right. \\ & \left. + L_3(w_{i,1}, \dots) \theta_{i,n1} + L_4(w_{i,1}, \dots) \psi_{i,n} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из этого условия вытекает также другой вид этого соотношения

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,n}, w_{i,n}) F_{i,1} + [L_2(F_{i,n}, \dots) - \lambda(F_{i,n}, w_{i,1})] w_{i,1} + \right. \\ \left. + L_3(w_{i,n}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,1}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (20)$$

Используем условия (20) для нахождения коэффициентов a и b в разложении (14). Рассмотрим соотношение, из которого можно получить значение коэффициента a . При ξ^2 будем иметь

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,2}, \dots) \frac{1}{2} (w_{i,1}, w_{i,1}) \right\} F_{i,1} + [L_2(w_{i,2}, \dots) - a \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,2}) + (F_{i,1}, w_{i,2})] w_{i,1} + \\ + L_3(w_{i,2}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,2}, \dots) \psi_{i,1} \Big\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (21)$$

Учитывая условия (20) при $n = 2$, а также, что

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (w_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,1}) w_{i,1} \right] R_i dx d\varphi = 0,$$

из (21) находим $a = 0$.

Аналогичный интеграл при ξ^3 приобретает вид

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ [L_1(F_{i,3}, \dots) + (w_{i,1}, w_{i,2})] F_{i,1} + [L_2(w_{i,3}, \dots) - \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,3}) + (F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1}) - \right. \\ \left. - \lambda_c b(F_{i,0}, w_{i,1})] w_{i,1} + L_3(w_{i,3}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,3}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0.$$

Если учесть условия ортогональности из (20) получим

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ (w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + [(F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1})] w_{i,1} - \lambda_c b(F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0.$$

Эти уравнения позволяют вычислить коэффициент b , определяющий характер начального закритического поведения рассматриваемой оболочки. При известных решениях однородной задачи (17) и неоднородной (21), найдем

$$-b = \frac{B}{\lambda_c A}, \quad (22)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ [(w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,2})] w_{i,1} + (F_{i,2}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi; \\ A = \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} R_i dx d\varphi. \quad (23)$$

4. Решение задачи устойчивости и начального закритического поведения.

Для расчета критического значения параметра нагрузки λ_c воспользуемся вариационным уравнением (17). При заданных граничных условиях, ввиду постоянства коэффициентов при искомым функциях, решение можно представить в виде одного члена тригонометрического ряда. Будем иметь

$$F_{i,1} = B^{(i)} \sin l_m x \cos n\varphi; \quad w_{i,1} = C^{(i)} \sin l_m x \cos n\varphi; \\ \theta_{i,1} = D^{(i)} \cos l_m x \cos n\varphi; \quad \psi_{i,1} = E^{(i)} \sin l_m x \sin n\varphi \quad (24)$$

для первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) слоев

$$l_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 2, 3, \dots$$

После подстановки (24) в уравнения (17) и выполнения необходимых процедур получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\left[X_{ij} \right] \bar{Y} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 8; \quad \bar{Y} = (B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}, E^{(2)}), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} X_{11} &= A_{11}l_m^4 + 2A_{12}l_m^2n_1^2 + A_{26}n_1^3; & X_{12} &= \frac{1}{R_1}l_m^2; & X_{21} &= X_{12}; \\ X_{22} &= -\frac{R_3}{R_1}C_3; & X_{23} &= D_{11}l_m^3 + (D_{12} + 2D_{66})l_m n_1^2; & X_{24} &= -(D_{12} + 2D_{66})l_m^2 n_1; & X_{26} &= -\frac{R_3}{R_1}C_3; \\ X_{32} &= -C_{55}l_m; & X_{33} &= -D_{11}l_m^2 - D_{66}n_1^2; & X_{34} &= (D_{12} + D_{66})l_m n_1; \\ X_{42} &= C_{44}n_1; & X_{43} &= X_{34}; & X_{44} &= -D_{66}l_m^2 - D_{22}n_1^2; & n_1 &= \frac{n}{R_1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты X_{ij} при $i = 5, \dots, 8$ вычисляются по таким же формулам, но с заменой R_1 на R_2 , а также i, j на $i+4, j+4$, кроме X_{26} , так как $X_{62} = -(R_3/R_2)C_3$. Восемь уравнений системы (25) сведем к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \left[-\frac{X_{12}^2}{X_{11}} + X_{22} + X_{23} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} + X_{24} \frac{\Delta'_2}{\Delta'} + \lambda(a'_t l_m^2 + a'_q n_1^2) \right] C^{(1)} + X_{26} C^{(2)} &= 0; \\ X_{26} C^{(1)} + \left[-\frac{X_{56}^2}{X_{55}} + X_{66} + X_{67} \frac{\Delta''_1}{\Delta''} + X_{68} \frac{\Delta''_2}{\Delta''} + \lambda(a_t l_m^2 + a_q n_2^2) \right] C^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\Delta' = X_{33}X_{44} - X_{34}^2$; $\Delta'_1 = X_{32}X_{34} + X_{42}X_{43}$; $\Delta'_2 = -X_{33}X_{42} + X_{32}X_{43}$.

Выражения для Δ'' , Δ''_1 , Δ''_2 будут такими же при замене индексов i, j на $i+4, j+4$.

Уравнения (26) используются для определения критического значения параметра λ_c и волновых чисел m и n , определяющих форму выпучивания при бифуркации.

При записи системы уравнений относительно функций с индексом «2» ограничимся только 1-м и 2-м, 5-м и 6-м, так как уравнения 3, 4, 7, 8 остаются однородными такого же вида, что и в предыдущей задаче. При $a = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} L_1(F_{i,2}) &= \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}); \\ L_2(w_{i,2}, \dots) - \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,1}) &= -(F_{i,1}, w_{i,1}). \end{aligned} \quad (27)$$

При $i = 1$ это будет 1-е и 2-е уравнения исходной системы, а при $i = 2$ – 5-е и 6-е уравнения. При подстановке выражений (24) для бифуркационных функций $w_{i,1}$ и $F_{i,1}$ в (27) для правых частей получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}) &= \gamma_1^{(i)} \left(\sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right); \\ (F_{i,1}, w_{i,1}) &= \gamma_2^{(i)} \left(\sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\gamma_1^{(i)} = \frac{1}{2}(C^{(i)})^2 l_m^2 n^2$; $\gamma_2^{(i)} = B^{(i)} C^{(i)} l_m^2 n_1^2$; $b_k = \frac{4k}{\pi(k^2 - 4m^2)}$; $c_k = \frac{4}{n\pi}$, $k = 1, 3, \dots$

Решение уравнений (27) задаем в виде

$$\begin{aligned} F_{i,2} &= \sum_k B_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k B_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \quad w_{i,2} = \sum_k C_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k C_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \\ \theta_{i,2} &= \sum_k D_{k,0}^{(i)} \cos l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k D_{k,2n}^{(i)} \cos l_k x; \quad \psi_{i,2} = \sin 2n\varphi \sum_k E_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x. \end{aligned} \quad (29)$$

Это решение состоит из осесимметричной и неосесимметричной частей, причем последняя имеет форму с удвоенным количеством волн, имевших место при бифуркации. Система алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов (29) распадается на независимые системы для каждого значения k . Матрица подсистем будет иметь вид (26). Тем же путем получим систему 2-х уравнений, которая в данном случае будет неоднородной. Коэффициенты осесимметричной составляющей в разложениях (29) находятся при решении системы

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{k,0}^{(1)} - \lambda_c T_{11,0}^{(1)} l_k^2 \right) C_{k,0}^{(1)} - \frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,0}^{(2)} &= -\left(\gamma_2^{(1)} + A_{11} l_k^2 \gamma_1^{(1)} \right); \\ -\frac{R_3}{R_2} C_3 C_{k,0}^{(1)} + \left(\lambda_{k,0}^{(2)} - \lambda_c T_{11,0}^{(2)} l_k^2 \right) C_{k,0}^{(2)} &= -\left(\gamma_2^{(2)} + A_{11} l_k^2 \gamma_1^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\lambda_{k,0}^{(i)} = \frac{C_{55} D_{11} l_k^4}{C_{55} + D_{11} l_k^3} + \frac{1}{A_{11} R_i^2} + \frac{R_3}{R_i} C_3. \quad (31)$$

Для определения коэффициентов $B_{k,0}^{(i)}$ служит выражение

$$B_{k,0}^{(i)} = \frac{1}{R_i A_{11} l_k^4} C_{k,0}^{(i)} + \frac{\gamma_1^{(i)}}{A_{11} l_k^4}. \quad (32)$$

Аналогичная система для решения неосесимметричной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\lambda_{k,2n}^{(1)} - \lambda_c \left(T_{11,0}^{(1)} l_k^2 + T_{22,0}^{(1)} (2n_1)^2 \right) \right] C_{k,2n}^{(1)} - \frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,2n}^{(2)} &= \gamma_2^{(2)} + \frac{X_{12}}{X_{11}} \gamma_1^{(1)}; \\ -\frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,2n}^{(1)} + \left[\lambda_{k,2n}^{(2)} - \lambda_c \left(T_{11,0}^{(2)} l_m^2 + T_{22,0}^{(2)} (2n_2)^2 \right) \right] C_{k,2n}^{(2)} &= \gamma_2^{(2)} + \frac{X_{56}}{X_{55}} \gamma_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\lambda_{k,2n}^{(1)} = \frac{X_{12}^2}{X_{11}} - X_{22} - X_{33} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} - X_{23} \frac{\Delta'_2}{\Delta'}$, а величины $\lambda_{k,2n}^{(2)}$, $X_{i,j}$ вычисляются путем замены, аналогичной использовавшейся выше.

Получив решение однородной (17) и неоднородной (27) систем уравнений, можем применить выражение (23) для нахождения коэффициента b , по величине и знаку которого можно судить о характере начального закритического поведения рассматриваемых оболочек (9). Числитель уравнения (22) представим в таком виде:

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{R}{R_i^2} \left(\frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial \varphi^2} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w_{i,2}}{\partial x} + \right. \\ &+ \frac{2}{R_i^2} \left(\frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x^2} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial w_{i,2}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x^2} - \end{aligned} \quad (34)$$

$$-\frac{2}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x \partial \varphi} \Big] R_i dx d\varphi .$$

Для знаменателя в случае действия окружного усилия λa_q имеем выражение

$$A_i = -\lambda_c \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L a_q^i \left(\frac{\partial w_{i,1}}{R_i \partial \varphi} \right)^2 R_i dx d\varphi . \quad (35)$$

С учетом этих обозначений получим

$$b = -\frac{(B_1 + B_2)}{(A_1 + A_2)} . \quad (36)$$

Функции $w_{i,1}$, $w_{i,2}$, $F_{i,1}$, $F_{i,2}$, заданные в виде тригонометрических функций (32) и тригонометрических рядов (29), становятся известными после решения однородной системы алгебраических уравнений (26) и неоднородной системы (33). Подстановка этих функций в выражения (34) и (35) с последующим интегрированием приводит к таким выражениям для числителя и знаменателя дроби (22)

$$B = -2n^2 l_m^2 \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{R_i^2} \sum_k \left[2 \left(2 \frac{B^{(i)}}{C^{(i)}} C_{k,0} + B_{k,0} \right) \frac{k}{4m^2 - k^2} + \left(2 \frac{B^{(i)}}{C^{(i)}} C_{k,2n} + B_{k,2n} \right) \frac{1}{k} \right] \right\};$$

$$A = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^2 \left(C^{(i)} \frac{n}{R_i} \right)^2 a_q^i .$$

При известном коэффициенте b можно вычислить критические значения нагрузки λ_s оболочки с геометрическими несовершенствами в виде моды выпучивания [8]

$$\left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_c} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b} \bar{\xi} \frac{\lambda_s}{\lambda_c} ,$$

где $\bar{\xi}$ – амплитуда начального прогиба.

4. Результаты расчета.

В качестве первого примера выполним расчет на устойчивость двухслойных углеродных нанотрубок (DWCNT) с радиусами внешнего слоя $R_1 = 0,95$ nm и внутреннего $R_2 = 0,61$ nm. Нанотрубки по хиральности относятся к типу креслоподобных ($m = n$). В соответствии с принятыми правилами рассматриваемый вариант нанотрубки можно записать как [(14, 14), (9, 9)].

Отношение L / R_1 для каждого варианта остается неизменным за счет соответствующим образом заданной длины L . Толщина каждого слоя равна 0,066 nm. Механические характеристики слоев приняты такими же, как и в работе [13]: $E_1 = 5791,1$ GPa; $E_2 = 7973,5$ GPa; $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1984$ GPa; $\nu = 0,169$.

Результаты, характеризующие зависимость критических значений интенсивности внешнего давления q_c двухслойных нанотрубок от отношения L / R_1 , представлены в виде графиков на рис. 1. Если обозначить $q_{21} = q_2 / q_1$, то кривая 1 построена для $q_{21} = 0$, что соответствует пустой нанотрубке, кривая 2 – для нанотрубки, заполненной молекулами другого вещества, действие которых представляется внутренним давлением q_2 , причем $q_{21} = 1$ [18]. Если q_{21} меньше единицы, то соответствующая

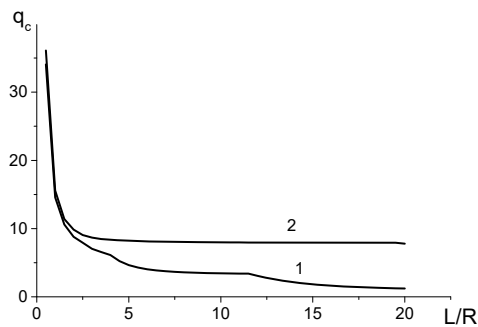


Рис. 1

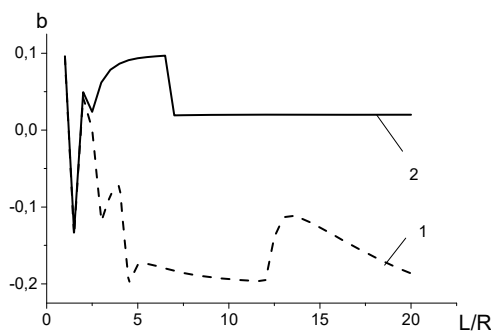


Рис. 2

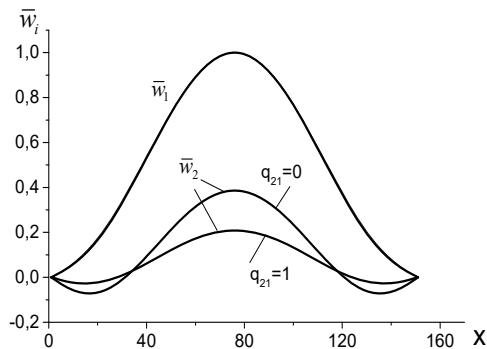


Рис. 3

кривая будет лежать между приведенными на рис. 1. Пусть q_c^e – критическое значение давления пустой нанотрубки; q_c^f – заполненной. В интервале $0,5 < L/R_1 < 6$ отношение $1 < q_c^e / q_c^f < 2,5$. Волнообразование при потере устойчивости пустых и заполненных DWCNT с увеличением длины становится различным (количество поперечных волн больше для заполненных).

На рис. 2 приведены графики, описывающие зависимость коэффициента начального закритического поведения b от отношения L/R_1 . Параметр $C_3 = 89,55$ GPa/nm. Кривые 1 и 2 получены для таких же нанотрубок, что и на предыдущем рисунке. Они имеют вид ломаной с изменяющимися углами наклона и скачкообразно зависящей от длины величиной. Такой характер кривых связан со сменой форм выпучивания. Начальный участок каждой кривой отражает частую смену форм, которая снижается с увеличением L/R_1 . Наиболее существенное различие кривых 1 и 2 состоит в том, что первая во всех точках, кроме первых, имеет отрицательные ординаты, вторая – положительные. Так как ординаты на этих графиках соответствуют значениям коэффициента b , то это значит, что критическое состояние пустой DWCNT неустойчиво, заполненной – устойчиво. К тому же, как следует из рис. 1, для заполненных оболочек критические значения внешнего давления существенно больше, чем для пустых.

Продольные формы начального закритического деформирования DWCNT с $L/R_1 = 2$ показаны на рис. 3. Все ординаты изображенных функций \bar{w}_i – это отношения прогибов w_i к максимальному значению прогибов верхнего слоя w_1 . Результаты представлены для пустой ($q_{21} = 0$) и заполненной ($q_{21} = 1$) нанотрубок. Прогибы верхнего слоя w_1 в обоих случаях совпадают, внутреннего w_2 – различаются. При $q_{21} = 0$ прогибы \bar{w}_2 концентрируются посередине оболочки и меняют знак в окрестности торцов. При $q_{21} = 1$ амплитуды прогибов \bar{w}_2 становятся меньше, кривая по всей длине имеет более пологий характер.

В качестве второго примера рассмотрим устойчивость трехслойных оболочек, несущие слои которых выполнены из углепластика с механическими характеристиками

$$E_1 = 253,4 \text{ GPa}; E_2 = 12,4 \text{ GPa}; G_{12} = G_{13} = 5,04 \text{ GPa}; G_{23} = 4,36 \text{ GPa}.$$

Модуль упругости среднего слоя примем $E_3 = 1 \text{ МПа}$; жесткость $C_3 = E_3 / t_3$. При заданных радиусах верхнего слоя R_1 , внутреннего – R_2 и толщине несущих слоев t будем иметь

$$t_3 = R_1 - R_2 - t.$$

Рассмотрим при постоянном $R_1 = 100 \text{ мм}$ три варианта $R_2 = 90 \text{ мм}, 80 \text{ мм}, 70 \text{ мм}$. Длина оболочки в каждом случае $L = 2,5R_1$; толщина $t = 2 \text{ мм}$. Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 4 – 8. По оси абсцисс на этих рисунках нанесены числа кратно которым изменяется C_3 .

На рис. 4 приведены кривые, иллюстрирующие зависимость критического внешнего давления q_1 от жесткости C_3 (значение коэффициента k) для указанных трех вариантов трехслойной оболочки при отсутствии внутреннего давления ($q_2 = 0$). Можно отметить, что при малых значениях жесткости C_3 наибольшие критические нагрузки имеют место для оболочки с радиусом внутреннего слоя $R_2 = 90 \text{ мм}$. Однако при увеличении жесткости заполнителя C_3 происходит изменение в порядке распределения кривых с $R_2 = 90 \text{ мм}, 80 \text{ мм}, 70 \text{ мм}$ на противоположный. На рис. 4 показано, что кривая с $R_2 = 70 \text{ мм}$ при $k > 9$ располагается выше других, а кривая с $R_2 = 90 \text{ мм}$ – ниже.

Начальное закритическое поведение тех же оболочек характеризуют графики на рис. 5, для которых коэффициент $b < 0$ при всех рассмотренных значениях жесткости C_3 . На рис. 6 и 7 приведены результаты расчета критических нагрузок и коэффициента закритического поведения b для тех же трехслойных оболочек при наличии внутреннего давления ($q_2 = 1$). Оказалось, что оболочки с радиусом $R_2 = 90 \text{ мм}$ имеют наибольшие критические нагрузки при рассмотренном значении k жесткости C_3 . В то же время область неустойчивого начального закритического поведения этой оболочки уже, чем у двух других оболочек. Оболочка с $R_2 = 70 \text{ мм}$ при $k > 4$ имеет $b > 0$, что также характеризует ее нечувствительность к несовершенствам, имеющим форму моды выпучивания. О том,

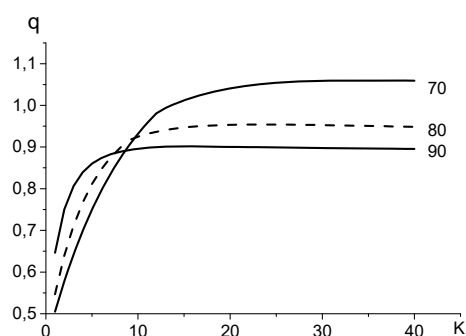


Рис. 4

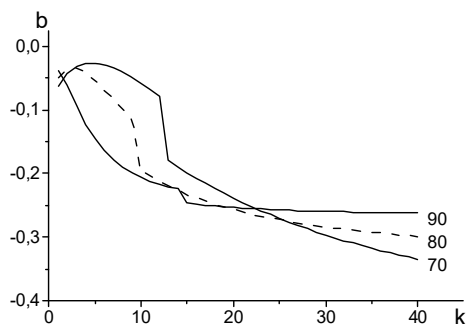


Рис. 5

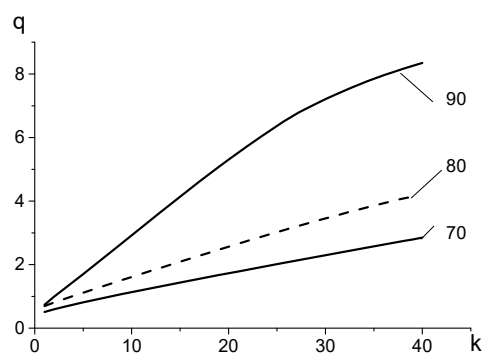


Рис. 6

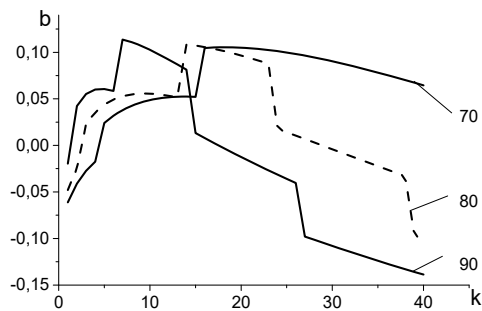


Рис. 7

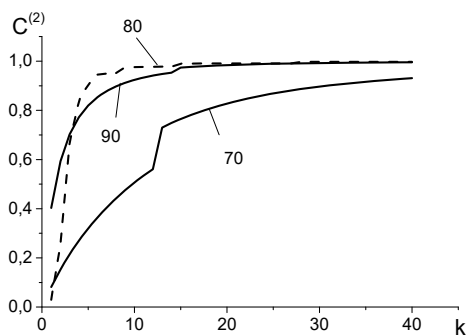


Рис. 8

как взаимодействуют несущие слои трехслойной оболочки при потере устойчивости, дают представление кривые на рис. 8.

Здесь показаны графики изменения амплитуд мод выпучивания $C^{(2)}$ (24) внутренних оболочек с радиусами $R_2 = 70$ мм, 80 мм, 90 мм при единичной амплитуде внешней оболочки в зависимости от параметра k . Отмечается стремление амплитуды $C^{(2)}$ к единице с увеличением жесткости C_3 . Изгиб несущих слоев при $R_2 = 70$ мм происходит таким образом, что $C^{(2)} = 1$ на всем рассмотренном промежутке значений жесткости C_3 . В случае $R_2 = 80$ мм или $R_2 = 90$ мм при $k > 5$ кривые весьма близки к асимптоте $C^{(2)} = 1$. Выпучивание трехслойной оболочки как единого целого возможно только при определенном значении трансверсальной жесткости заполнителя. Это значение может быть определено с помощью описанной методики. Интересно также

отметить, что при учете в расчетной модели двух поверхностей приведения есть возможность находить формы потери устойчивости с различными амплитудами слоев.

Заключение.

Разработана расчетная модель выпучивания трехслойных оболочек с трансверсально упругим легким заполнителем. Ее отличительной особенностью является то, что в рассматриваемой сэндвич-оболочке внешняя и внутренняя цилиндрические оболочки обладают столькими же степенями свободы, как и не связанные заполнителем. При этом возникает возможность учета индивидуального нагружения слоев. Получено решение задачи об устойчивости трехслойной оболочки при действии внешнего давления, приложенного к верхнему слою и противоположно направленного давления, действующего во внутреннем цилиндре. В случае пренебрежения поперечным обжатием задача становится тривиальной. Предлагаемую модель трехслойной оболочки можно рассматривать также в качестве континуального приближения двухслойной нанотрубки, когда межслойные силы взаимодействия Ван дер Ваальса моделируются континуальной средой [7]. В отличие от известных подходов, предлагаемый вариант получен с использованием вариационного принципа Лагранжа. При этом выведены непротиворечивые нелинейные дифференциальные уравнения равновесия, которые положены в основу алгоритма расчета устойчивости и закритического поведения трехслойной оболочки с использованием асимптотического метода Койтера – Будянского.

Анализируя полученные результаты, приходим к следующим выводам:

Критическое значение интенсивности внешнего давления заполненной двухслойной нанотрубки выше, чем пустой. Это различие становится значительным с увеличением длины нанотрубки. В работе [18] также установлен факт значительного увеличения критического давления за счет заполнения.

Весьма важным дополнительным параметром при оценке устойчивости двухслойной нанотрубки является коэффициент закритического поведения b , который

для пустой трубки рассмотренных размеров отрицательный, а для заполненной – положительный. Следовательно, критическое состояние в первом случае неустойчиво, а во втором устойчиво.

Формы выпучивания внешнего слоя при потере устойчивости пустой и заполненной двухслойной нанотрубок близки, а внутреннего – существенно различаются. Сказывается влияние давления, которое приводит к уплощению поверхности.

Исследование устойчивости нагруженных внешним давлением трехслойных оболочек с углепластиковыми несущими слоями при постоянном радиусе внешнего слоя и различными радиусами внутреннего показало, что при отсутствии внутреннего давления критическая нагрузка возрастает с увеличением трансверсальной жесткости заполнителя до некоторого уровня, а затем почти не изменяется. Наибольшее значение критической нагрузки достигается при наименьшем из рассмотренных радиусов внутреннего слоя (70 мм).

При отсутствии внутреннего давления коэффициент начального закритического поведения оболочек с рассмотренными радиусами отрицательный при всех значениях жесткости заполнителя, хотя характер его изменения различный для каждого варианта.

Если цилиндр с меньшим радиусом в трехслойном пакете подвержен внутреннему давлению, то критическая нагрузка на трехслойную оболочку существенно возрастает. Наиболее значительную поддерживающую роль внутреннее давление оказывает на оболочку с радиусом 90 мм. Оболочки при наличии внутреннего давления в широком диапазоне размеров обладают устойчивым закритическим поведением.

Показано, что трехслойная оболочка при малых значениях трансверсальной жесткости теряет устойчивость по форме с равным количеством продольных и поперечных волн для обоих слоев, но с различной амплитудой. Формы прогибов слоев в начальном закритическом состоянии не совпадают.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано узагальнену розрахункову модель для дослідження стійкості та початкової закритичної рівноважної траєкторії тришарових циліндричних оболонок з пружним заповнювачем, який чинить опір тільки поперечному розтягу – стиску. Складовими частинами цієї моделі є нелінійні рівняння рівноваги в змішаному вигляді, асимптотичні рівняння, отримані методом Койтера-Будяньського, а також аналітичне розв'язання однорідної задачі на власні значення і неоднорідної для знаходження значень розв'язувальних функцій в околі критичної точки. Отримані чисельні результати дозволили встановити істотний вплив внутрішнього тиску на критичне навантаження і початкову закритичну поведінку оболонок, що розглядаються.

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1981. – 376 с.
2. *Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. *Ванин Г.Л., Семенюк Н.П.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.
4. *Григолюк Э.И.* Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1957. – № 1. – С.77 – 84.
5. *Ямаки Н.* Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круглой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV международ. конгр. IUTAM. – М: Мир, 1979. – С. 715 – 750.
6. *Budiansky B.* Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – 14. – P. 2 – 65.
7. *He X.Q., Kitipornchai S., Liew K.M.* Buckling Analysis of Multi-Walled Carbon Nanotubes: A Continuum Model Accounting for Van Der Waals Interaction // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – 53. – P. 303 – 326.
8. *Koiter W.T.* Elastic stability and post-buckling behavior // Proc. Symp. Nonlinear Problems. – Madison: Univ. of Wisconsin Press. – 1963. – P. 257 – 275.
9. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk F.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shells Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech.– 2018. – 54, N 2. – P. 172 – 179.

10. *Semenyuk N.P.* Initial Supercritical Behavior of Fiberglass Cylindrical Shells with Filler under Axial Compression // *Int. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 5. – P. 478 – 484.
11. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvorny A.V.* Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells under Compressive Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 2. – P. 211 – 221.
12. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* Stability and Initial Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Sandwich Shells with Unidirectional Elastic Filler // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 6. – P. 636 – 647.
13. *Shen H.S.* Postbuckling prediction of double-walled carbon nanotubes under hydrostatic pressure // *Int. J. of Solids Struct.* – 2004. – **41**, N 9 – 10. – P. 2643 – 2657.
14. *Shi J.X., Natsuki T., Ni Q.Q.* Radial buckling of multi-walled carbon nanotubes under hydrostatic pressure // *Appl. Physics A* – 2014. – **117**. – N 3. – P. 1103 – 1108.
15. *Vinson J.R.* Sandwich Structures: Past, Present, Future / *Sandwich Structures 7: Advancing in Sandwich Structures and Materials: Proc. of the 7th International Conference on Sandwich Structures.* – Aalborg Univ., Denmark, 2005. – P. 29 – 31.
16. *Wang C.M., Ma Y.Q., Zhang Y., Ang K.* Buckling of double-walled carbon nanotubes modeled by solid shell elements // *J. Appl. Physics.* – 2006. – **99** (11). – 114317.
17. *Wang C.M., Zhang Y.Y., Xiang Y., Reddy J.N.* Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes // *Appl. Mech. Reviews.* – 2010. – **63**. – P. 1 – 18.
18. *Wang C.Y., Mioduchowski A., Ru C.Q.* Critical External Pressure for Empty or Filled Multiwall Carbon Nanotubes // *J. of Computational and Theoretical Nanoscience.* – 2005. – 1. – P. 1 – 5.
19. *Yuan C., Bergsma O., Koussios S. et al.* Optimization of Sandwich Composites Fuselages Under Flight Loads // *Appl. Compos. Mater.* – 2012. – **19**, N 1. – P. 47 – 64.

Поступила 11.10.2018

Утверждена в печать 05.11.2019