

Е. А. Сторожук<sup>1</sup>, В. А. Максимюк<sup>2</sup>, И. С. Чернышенко<sup>2</sup>

## НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>stevan@ukr.net, <sup>2</sup>desc@innmech.kiev.ua*

**Abstract.** A statement of the physically nonlinear boundary problems is given for a weakened by the rectangular hole orthotropic cylindrical shell under action of the static loads. The system of solving equations is obtained on the basis of relations of the theory of thin Kirchhoff-Love shells and the deformation theory of plasticity of anisotropic media. A numerical method is developed for solving this class of nonlinear problems. It is based on the use of the Newton's method, additional stresses and finite elements methods. The stress concentration near the rectangular hole on the surface of the orthotropic cylindrical shell is studied taking into account the real properties of the material within the framework of nonlinear elasticity.

**Key words:** orthotropic cylindrical shell, rectangular hole, physically nonlinear problem, nonlinear elasticity, finite element method, stress concentration, static load.

### **Введение.**

Цилиндрические оболочки с прямоугольными отверстиями являются важными структурными элементами ракет, самолетов, ветряных турбин, сосудов давления и морских сооружений.

Большинство результатов по исследованию концентрации напряжений в цилиндрических оболочках, ослабленных прямоугольными отверстиями и находящихся под действием статических нагрузок, получено при решении линейно-упругих задач [3, 16, 18].

Решение же нелинейных краевых задач по данной проблеме сопряжено со значительными математическими трудностями и рассмотрено в ограниченном количестве работ. Все результаты в этих работах получены для оболочек, изготовленных из металлов или их сплавов. Так, упругопластическое состояние цилиндрической оболочки с одним прямоугольным отверстием исследовано в работе [2], а с двумя и тремя – в [12]. Геометрически нелинейное деформирование изотропной цилиндрической панели с прямоугольным вырезом изучено в работе [4].

Значительный интерес вызывают также исследования влияния свободного или подкрепленного прямоугольного отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек [6, 10, 11].

Отметим, что решению краевых задач для цилиндрической оболочки, ослабленной криволинейным (круговым или эллиптическим) отверстием, с учетом физической и геометрической нелинейностей посвящены работы [7, 8, 14, 19, 21].

Ниже на основании теории непологих оболочек Кирхгофа – Лява и деформационной теории пластичности анизотропных сред дана постановка физически нелинейных задач статики для тонких композитных цилиндрических оболочек с прямоугольным отверстием, изложена методика численного решения данного класса задач и исследовано нелинейно-упругое состояние ортотропной цилиндрической оболочки с прямоугольным отверстием при действии осевого растяжения.

### 1. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку радиуса  $R$  и толщины  $h$ , изготовленную из ортотропного композитного материала (КМ) и ослабленную прямоугольным отверстием (рис. 1). Отнесем координатную поверхность оболочки  $\Sigma$  (поверхность приведения  $\gamma = 0$ ) к криволинейной ортогональной системе координат  $(x, y)$  с началом в центре отверстия, где  $x$  и  $y$  – длины образующей и дуги по направляющей. По нормали к поверхности приведения будет отсчитываться координату  $\gamma$ .

Принимаем, что при повышенных уровнях действующих поверхностных  $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$  и краевых  $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$  нагрузок свойства материала оболочки описываются нелинейными диаграммами деформирования.

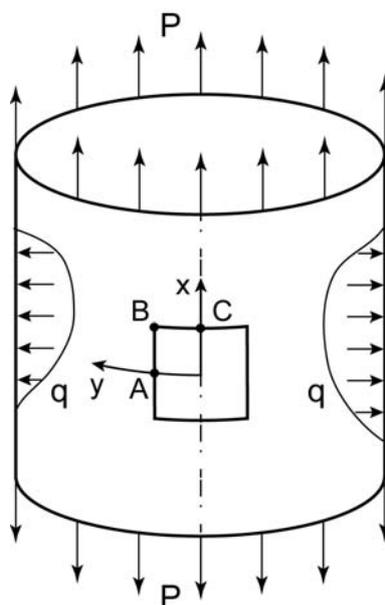


Рис. 1

*Геометрические соотношения.* Считаем, что геометрические и механические характеристики оболочки, способы ее закрепления и нагружения таковы, что для описания процесса деформирования применим вариант теории непологих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + k w; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \mu_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \mu_{22} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k \frac{\partial v}{\partial y}; & 2\mu_{12} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k \frac{\partial v}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12},$$

где  $\varepsilon_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  – компоненты мембранной и изгибной деформаций оболочки;  $u, v, w$  – перемещения точек поверхности приведения;  $k = 1/R$  – кривизна поперечного сечения оболочки.

*Физические соотношения.* Предполагая, что нагружение простое, воспользуемся нелинейными физическими соотношениями деформационной теории пластичности анизотропных сред, в которой принято условие пластичности вида [5]:

$$f = \frac{1}{2}(q_{1111}\sigma_{11}^2 + q_{2222}\sigma_{22}^2 + 2q_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4q_{1212}\sigma_{12}^2) = f_s. \quad (2)$$

Здесь  $f_s$  – положительная материальная константа.

Также примем, что материал упрочняется только тогда, когда выполняется работа пластических деформаций

$$W_p = \int_0^{e_{11}^p} \sigma_{11} de_{11}^p + \int_0^{e_{22}^p} \sigma_{22} de_{22}^p + \int_0^{e_{12}^p} \sigma_{12} de_{12}^p, \quad (3)$$

т. е. при  $f \geq f_s$

$$f = f(W_p) \text{ и } W_p = W_p(f). \quad (4)$$

Зависимости между компонентами напряжений и деформаций при плоском напряженном состоянии в случае совпадения в каждой точке оболочки направлений ортотропии материала с направлениями осей координат  $(x, y, \gamma)$  имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left( \frac{1}{E_{11}} + \Psi q_{1111} \right) \sigma_{11} + \left( -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} + \Psi q_{1122} \right) \sigma_{22}; \\ e_{22} &= \left( -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} + \Psi q_{2211} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{E_{22}} + \Psi q_{2222} \right) \sigma_{22}; \\ e_{12} &= \left( \frac{1}{G_{12}} + 4\Psi q_{1212} \right) \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  – упругие постоянные КМ;  $q_{1111}$ ,  $q_{2222}$ ,  $q_{1122}$ ,  $q_{1212}$  – компоненты тензора, учитывающего анизотропию нелинейных свойств композита;  $\Psi(f)$  – функция, описывающая нелинейное деформирование материала и вычисляемая по формуле [1]:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W_p'}{\sqrt{f}} df. \quad (6)$$

Отметим, что функция  $W_p = W_p(f)$  и значения параметров  $q_{1111}$ ,  $q_{2222}$ ,  $q_{1122}$ ,  $q_{1212}$  определяются с помощью методики, изложенной в работах [1, 5].

## 2. Методика решения физически нелинейных краевых задач для композитных цилиндрических оболочек с прямоугольным отверстием.

Кратко изложим численную методику решения задач статики для ортотропных оболочек, ослабленных отверстием, с учетом физической нелинейности, которая базируется на использовании методов Ньютона, дополнительных напряжений и конечных элементов.

В каждом приближении при решении физически нелинейных задач методом дополнительных напряжений возникает необходимость определения напряжений в произвольной точке оболочки по известным деформациям с использованием физических соотношений (5). Уравнения (5) являются существенно нелинейными и неразрешимыми аналитически относительно напряжений. Для удобства численного обращения соотношений (5) запишем их в виде:

$$F_i(\{\sigma\}, \{e\}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ ,  $\{e\} = \{e_{11}, e_{22}, e_{12}\}^T$  – вектора напряжений и деформаций в произвольной точке оболочки.

Решим нелинейную систему (7) относительно напряжений методом последовательных приближений Ньютона [1]

$$F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \{\sigma^j\}} \{\Delta \sigma^j\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad \{\sigma^{j+1}\} = \{\sigma^j\} + \{\Delta \sigma^j\}, \quad (8)$$

выбирая за начальное приближение напряжения для линейно-упругого тела  $\{\sigma^0\}$ .

После численного обращения уравнений (5) относительно напряжений будем иметь зависимости вида

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(e_{11}, e_{22}, e_{12}). \quad (9)$$

Ориентируясь на применение в дальнейшем метода дополнительных напряжений, представим напряжения в виде суммы линейных ( $\sigma_{ij}^0$ ) и нелинейных ( $\sigma_{ij}^H$ ) слагаемых:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H; \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H; \\ \sigma_{11}^0 &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; \quad \sigma_{22}^0 = c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22}; \quad \sigma_{12}^0 = c_{33}e_{12}; \\ \sigma_{11}^H &= \sigma_{11} - \sigma_{11}^0; \quad \sigma_{22}^H = \sigma_{22} - \sigma_{22}^0; \quad \sigma_{12}^H = \sigma_{12} - \sigma_{12}^0; \\ c_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{21} = c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{33} = G_{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для внутренних усилий и моментов  $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$  с учетом равенств (10) при произвольном выборе координатной поверхности имеем выражения:

$$\{m\} = \{m^0\} + \{m^H\}; \quad \{m^0\} = [D]\{\varepsilon\}; \quad (11)$$

$$T_{ij}^H = \int_{\Delta-h/2}^{\Delta+h/2} \sigma_{ij}^H d\gamma; \quad M_{ij}^H = \int_{\Delta-h/2}^{\Delta+h/2} \sigma_{ij}^H \gamma d\gamma \quad (i, j = 1, 2),$$

где  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$  – вектор компонент мембранной и изгибной деформаций оболочки;  $\Delta$  – отклонение срединной поверхности от координатной поверхности;  $[D]$  – матрица жесткостей оболочки, элементы которой вычисляются по формулам:

$$d_{kl} = c_{kl}h; \quad d_{3+k,l} = d_{k,3+l} = c_{kl}h\Delta; \quad d_{3+k,3+l} = c_{kl} \left( \frac{h^3}{12} + h\Delta^2 \right) \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Систему разрешающих уравнений получим из вариационного уравнения Лагранжа

$$\iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} d\Sigma = \delta A_p - \iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T \{m^H\} d\Sigma, \quad (13)$$

где  $A_p$  – работа внешних сил.

Предполагая, что в уравнении (13) нелинейные составляющие усилий и моментов  $\{m^H\}$  известны из предыдущего приближения и не варьируются, исходную физически нелинейную задачу методом дополнительных напряжений сводим к последовательности линейно-упругих задач, которые решаем методом конечных элементов (МКЭ).

В настоящей работе используется вариант МКЭ со скалярной формой аппроксимации искомых величин, суть которой заключается в аппроксимации отдельно каждой компоненты вектора перемещения через узловые значения этой же компоненты и ее производных [9, 17, 22]. Отметим, что в ряде работ также реализована векторная форма аппроксимации искомых величин, когда используется аппроксимирующее выражение непосредственно для вектора перемещения произвольной точки конечного элемента (КЭ) или для его компонент в глобальной декартовой системе координат [7, 13, 15, 20].

Рассмотрим прямоугольный КЭ размерами  $2a \times 2b$ , стороны которого параллельны координатным осям  $x$  и  $y$  (рис. 2).

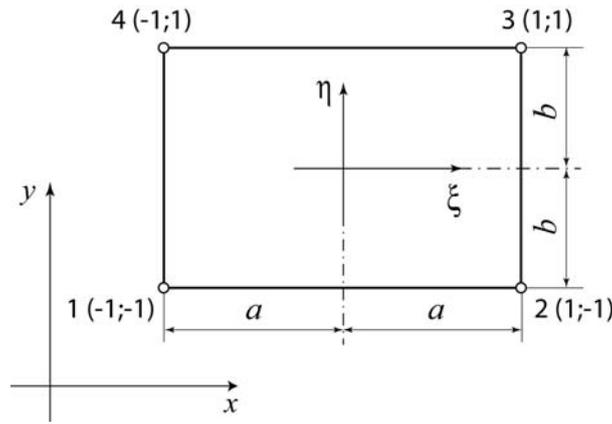


Рис. 2

Глобальные координаты  $x, y$  произвольной точки КЭ определяются через их узловые значения  $x^{(i)}, y^{(i)}$  с использованием билинейных функций локальных координат  $\xi, \eta$ :

$$x = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) x^{(i)}; \quad y = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) y^{(i)}, \quad (14)$$

где  $L_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $-1 \leq \xi \leq 1$ ;  $-1 \leq \eta \leq 1$ ;  $\xi_i, \eta_i$  – значения локальных координат  $i$ -го узла.

Примем для всех компонент вектора перемещения точки координатной поверхности оболочки бикубическую сплайновую аппроксимацию:

$$u = \sum_{i=1}^4 [u^{(i)} N_i^{(1)}(\xi, \eta) + u_{,x}^{(i)} N_i^{(2)}(\xi, \eta) + u_{,y}^{(i)} N_i^{(3)}(\xi, \eta) + u_{,xy}^{(i)} N_i^{(4)}(\xi, \eta)] \quad (u \rightarrow v, w). \quad (15)$$

Здесь обозначено:  $u^{(i)}, u_{,x}^{(i)}, u_{,y}^{(i)}, u_{,xy}^{(i)}$  ( $u \rightarrow v, w$ ) – значения перемещений  $u, v, w$  и их производных по координатам  $x$  и  $y$  в  $i$ -м узле;  $N_i^{(1)}(\xi, \eta), \dots, N_i^{(4)}(\xi, \eta)$  – функции

формы, которые представляются в виде произведения одномерных кубических полиномов Эрмита локальных координат:

$$\begin{aligned}
N_1^{(1)}(\xi, \eta) &= H_1^{(1)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta); & N_1^{(2)}(\xi, \eta) &= aH_1^{(2)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta); \\
N_1^{(3)}(\xi, \eta) &= bH_1^{(1)}(\xi)H_1^{(2)}(\eta); & N_1^{(4)}(\xi, \eta) &= abH_1^{(2)}(\xi)H_1^{(2)}(\eta); \\
N_2^{(1)}(\xi, \eta) &= H_2^{(1)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta); & N_2^{(2)}(\xi, \eta) &= aH_2^{(2)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta); \\
N_2^{(3)}(\xi, \eta) &= bH_2^{(1)}(\xi)H_1^{(2)}(\eta); & N_2^{(4)}(\xi, \eta) &= abH_2^{(2)}(\xi)H_1^{(2)}(\eta); \\
N_3^{(1)}(\xi, \eta) &= H_2^{(1)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta); & N_3^{(2)}(\xi, \eta) &= aH_2^{(2)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta); \\
N_3^{(3)}(\xi, \eta) &= bH_2^{(1)}(\xi)H_2^{(2)}(\eta); & N_3^{(4)}(\xi, \eta) &= abH_2^{(2)}(\xi)H_2^{(2)}(\eta); \\
N_4^{(1)}(\xi, \eta) &= H_1^{(1)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta); & N_4^{(2)}(\xi, \eta) &= aH_1^{(2)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta); \\
N_4^{(3)}(\xi, \eta) &= bH_1^{(1)}(\xi)H_2^{(2)}(\eta); & N_4^{(4)}(\xi, \eta) &= abH_1^{(2)}(\xi)H_2^{(2)}(\eta); \\
H_1^{(1)}(\xi) &= 0,25(2 - 3\xi + \xi^3); & H_1^{(2)}(\xi) &= 0,25(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3); \\
H_2^{(1)}(\xi) &= 0,25(2 + 3\xi - \xi^3); & H_2^{(2)}(\xi) &= 0,25(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (\xi \rightarrow \eta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что производные по глобальным  $(x, y)$  и локальным  $(\xi, \eta)$  координатам связаны соотношениями:

$$u_{,\xi} = au_{,x}; \quad u_{,\eta} = bu_{,y}; \quad u_{,\xi\xi} = a^2u_{,xx}; \quad u_{,\eta\eta} = b^2u_{,yy}; \quad u_{,\xi\eta} = abu_{,xy}. \tag{17}$$

В матричной форме аппроксимирующие выражения для перемещений (15) имеют вид:

$$\left\{ u \right\}_{3 \times 1} = \left\{ u, v, w \right\}^T = \left[ f^{(e)} \right]_{3 \times 48} \left\{ q^{(e)} \right\}_{48 \times 1}, \tag{18}$$

где  $\left\{ q^{(e)} \right\} = \left\{ u^{(1)}, u_{,x}^{(1)}, u_{,y}^{(1)}, u_{,xy}^{(1)}, \dots, u^{(4)}, u_{,x}^{(4)}, u_{,y}^{(4)}, u_{,xy}^{(4)}, v^{(1)}, \dots, v_{,xy}^{(4)}, w^{(1)}, \dots, w_{,xy}^{(4)} \right\}^T$  – вектор-столбец узловых варьируемых параметров (степеней свободы) элемента  $(e)$ ;  $\left[ f^{(e)} \right]$  – квазидиагональная матрица функций формы перемещений:

$$\left[ f^{(e)} \right]_{3 \times 48} = \begin{bmatrix} \left\{ N^u \right\} \\ \left\{ N^v \right\} \\ \left\{ N^w \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ N \right\} & \left\{ 0 \right\} & \left\{ 0 \right\} \\ \left\{ 0 \right\} & \left\{ N \right\} & \left\{ 0 \right\} \\ \left\{ 0 \right\} & \left\{ 0 \right\} & \left\{ N \right\} \end{bmatrix}; \tag{19}$$

$$\left\{ N^u \right\}_{1 \times 48} = \left\{ \left\{ N \right\} \quad \left\{ 0 \right\} \quad \left\{ 0 \right\} \right\}; \quad \left\{ N^v \right\}_{1 \times 48} = \left\{ \left\{ 0 \right\} \quad \left\{ N \right\} \quad \left\{ 0 \right\} \right\}; \quad \left\{ N^w \right\}_{1 \times 48} = \left\{ \left\{ 0 \right\} \quad \left\{ 0 \right\} \quad \left\{ N \right\} \right\};$$

$$\left\{ N \right\}_{1 \times 16} = \left\{ N_1^{(1)}(\xi, \eta), N_1^{(2)}(\xi, \eta), N_1^{(3)}(\xi, \eta), N_1^{(4)}(\xi, \eta), \dots, N_4^{(4)}(\xi, \eta) \right\}; \quad \left\{ 0 \right\}_{1 \times 16} = \left\{ 0, 0, \dots, 0 \right\}.$$

С учетом равенств (1) и (18) для компонент деформации оболочки имеем выражения

$$\{\varepsilon\} = [A] \{u\} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}; \quad (20)$$

$$[A]_{3 \times 6}^T = \begin{bmatrix} ( )_{,x} & 0 & ( )_{,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ( )_{,y} & ( )_{,x} & 0 & k( )_{,y} & k( )_{,x} \\ 0 & k & 0 & -( )_{,xx} & -( )_{,yy} & -2( )_{,xy} \end{bmatrix}; \quad [B^{(e)}]_{6 \times 48} = [A]_{6 \times 3} [f^{(e)}]_{3 \times 48}.$$

Здесь  $[A], [B^{(e)}]$  – матрицы операций дифференцирования и функций формы деформаций.

После выполнения ряда преобразований матрица функций формы деформаций примет вид:

$$[B^{(e)}]_{48 \times 6}^T = \begin{bmatrix} \{B_1^{(e)}\}^T & \{B_2^{(e)}\}^T & \{B_3^{(e)}\}^T & \{B_4^{(e)}\}^T & \{B_5^{(e)}\}^T & \{B_6^{(e)}\}^T \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\text{где } \{B_1^{(e)}\}_{1 \times 48} = \{N_{,x}^u\}_{1 \times 48}; \quad \{B_2^{(e)}\}_{1 \times 48} = \{N_{,y}^v\}_{1 \times 48} + k \{N_{,x}^w\}_{1 \times 48}; \quad \{B_3^{(e)}\}_{1 \times 48} = \{N_{,y}^u\}_{1 \times 48} + k \{N_{,x}^v\}_{1 \times 48};$$

$$\{B_4^{(e)}\}_{1 \times 48} = -\{N_{,xx}^w\}_{1 \times 48}; \quad \{B_5^{(e)}\}_{1 \times 48} = -\{N_{,yy}^w\}_{1 \times 48} + k \{N_{,y}^v\}_{1 \times 48}; \quad \{B_6^{(e)}\}_{1 \times 48} = -2\{N_{,xy}^w\}_{1 \times 48} + k \{N_{,x}^v\}_{1 \times 48};$$

$$\{N_{,\alpha}^u\}_{1 \times 48} = \{\{N_{,\alpha}\} \{0\} \{0\}\}; \quad \{N_{,\alpha}^v\}_{1 \times 48} = \{\{0\} \{N_{,\alpha}\} \{0\}\}; \quad \{N_{,\alpha\beta}^w\}_{1 \times 48} = \{\{0\} \{0\} \{N_{,\alpha\beta}\}\};$$

$$\{N_{,\alpha}\}_{1 \times 16} = \left\{ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial N_1^{(3)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial N_1^{(4)}}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial N_4^{(4)}}{\partial \alpha} \right\};$$

$$\{N_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 16} = \left\{ \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 N_1^{(3)}}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 N_1^{(4)}}{\partial \alpha \partial \beta}, \dots, \frac{\partial^2 N_4^{(4)}}{\partial \alpha \partial \beta} \right\} \quad (\alpha, \beta = x, y).$$

Из вариационного уравнения Лагранжа (13) с учетом равенств (18) и (20) получим систему алгебраических уравнений, которая моделирует нелинейно-упругое деформирование композитной цилиндрической оболочки, ослабленной прямоугольным отверстием:

$$[K] \{q\} = \{P\} - \{\Omega\}, \quad (22)$$

где  $[K]$  – глобальная матрица жесткости линейно-упругой оболочки;  $\{q\}$ ,  $\{P\}$ ,  $\{\Omega\}$  – вектора узловых степеней свободы, нагрузок и нелинейностей, которые для элемента  $(e)$  вычисляются по формулам:

$$[K^{(e)}] = \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] d\Sigma; \quad \{P^{(e)}\} = \iint_{\Sigma_p^{(e)}} [f^{(e)}]^T \{p\} d\Sigma; \quad (23)$$

$$\{\Omega^{(e)}\} = \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{m^H\} d\Sigma.$$

### 3. Числовые результаты и их анализ.

Исследуем напряженно-деформированное состояние (НДС) нелинейно-упругой ортотропной цилиндрической оболочки с прямоугольным отверстием, изготовленной из слоистого органопластика, в котором в качестве армирующего наполнителя используют жгут СВМ и связующего – эпоксидную смолу ЭДТ-10.

На основании экспериментальных данных (диаграмм деформирования) определены компоненты тензора анизотропии  $q_{ijkl}$  и построена функция упрочнения  $W_p$  КМ [1, 5]:

$$q_{1111} = 4,2; \quad q_{2222} = 2,0; \quad q_{1122} = 0,33; \quad q_{1212} = 13,0;$$

$$W_p = \begin{cases} 0, & f/f_s \leq 1; \\ c[(f/f_s)^n - 1], & f/f_s > 1; \end{cases} \quad (24)$$

$$c = 0,137 \text{ МПа}; \quad n = 3; \quad f_s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ МПа}.$$

Из (6) с учетом (24) получаем формулу для определения функции  $\Psi(f)$ , описывающей нелинейные свойства материала:

$$\Psi = \frac{cn}{(2n-1)f_s} \left[ \left( \frac{f}{f_s} \right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f_s}{f}} \right].$$

Физико-механические параметры, которые характеризуют линейно-упругую стадию деформирования органопластика, имеют следующие значения:

$$E_{11} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,238.$$

С использованием разработанной методики решены линейные (ЛЗ) и нелинейные (НЗ) краевые задачи для оболочки длиной  $L/h = 400$  и радиусом  $R/h = 100$  при действии на нее равномерно распределенных по торцам растягивающих усилий интенсивности  $P$  ( $P/h = \tilde{P}/h \cdot 10^5$  Па;  $\tilde{P}/h = 2000$ ).

Учитывая геометрическую и силовую симметрию, рассматриваем восьмую часть оболочки. На линиях  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $y = R\pi/2$  заданы условия симметрии, на контуре отверстия – условия свободного края, а на торцах – условия безмоментности:

$$v = 0; \quad w = -P\nu_{12}R/E_2h; \quad T_{11} = P; \quad M_{11} = 0.$$

*Квадратное отверстие.* Сначала рассмотрим случай, когда оболочка ослаблена квадратным отверстием.

В табл. 1 представлены значения наибольших относительных прогибов ( $\tilde{w} = w/h$ ) для ряда значений длины стороны квадратного отверстия:  $a/h = 10; 20; 30; 40; 50$  ( $\beta = a/\sqrt{Rh} = 1; 2; 3; 4; 5$ ). Данные получены при решении задач в линейной (ЛЗ) и нелинейной (НЗ) постановках.

Таблица 1

$\beta$		1	2	3	4	5
$\tilde{w}_{\max}$	ЛЗ	0,2415	1,357	3,175	5,671	8,826
	НЗ	0,2455	1,376	3,221	5,772	9,024

На рис. 3, 4 приведены зависимости коэффициента концентрации максимальных напряжений  $k_{\max} = h\sigma_{\max}/P$  (рис. 3) и максимальных деформаций  $e_{\max}$  (рис. 4) от параметра  $\beta$ . Пунктирные кривые соответствуют решениям линейно-упругих задач, а сплошные – решениям нелинейных задач.

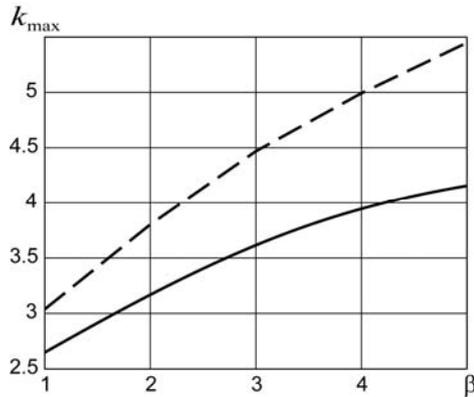


Рис. 3

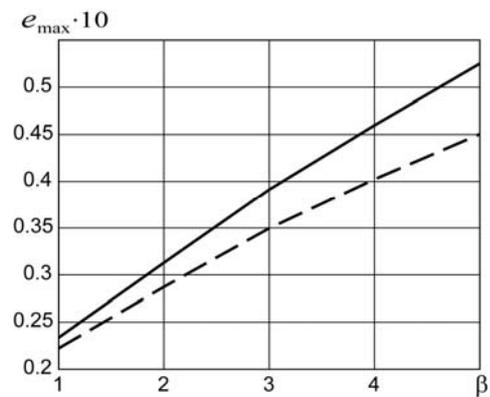


Рис. 4

Характер изменения величины  $k_{11}^+ = \sigma_{11}^+ h / P$  вдоль осевого сечения оболочки, проходящего через сторону АВ отверстия, показан на рис. 5 (линейные задачи) и рис. 6 (нелинейные задачи), где  $\sigma_{11}^+$  – осевые напряжения на внешней поверхности оболочки. На этих рисунках символом  $\tilde{x} = 2x/L$  обозначена безразмерная координата  $x$  точек образующей, проходящей через сторону АВ.

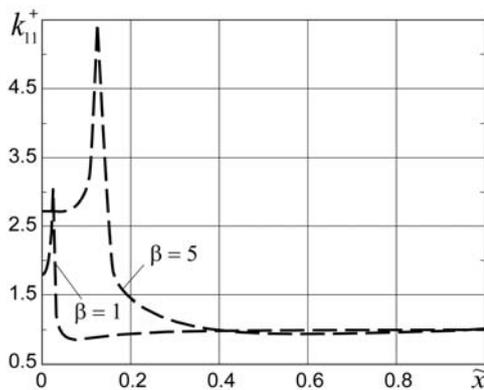


Рис. 5

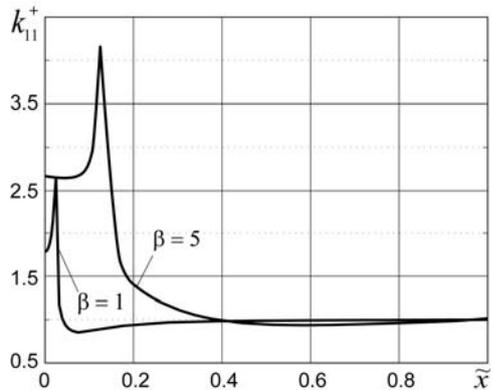


Рис. 6

*Прямоугольное отверстие.* Далее представим результаты решения краевой задачи о НДС цилиндрической оболочки, ослабленной прямоугольным отверстием длиной  $a$  и шириной  $b$ .

В табл. 2, 3 приведены значения относительных прогибов, деформаций и коэффициентов концентрации напряжений на внешней ( $\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0,5$ ) и внутренней ( $\gamma = -0,5$ ) поверхностях оболочки в точках А, В, С контура отверстия. Расчеты выполнены в линейной (табл. 2) и нелинейной (табл. 3) постановках для нескольких вариантов размеров прямоугольного отверстия: 1)  $a/h = 10$ ,  $b/h = 30$  ( $N=1$ ); 2)  $a/h = 10$ ,  $b/h = 20$  ( $N=2$ ); 3)  $a/h = 10$ ,  $b/h = 10$  ( $N=3$ ); 4)  $a/h = 20$ ,  $b/h = 10$  ( $N=4$ ); 5)  $a/h = 30$ ,  $b/h = 10$  ( $N=5$ ).

Таблица 2

Решение	Точки	$\tilde{\gamma}$	ЛЗ				
			N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5
$\tilde{W}$	A	0	1,2698	1,7519	0,1928	0,2424	0,2531
	B	0	1,3203	0,7646	0,1937	0,2775	0,3494
	C	0	2,6109	1,1623	0,2415	0,3320	0,4086
$e_{11} \cdot 10$	A	0,5	0,2261	0,1868	0,1415	0,1185	0,1108
		-0,5	0,2784	0,2059	0,1464	0,1307	0,1245
	B	0,5	0,3918	0,2953	0,2223	0,2135	0,1992
		-0,5	0,1691	0,1546	0,1750	0,1602	0,1416
$e_{22} \cdot 10^2$	C	0,5	0,2659	-0,0667	-0,3672	-0,3458	-0,3316
		-0,5	-1,1551	-0,9982	-0,7859	-0,8187	-0,8430
$k_{11}$	A	0,5	2,8602	2,3636	1,7905	1,4996	1,4022
		-0,5	3,5221	2,6043	1,8516	1,6542	1,5751
	B	0,5	5,5849	4,1612	3,0394	2,8212	2,6001
		-0,5	3,0271	2,4514	2,4031	2,1146	1,8402
$k_{22}$	C	0,5	0,5105	-1,2761	-0,7045	-0,6619	-0,6341
		-0,5	-2,2174	-1,9202	-1,5090	-1,5732	-1,6215

Таблица 3

Решение	Точки	$\tilde{\gamma}$	НЗ				
			N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
$\tilde{W}$	A	0,0	1,3261	0,7746	0,1964	0,2440	0,2536
	B	0,0	1,3869	0,7897	0,1975	0,2794	0,3502
	C	0,0	2,7073	1,1924	0,2455	0,3340	0,4095
$e_{11} \cdot 10$	A	0,5	0,2193	0,1824	0,1409	0,1184	0,1108
		-0,5	0,2796	0,2031	0,1457	0,1307	0,1245
	B	0,5	0,5267	0,3540	0,2337	0,2162	0,2002
		-0,5	0,1608	0,1585	0,1789	0,1595	0,1406
$e_{22} \cdot 10^2$	C	0,5	0,2843	-0,0585	-0,3669	-0,3456	-0,3313
		-0,5	-1,1442	-0,9943	-0,7848	-0,8177	-0,8422
$k_{11}$	A	0,5	2,6866	2,2936	1,7824	1,4984	1,4019
		-0,5	3,2401	2,5191	1,8431	1,6529	1,5746
	B	0,5	3,8826	3,2001	2,6486	2,6071	2,4645
		-0,5	1,8182	1,8906	2,2284	2,0914	1,8341
$k_{22}$	C	0,5	0,5465	-0,1118	-0,7034	-0,6620	-0,6334
		-0,5	-2,1964	-1,9094	-1,5085	-1,5716	-1,6248

Из полученных результатов следует, что в цилиндрической оболочке, ослабленной прямоугольным отверстием, при действии осевого растяжения наибольшие на-

пряжения ( $\sigma_{11}$ ) и деформации ( $e_{11}$ ) имеют место на внешней поверхности оболочки в угловой точке В, а прогибы ( $w$ ) – посередине криволинейной стороны отверстия (в точке С).

Для оболочки с квадратным отверстием рост параметра  $\beta$  от 1 до 5 вызывает увеличение максимальных напряжений и деформаций, соответственно, на 79; 103(%) для ЛЗ и на 57; 125(%) для НЗ. В этом случае максимальные прогибы увеличиваются в 37 раз как для ЛЗ, так и НЗ.

Учет физической нелинейности материала приводит к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на 30,5% для  $N = 1$ , на 23,1% для  $N = 2$ , на 12,8% для  $N = 3$ , на 7,4% для  $N = 4$  и на 5,4% для  $N = 5$ , а также к увеличению максимальных деформаций и прогибов, соответственно, на 35,9; 3,8(%) для  $N = 1$ , на 20,0; 2,6(%) для  $N = 2$ , на 4,5; 2,1(%) для  $N = 3$ , на 0,9; 0,6(%) для  $N = 4$  и на 0,5; 0,2(%) для  $N = 5$ .

Анализ приведенных результатов свидетельствует о том, что при осевом нагружении цилиндрической оболочки наиболее опасными являются прямоугольные отверстия, вытянутые вдоль направляющей (варианты  $N = 1, 2$ ), поскольку в этом случае компоненты НДС достигают максимальных значений.

#### **Заключение.**

В работе разработана методика численного решения нелинейно-упругих задач статики для композитных цилиндрических оболочек кругового сечения с прямоугольным отверстием, которая базируется на использовании метода дополнительных напряжений, метода Ньютона и МКЭ. На основе предложенной методики изучено влияние нелинейной упругости материала на НДС ортотропной цилиндрической оболочки, ослабленной квадратным или прямоугольным отверстием, при действии осевого растяжения.

В дальнейшем представляет интерес исследование взаимовлияния прямоугольных отверстий на боковой поверхности композитных цилиндрических оболочек с учетом нелинейных свойств материала и особенностей их деформирования.

**РЕЗЮМЕ.** Дано постановку фізично нелінійних крайових задач для ортотропної циліндричної оболонки, ослабленої прямокутним отвором, при дії статичних навантажень. Систему розв'язувальних рівнянь отримано на основі співвідношень теорії тонких оболонок Кірхгофа – Лява і деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ. Розроблено чисельну методику розв'язання даного класу нелінійних задач, яка базується на застосуванні методів Ньютона, додаткових напружень і скінченних елементів. Досліджено концентрацію напружень біля прямокутного отвору на поверхні ортотропної циліндричної оболонки з врахуванням реальних властивостей матеріалу в рамках нелінійної теорії пружності.

1. Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. Механика композитов: в 12-ти томах. Т. 7. Концентрация напряжений – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с.
2. Демидов А.И. К вопросу о применимости теории малых упруго-пластических деформаций при расчете оболочек при неупругом поведении материала // Металлические конструкции. – 2014. – 20, № 4. – С. 221 – 234.
3. Длугач М.И., Ковальчук Н.В. Метод конечных элементов в применении к расчету цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями // Прикл. механика. – 1973. – 9, № 11. – С. 35 – 41.
4. Корнишин М.С., Петухов Н.П. К расчету на изгиб гибких пластин и пологих панелей со сложным очертанием контура методом блочной итерации // Труды семинара по теории оболочек. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР. – 1975. – Вып. 6. – С. 34 – 39.
5. Ломакин В.А. О теории пластичности анизотропных сред // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1964. – № 4. – С. 49 – 53.
6. Almroth B.O., Holmes A.M.C. Buckling of shells with cutouts, experiments and analysis // Int. J. Solids Structures. – 1972. – 8, N 8. – P. 1057 – 1071.

7. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1414 – 1420.
8. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A., Kadyrov F.D. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with an Elliptic Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 5. – P. 512 – 518.
9. Connor J., Brebbia C. Stiffness matrix for shallow rectangular shell element // *J. Eng. Mech. Division.* – 1967. – **93**, N 5. – P. 43 – 66.
10. Eggwertz S., Samuelson L.A. Design of shell structures with openings subjected to buckling // *J. Construct. Steel Research.* – 1991. – **18**, N 2. – P. 155 – 163.
11. Hilburger M.W., Starnes Jr.J.H. Buckling behavior of compression-loaded composite cylindrical shells with reinforced cutouts // *Int. J. Non-Linear Mechanics.* – 2005. – **40**, N 7. – P. 1005 – 1021.
12. Hudramovich V.S., Hart E.L., Klimenko D.V., Rjabokon' S.A. Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // *Strength of Materials.* – 2013. – **45**, N 1. – P. 1 – 9.
13. Kiseleva T.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // *J. Comput. Math. Math. Phys.* – 2015. – **55**, N 3. – P. 422 – 431.
14. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress–Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 425– 433.
15. Moore C.J., Yang T.Y., Anderson D.C. A new 48 d.o.f. quadrilateral shell element with variable-order polynomial and rational B-spline geometries with rigid body modes // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 1984. – **20**, N 11. – P. 2121 – 2141.
16. Pilkey W.D., Pilkey D.D. *Peterson's Stress Concentration Factors* // John Wiley & Sons, Inc., USA, 2008. – 560 p.
17. Sabbir A.B. An extension of the shallow to the non-shallow stiffness matrix for a cylindrical shell finite element // *Int. J. Mech. Scien.* – 1970. – **12**, N 3. – P. 287 – 292.
18. Sam Daliri O., Farahani M. Characterization of stress concentration in thin cylindrical shells with rectangular cut-out under axial pressure // *Int. J. Advanced Design and Manufacturing Technology.* – 2017. – **10**, No. 2. – P. 133 – 141.
19. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Pigol O.V. Elastoplastic State of an Elliptical Cylindrical Shell with a Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 647 – 654.
20. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V. Stress–Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 559 – 567.
21. Storozhuk E.A., Komarchuk S.M. Stress Distribution Near a Circular Hole in a Flexible Orthotropic Cylindrical Shell of Elliptical Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 687 – 694.
22. Yang T.Y., Saigal S. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 1985. – **21**, N 4. – P. 617 – 635.

Поступила 28.12.2017

Утверждена в печать 04.06.2019