

П. Шакери Мобараке<sup>1</sup>, В. Т. Гринченко<sup>2</sup>,  
Б. Солтання<sup>3</sup>

**ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БИМОРФНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ  
ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

<sup>1</sup> Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,  
просп. акад. Глушкова, 4е, 03127, Киев, Украина; e-mail: pouyan.shakeri@gmail.com

<sup>2</sup> Институт гидромеханики НАНУ,  
ул. М. Капнист, 8/4, 03057, Киев, Украина; e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

<sup>3</sup> Университет Альберты, факультет машиностроения, г. Эдмонтон, Альберта,  
Канада, T6G 1H9 babak.soltannia@ualberta.ca

**Abstract.** Basing on the superposition method, an effective method is developed for analytically solving the problem on harmonic bending vibrations of the bimorph piezoceramic plates of parallelogram shape. A reduction of the used infinite series allows a transition to the finite-dimensional system of algebraic equations. This system is obtained on the basis of requirement of satisfying the specified boundary conditions using both the minimization method of the standard deviation and the collocation method.

**Key words:** bending vibrations, piezoceramic plates of non-canonical shape, superposition method, collocation method, standard deviation minimization method, reduction method, natural frequency spectrum.

**Введение.**

Традиционно пьезокерамические элементы используются в технических приложениях в виде относительно простых геометрических объектов – цилиндр, круглая или прямоугольная пластина, удлиненный призматический стержень. Использование сплошного электродного покрытия в таких элементах приводит к относительному обеднению спектра реально возбуждаемых частот за счет симметрии форм колебаний и частотной зависимости эффективного коэффициента электромеханической связи. Задачу повышения насыщенности выбранного интервала частот эффективно возбуждаемыми колебаниями без увеличения размеров элемента можно решить с помощью изменения его формы. В этом случае при том же однородном электродировании в элементе могут возбуждаться формы с различными типами симметрии. В данной работе такая возможность иллюстрируется на примере параллелограммной биморфной пластины. Для такого типа пластин на основе общей идеи о построении общего решения граничных задач [2, 14] получено представление решения, обеспечивающее возможность количественной оценки динамических свойств параллелограммной биморфной пластинки в широком диапазоне частот. Рассматривается два подхода к получению количественных оценок на основе построенных аналитических выражений. Дается сравнение эффективности этих подходов. Показана возможность получения достаточно точных значений собственных частот при умеренных объемах вычислений. Сами собственные частоты находятся при анализе вынужденных колебаний пластины по оценкам амплитуд характерных физических параметров.

Вопросу исследования изгибных колебаний пластин, представляющему значительный интерес в различных областях, посвящено очень большое количество работ,

в которых применяются как приближенные численные методы, так и методы, основанные на использовании аналитических решений. Достаточно обширный обзор состояния вопроса можно найти в работах [1, 4, 10, 11, 13].

В настоящей статье на основании подхода, аналогичного использованному в предыдущих работах авторов [8, 9, 14 – 19], построено общее решение граничной задачи об изгибных колебаниях биморфных пьезокерамических пластин, имеющих форму параллелограмма. При этом решение для поперечного прогиба представляется в виде суперпозиции функций, представляемых в виде бесконечных рядов, каждое слагаемое которых удовлетворяет уравнению гармонических изгибных колебаний пьезопластины. Эти функции строятся так, чтобы на сторонах параллелограмма они представляли собой ряды по полным тригонометрическим базисам. Для определения коэффициентов рядов используются функциональные уравнения, порождаемые граничными условиями задачи. Для решения этих уравнений возможно использование двух подходов – подхода, связанного с минимизацией средне-квадратического отклонения, и подхода, основанного на методе коллокации. При практическом использовании конечных сумм оба метода приводят к поиску решения систем линейных алгебраических уравнений. Получены количественные оценки динамических характеристик пьезопластин, анализ которых позволяет оценить влияние геометрии пластины. Метод решения дает возможность получить надежные оценки точности решения.

### §1. Основные соотношения теории колебаний биморфных пьезокерамических пластин.

Изгибные колебания тонких биморфных пьезокерамических пластин со встречной толщиной поляризации слоев, полностью электродированных в плоскости их соединения и на лицевых поверхностях, в приближении Кирхгофа описываются уравнением движения относительно поперечных перемещений срединной поверхности  $w(x, y, t)$ , имеющем при отсутствии нагружения на поверхностях пластины вид [4], по форме совпадающий с чисто упругим случаем:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{\bar{D}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала;  $h$  – толщина пластины, а эффективная изгибная жесткость биморфной пластины вычисляется по формуле

$$\bar{D} = \frac{h^3}{12s_{11}^E(1-\nu^2)} \left( 1 + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right),$$

где  $s_{11}^E$  и  $s_{12}^E$  – упругие податливости пьезоэлектрического материала;  $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E$  – коэффициент Пуассона в плоскости изотропии пластины;  $k_p^2$  – статический планарный коэффициент электромеханической связи. Моменты при этом выражаются через прогиб  $w$  и подведенную к пластине разность электрических потенциалов  $V_0$  в виде

$$\begin{aligned} M_x &= -\bar{D} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} \left( \frac{V_0}{h} \right); \\ M_y &= -\bar{D} \left( \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} \left( \frac{V_0}{h} \right); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$M_{xy} = \bar{D}(1-\bar{\nu}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad M_{yx} = -M_{xy},$$

где

$$\bar{\nu} = \left( \nu + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) / \left( 1 + \frac{1+\nu}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right)$$

– эффективный коэффициент Пуассона;  $d_{31}$  – пьезоэлектрическая постоянная. Соответственно, перерезывающие силы представляются в форме

$$Q_x = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \quad Q_y = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \quad (1.3)$$

Далее, в точке края пластинки с нормалью  $\mathbf{n}$  изгибающий и крутящий моменты выражаются через (1.2) в виде [7, 20]

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 - 2M_{xy} n_x n_y; \quad (1.4)$$

$$M_{nt} = M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + (M_x - M_y) n_x n_y, \quad (1.5)$$

а для перерезывающей силы имеем

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y. \quad (1.6)$$

Как известно [7, 20], при задании на контуре пластинки граничных условий вместо двух функций (1.5), (1.6) используется обобщенная по Кирхгофу перерезывающая сила

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}, \quad (1.7)$$

где  $s$  – контурная (естественная) координата границы пластинки. В случае прямолинейного участка границы с единичным касательным вектором  $\tau = (-n_y, n_x)$

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \frac{\partial M_{nt}}{\partial \tau} = -\frac{\partial M_{nt}}{\partial x} n_y + \frac{\partial M_{nt}}{\partial y} n_x. \quad (1.8)$$

При задании на границе пластины изгибающего момента  $\bar{M}_n$  развернутое выражение для граничного условия представляется в виде

$$-\bar{D} \left[ \bar{\nu} \nabla^2 w + (1-\bar{\nu}) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) \right] = -\frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} \left( \frac{V_0}{h} \right) + \bar{M}_n. \quad (1.9)$$

Зависящая от разности потенциалов на электродах пластины величина в правой части (1.9) возникает в результате наличия связи электрических и механических полей и может рассматриваться как некоторый эффективный момент  $\bar{M}_n^{V_{eff}}$ , приложенный к краю биморфной пластины.

При задании на прямолинейном участке границы пластины обобщенной перерезывающей силы  $\bar{V}_n$  граничное условие с учетом выражения (1.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} -\bar{D} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) n_y \right] + \bar{D} (1-\bar{\nu}) \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} n_y - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} n_x \right) (n_x^2 - n_y^2) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) n_x n_y^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) n_x^2 n_y \right] = \bar{V}_n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что слева в (1.9) и (1.10) стоят члены, представляющие собой части изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы, связанные с упругой де-

формацией, которые можно обозначить  $M_n^{def}$  и  $V_n^{def}$ . При этом (1.9) и (1.10) в краткой форме можно переписать в виде

$$M_n^{def} = \bar{M}_n^{Veff} + \bar{M}_n; \quad V_n^{def} = \bar{V}_n. \quad (1.11)$$

В случае возбуждения гармонических колебаний пьезопластины переменным электрическим полем с разностью потенциалов  $V_0(t) = V_0 \exp(i\omega t)$  от генератора напряжений будем предполагать гармоническую зависимость всех исследуемых величин от времени. При этом

$$w = w(x, y) \exp(i\omega t). \quad (1.12)$$

В дальнейшем гармонический множитель  $\exp(i\omega t)$  будем опускать, а под величинами прогиба  $w$ , а также моментов перерезывающих сил и т.д. будем подразумевать их амплитудные значения. Соответственно, подставляя (1.12) в уравнение движения (1.1), получаем уравнение вида

$$\nabla^2 \nabla^2 w - k^4 w = 0, \quad \text{где} \quad k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}. \quad (1.13)$$

В дальнейшем рассмотрении будет удобно использовать представление дифференциального оператора четвертого порядка в уравнении (1.13) в виде произведения операторов второго порядка [12]:  $\nabla^2 \nabla^2 - k^4 = (\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)$ . При этом произвольное решение уравнения (1.13) может быть представлено в форме

$$w = w^- + w^+, \quad (1.14)$$

где функции  $w^-$  и  $w^+$  являются решениями обыкновенного и модифицированного уравнений Гельмгольца

$$\nabla^2 w^- + k^2 w^- = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 w^+ - k^2 w^+ = 0. \quad (1.15)$$

## §2. Постановка задачи.

В рамках представленной выше модели рассмотрим задачу о гармонических колебаниях тонкой биморфной пьезокерамической пластины со свободными от механических изгибающих моментов и обобщенных по Кирхгофу перерезывающих сил краями, имеющей форму параллелограмма  $OBCD$  с углами  $\alpha$  в вершинах  $O$  и  $C$  и размерами сторон  $OD=BC=a$ ,  $OB=CD=b$ , как показано на рис. 1. Соответственно, граничные условия на границе параллелограмма имеют вид (1.9) и (1.10) при

$$\bar{M}_n = 0; \quad \bar{V}_n = 0. \quad (2.1)$$

Введем две прямоугольные декартовы системы координат  $Ox_1y_1$  и  $Ox_2y_2$  с началом в точке  $O$ , ориентированные как показано на рис. 1.

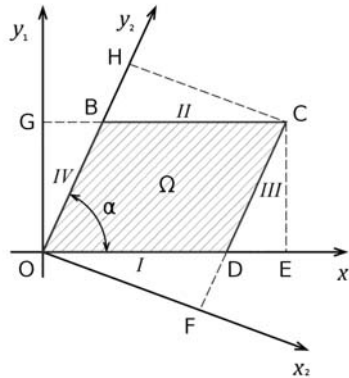


Рис. 1

Зависимость между координатами в этих системах имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha; \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha; \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (2.2)$$

Общая схема решения данной задачи строится аналогично подходу, использованному в работе [15, 18], в которой были рассмотрены планарные колебания пьезоэлектрических параллелограммных пластин. Решения для функций  $w^-$  и  $w^+$  при этом представляются в виде суперпозиции функций, являющихся решениями уравнений (1.15):

$$\begin{aligned} w^- &= w_1^-(x_1, y_1) + w_2^-(x_1, y_1) + w_3^-(x_2, y_2) + w_4^-(x_2, y_2); \\ w^+ &= w_1^+(x_1, y_1) + w_2^+(x_1, y_1) + w_3^+(x_2, y_2) + w_4^+(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом функции  $w_i^-$  и  $w_i^+$  представляются в виде рядов, построенных таким образом, чтобы на  $i$ -х сторонах параллелограмма они представляли собой ряды по полным тригонометрическим базисам:

$$\begin{aligned} w_1^-(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1; \quad w_2^-(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1); \\ w_3^-(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2); \quad w_4^-(x_2, y_2) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2; \\ w_1^+(x_1, y_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} x_1; \quad w_2^+(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(y_1) \cos \frac{n\pi}{a} (x_1 - \delta_1); \\ w_3^+(x_2, y_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(3)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} (y_2 - \delta_2); \quad w_4^+(x_2, y_2) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)}(x_2) \cos \frac{m\pi}{b} y_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\delta_1 = GB$ ,  $\delta_2 = FD$  (см. рис. 1).

Подставляя  $w_i^-$ ,  $w_i^+$  ( $i = \overline{1,4}$ ) в соответствующие уравнения (1.15), мы приходим к совокупности независимых однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами относительно входящих в представления (2.4) функций  $A_i^{(j)}$ ,  $B_i^{(j)}$ . Решая эти уравнения и выбирая решения ОДУ из соображений независимости получаемых базисных функций и убывания экспонент от сторон внутрь параллелограмма, получаем явные выражения для  $A_i^{(j)}$ ,  $B_i^{(j)}$  в зависимости от соотношения  $\lambda_n = n\pi/a$ ,  $\mu_m = m\pi/b$  для каждого значения  $n$  и  $m$ :

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(y_1) &= A_{1n} \begin{cases} \cos \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1; & \lambda_n^2 < k^2; \\ \exp(-\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} y_1); & \lambda_n^2 \geq k^2; \end{cases} \\ A_n^{(2)}(y_1) &= A_{2n} \begin{cases} \sin \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y_1; & \lambda_n^2 < k^2; \\ \exp(\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (y_1 - h)); & \lambda_n^2 \geq k^2; \end{cases} \\ A_m^{(3)}(x_2) &= A_{3m} \begin{cases} \sin \sqrt{k^2 - \mu_m^2} x_2; & \mu_m^2 < k^2; \\ \exp(\sqrt{\mu_m^2 - k^2} (x_2 - a)); & \mu_m^2 \geq k^2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_m^{(4)}(x_2) = A_{4m} \begin{cases} \cos \sqrt{k^2 - \mu_m^2} x_2; & \mu_m^2 < k^2; \\ \exp\left(-\sqrt{\mu_m^2 - k^2} x_2\right); & \mu_m^2 \geq k^2; \end{cases}$$

$$B_n^{(1)}(y_1) = B_{1n} \exp\left(-\sqrt{\lambda_n^2 + k^2} y_1\right); \quad B_n^{(2)}(y_1) = B_{2n} \exp\left(\sqrt{\lambda_n^2 + k^2} (y_1 - h)\right);$$

$$B_m^{(3)}(x_2) = B_{3m} \exp\left(\sqrt{\mu_m^2 + k^2} (x_2 - a)\right); \quad B_m^{(4)}(x_2) = B_{4m} \exp\left(-\sqrt{\mu_m^2 + k^2} x_2\right).$$

### §3. Компьютерное моделирование колебаний пластины.

Основной целью при математическом моделировании физических колебаний является получение их количественных характеристик в зависимости от геометрических параметров области их существования и граничных условий. Как правило, достижение этой цели осуществляется с использованием некоторых итерационных процессов. Это может быть, например, процесс увеличения количества членов ряда Фурье, используемого для представления искомой функции. Для эффективной реализации таких итерационных процессов очень важно иметь уверенность в том, что выбором характеристик самого процесса обеспечивается его устойчивость и получение, в конечном итоге, достоверных количественных оценок. В этом смысле используемый в работе метод суперпозиции, приводящий к построению общих решений граничных задач, обладает несомненным достоинством. Устойчивость и сходимост ь вычислительных процедур при его реализации обеспечивается фундаментальными свойствами полноты используемых для представления значения функций.

Для получения количественных оценок поперечных перемещений, а также производных от них углов поворота, моментов и перерезывающих сил перейдем в представлениях (2.4) от бесконечных рядов к конечным суммам по  $n$  и  $m$  до  $N-1$  и  $M-1$  соответственно (метод редукции) [17]. Далее решение задачи сводится к определению  $4(N+M)$  неизвестных коэффициентов в редуцированных функциональных представлениях (2.4), исходя из приближенного удовлетворения граничных условий на сторонах параллелограмма  $OD$  (I),  $BC$  (II),  $CD$  (III) и  $OB$  (IV) (см. рис. 1) в отдельных точках коллокации или в смысле метода минимизации средне-квадратического отклонения.

**Метод коллокации.** Применяя к рассматриваемой задаче об изгибных колебаниях параллелограммной биморфной пьезоэлектрической пластины со свободным краем метод коллокации, мы требуем выполнение заданных на границе условий для изгибающих моментов (1.9) и обобщенных по Кирхгофу перерезывающих сил (1.10) в отдельных точках границы (точках коллокации) [3], в качестве которых [9, 19] можно выбрать середины отрезков равномерного разбиения на  $N$  частей границ I и II (отрезки  $OD$  и  $BC$ ), и на  $M$  частей границ III и IV (отрезки  $CD$  и  $OB$ ). Таким образом, мы имеем  $2(N+M)$  точек коллокации с координатами  $(x_i^c, y_i^c)$ , в каждой из которых задан вектор внешней нормали с компонентами  $n_x, n_y$ . В результате для каждой точки коллокации формируются два линейных алгебраических уравнения относительно коэффициентов  $A_{ij}, B_{ij}$  усеченных рядов, представляющие собой приближенные выражения условий (1.9), (1.10). Решая эту систему и подставляя найденные значения коэффициентов в соответствующие представления для  $w_i^-, w_i^+$  (2.4), вычисляя их суперпозиции по формулам (2.3), и, наконец, суммируя  $w^-$  и  $w^+$  согласно (1.13), мы получаем требуемое приближенное решение  $w$  исследуемой краевой задачи.

**Метод минимизации средне-квадратического отклонения.** Другой способ приближенного удовлетворения граничных условий при решении рассматриваемой краевой задачи состоит в последовательном умножении невязок граничных условий на границах I, II и III, IV (см. выше) на независимые между собой функции из функциональных базисов, используемых для представления решения, и интегрирования полу-

ченных произведений по соответствующим граничным контурам I–IV, т.е. вычисляются скалярные произведения (проекции) невязок на базисные функции, которые приравняются нулю [18]. В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядовых разложений  $A_{ij}, B_{ij}$ . В рассматриваемом случае в качестве функций, на которые осуществляется проектирование, выбираются тригонометрические функции, входящие как сомножители в двумерные базисные функции:  $\cos \lambda_n x_1$  на стороне I,  $\cos \lambda_n (x_1 - \delta_1)$  на стороне II,  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $\cos \mu_m (y_2 - \delta_2)$  на стороне III и  $\cos \mu_m y_2$  на стороне IV,  $m = \overline{0, M-1}$ . В большинстве случаев точность приближенных решений, получаемых при применении данного метода, оказывается несколько выше, чем при использовании рассмотренного выше метода коллокации.

На основе разработанных теоретических моделей разработаны программные средства для численного моделирования изгибных колебаний биморфных пьезокерамических пластин, реализующие при приближенном удовлетворении граничных условий как метод коллокации, так и метод минимизации средне-квадратического отклонения, описанные выше.

Компьютерное моделирование проводилось для биморфных пьезокерамических пластин толщиной  $h = 2.9$  мм, изготовленных из материала PZT-4, параметры которого приведены в [6]:  $s_{11}^E = 12,3 \times 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н,  $s_{12}^E = -4,05 \times 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н,  $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E = 0,329268 \dots \approx 0,33$ ,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>.

При проведении вычисления для получения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) рассматриваемых пьезокерамических пластин величина эффективной вынуждающей моментной нагрузки  $\bar{M}_n^{Veff}$  в граничном условии (1.9) полагалась равной 1.

На рис. 2 представлены результаты расчетов амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) для биморфной параллелограммной пластины с размерами  $a = 39,7$  мм и  $b = 29,5$  мм с углом  $\alpha = 85^\circ$  по методу коллокации для значений  $N = M = 90$  (горизонтальная ось – частота, кГц; вертикальная ось – прогиб в центре пластины  $w_C$ ).

Графики АЧХ, полученные в результате компьютерного моделирования при использовании метода коллокации при  $N = M = 120$ , а также метода минимизации средне-квадратического отклонения при  $N = M = 90$  и  $N = M = 120$ , а также значения резонансных частот практически не отличаются от данных, приведенных на рис. 2.

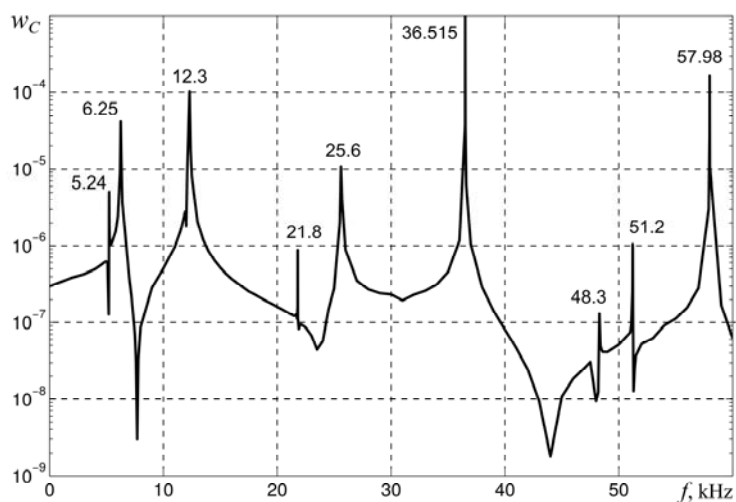


Рис. 2

При анализе данных рис. 2 следует иметь в виду, что различие в амплитудах вынужденных колебаний на частотах, которые определяются как собственные, связано лишь с выбором шага расчетов по частоте и положением значения реальных собственных частот внутри выбранного интервала.

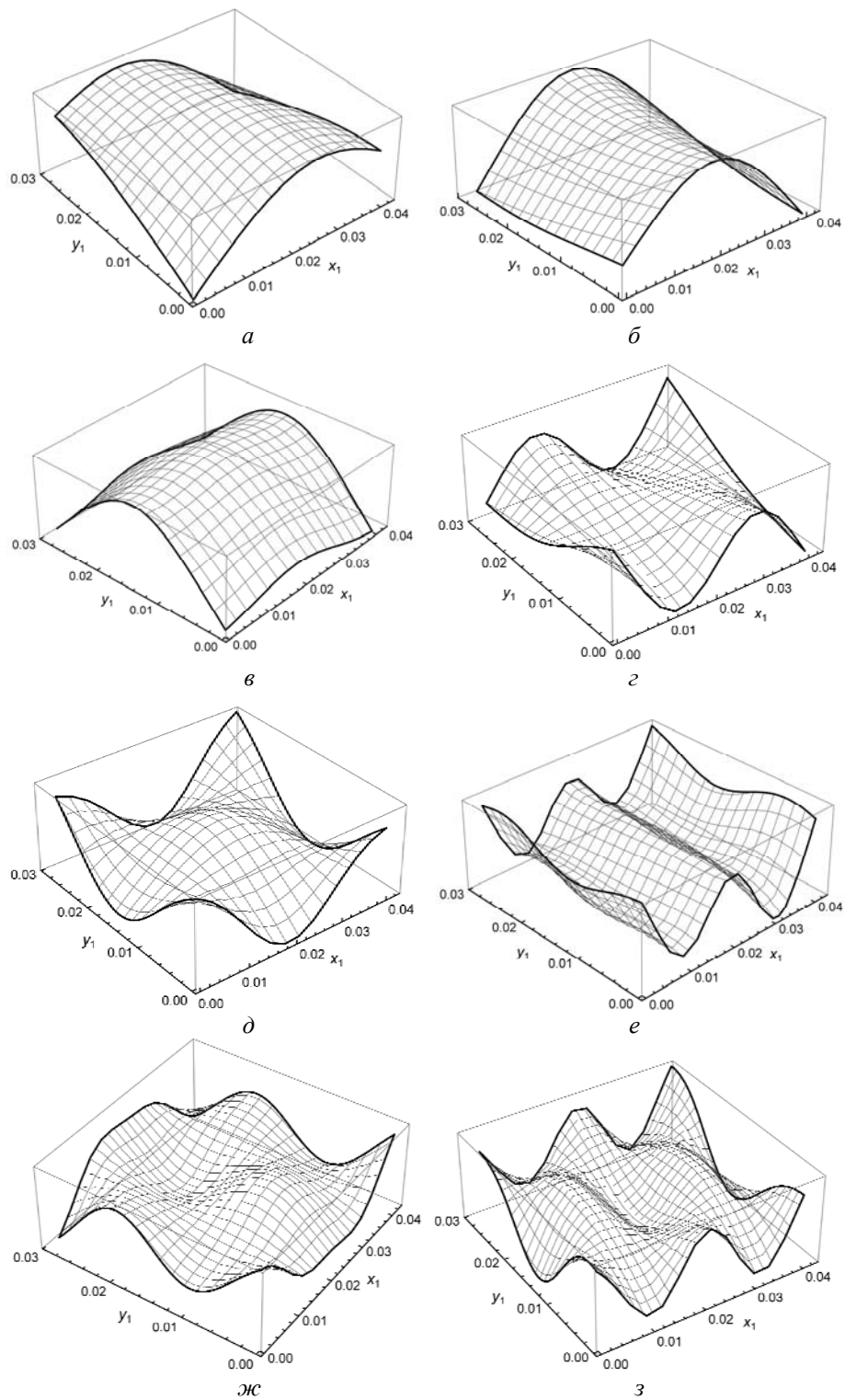


Рис. 3



Выше на рис. 3 показаны формы колебаний, рассчитанные при использовании данной аналитической методики, для следующих вычисленных резонансных частот  $f_{comp}$ :  $a - 5,24$  кГц,  $b - 6,25$  кГц,  $в - 12,3$  кГц,  $г - 21,8$  кГц,  $д - 25,6$  кГц,  $e - 36,515$  кГц,  $ж - 48,3$  кГц,  $з - 57,98$  кГц, которые соответствуют экспериментально определенным значениям резонансных частот  $f_{exp}$ :  $4,67$  кГц,  $6,03$  кГц,  $11,4$  кГц,  $22,18$  кГц,  $22,27$  кГц,  $30,77$  кГц,  $40,2$  кГц,  $44,38$  кГц.

Кроме того, для исследования эффективности разработанного аналитического подхода были проведены расчеты для параллелограммной пластины с более острым углом  $\alpha = 70^\circ$  с размерами  $a = 45,1$  мм и  $b = 25,0$  мм. Для примера на рис. 4 приведены формы колебаний на резонансных частотах  $f_{comp}$ , равных  $a - 16,4$  кГц и  $b - 25,25$  кГц, которые соответствуют экспериментальным частотам  $f_{exp}$   $14,0$  кГц и  $21,58$  кГц соответственно.

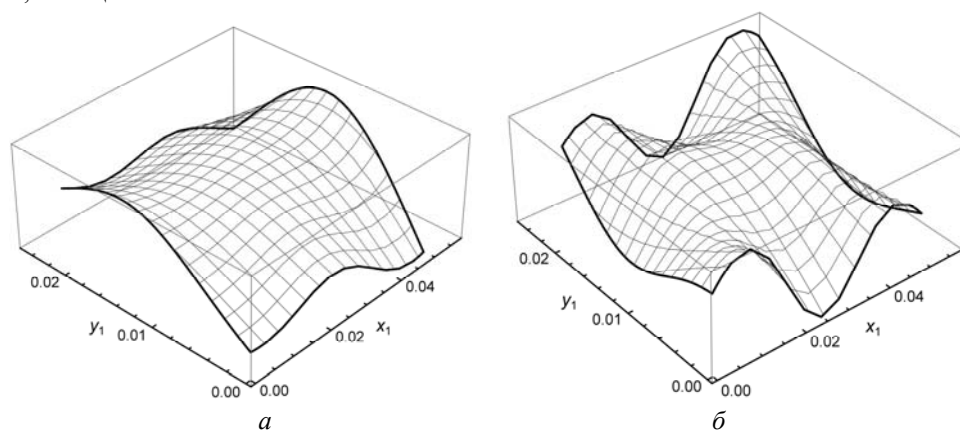


Рис. 4

Различие в расчетных и экспериментальных значениях резонансных частот объясняется тем известным фактом, что математическая модель пластины, основанная на гипотезах Кирхгофа, является более жесткой по сравнению с действительной пластиной, причем степень этой дополнительной жесткости повышается при уменьшении отношения длины волны деформации к толщине пластины.

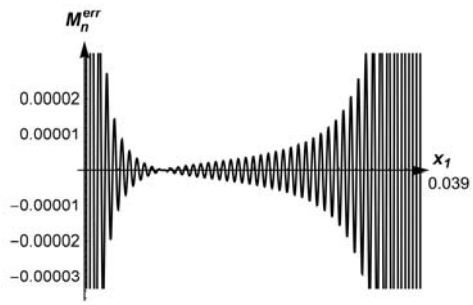
Кроме того, при сравнении данных теории и эксперимента относительно спектров собственных частот пластинки следует иметь в виду следующее важное обстоятельство. В теории результаты получены для модели идеально упругого материала. В эксперименте естественно проявляются реальные свойства материала, в частности наличие внутреннего демпфирования. Относительно собственных частот наличие демпфирования приводит к смещению значений резонансной частоты, более того для такого случая следует учитывать разницу значений собственных частот по скоростям и по смещениям. Это два различных резонанса.

Ситуация усложняется также тем, что само демпфирование существенно зависит от частоты, что также следует учесть при сравнении результатов. Не менее важным является то обстоятельство, что в эксперименте невозможно реализовать точно заданные в расчетной схеме граничные условия.

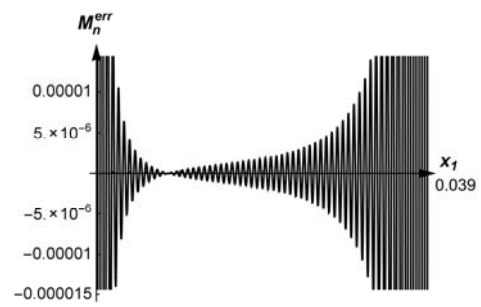
Для оценки точности результатов решения на рис. 5 – 8 также представлены графики погрешностей удовлетворения граничных условий

$$M_n^{err} = M_n^{def(comp)} - \bar{M}_n^{Veff}; \quad V_n^{err} = V_n^{def(comp)}, \quad (3.1)$$

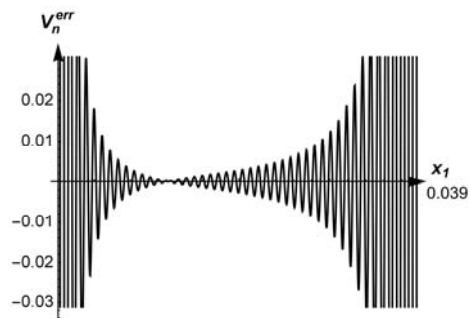
где  $comp$  обозначает величины, полученные в результате вычислений, а  $err$  – величины погрешностей. При этом графики  $a$  и  $в$  соответствуют случаю  $N = M = 90$ , а  $б$  и  $г - N = M = 120$ . На рис. 5 и 6 показаны погрешности для случая применения метода коллокации соответственно на участках границы I и IV (см. рис. 1), тогда как на рис. 7 и 8 – погрешности для случая использования метода минимизации среднеквадратического отклонения на тех же участках границы.



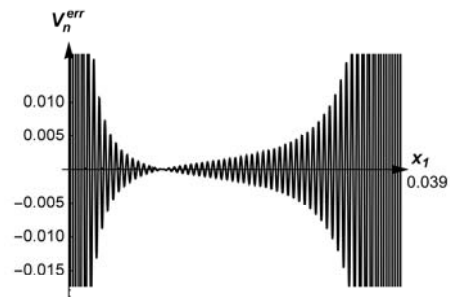
*a*



*б*

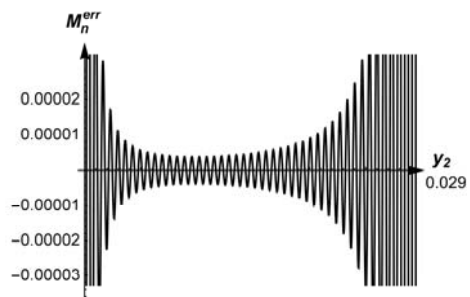


*a*

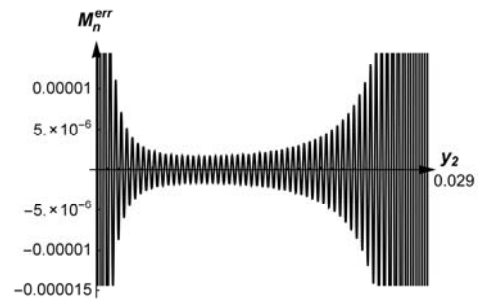


*б*

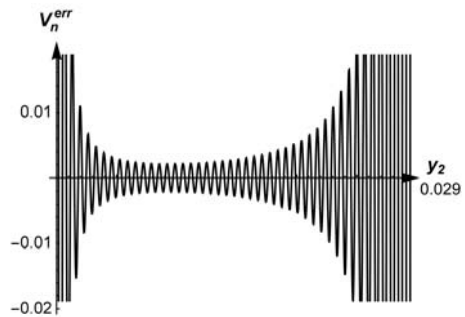
*Рис. 5*



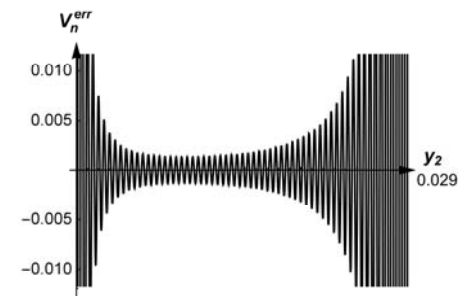
*a*



*б*



*a*



*б*

*Рис. 6*

При построении графиков погрешностей для случая использования метода коллокации на рис. 5, 6 данные в окрестности угловых точек представлены не полностью, поскольку погрешность здесь несколько возрастает. Данные представленные на рисунках, позволяют сделать качественный вывод о точности полученных результатов. Поскольку оба метода при удовлетворении граничных условий связаны с пренебрежением вклада гармоник с высокими номерами, такое поведение невязки – высокая изменчивость по координате – является естественным.

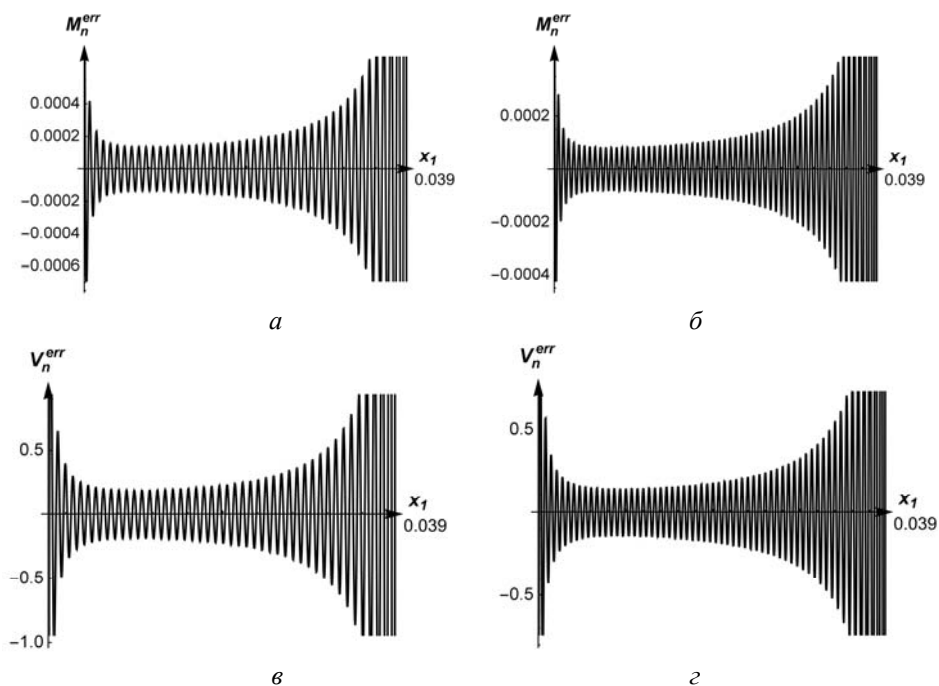


Рис. 7

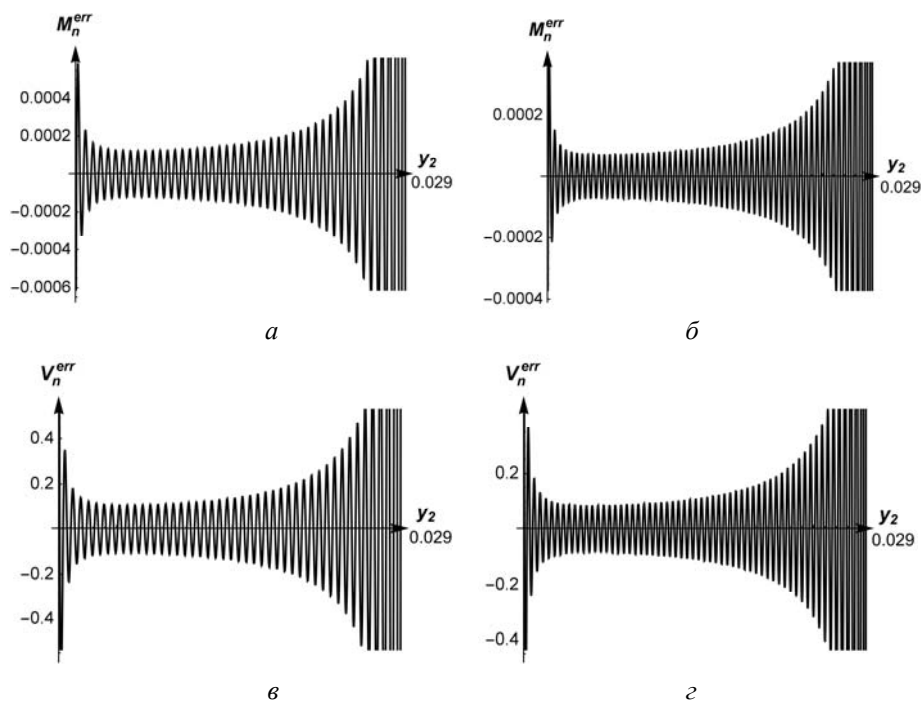


Рис. 8

### Заключение.

В работе предложен метод решения граничных задач теории изгибных колебаний параллелограммных пьезокерамических биморфных пластин, свободных от недостатков классического подхода возмущения формы границы. Аналитические представления функции прогиба могут быть использованы при любых углах скоса параллелограммных пластин.

Практические вычисления выполнены с использованием двух подходов к формированию систем алгебраических уравнений в соответствии с заданными граничными условиями, основанных на методе коллокации и методе минимизации средне-квадратического отклонения при выполнении граничных условий. Оба подхода реализованы в эффективных алгоритмах для получения количественных оценок механических характеристик колебательных систем.

Алгоритмы расчетов позволяют легко проводить оценку точности полученных результатов и соответственно определять необходимое число слагаемых в рядах, представляющих общее решение граничной задачи. Результаты конкретных расчетов иллюстрируют влияние возмущений в форме пластины на спектр резонансных частот и характер движения в собственных формах колебаний. Оба предложенных алгоритма получения количественных оценок характеристик колеблющейся пластины имеют практически одинаковую эффективность. При этом метод коллокаций требует меньшего объема аналитических преобразований.

РЕЗЮМЕ. На основі методу суперпозиції розроблено ефективний метод аналітичного розв'язання задачі про гармонічні згинні коливання біморфних п'єзокерамічних пластини у вигляді паралелограма. Редукція нескінченних рядів, що використовуються, дозволяє здійснити перехід до скінченновимірної системи алгебраїчних рівнянь, яка отримується на основі вимог задоволення заданих граничних умов за допомогою методу мінімізації середньо-квадратичного відхилення та методу колокації.

1. Барняк М.Я., Солтання Б. Проекционный метод решения задачи о собственных колебаниях жестко защемленной пластинки // Акустичний вісник. – 2009. – 12, № 1. – С. 11 – 18.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 312 с.
4. Мелешко В.В., Папков С.О. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акустичний вісник. – 2009. – 12, № 4. – С. 34 – 51.
5. Механика связанных полей в элементах конструкций [ред. акад. НАН Украины А.Н.Гузь]: в 5 т. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. Мэзон У.П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М.: Изд. иностр. лит., 1952. – 447с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
8. Шахери Мобараке П., Гринченко В.Т., Попов В.В., Солтання Б., Зражевський Г.М. Современные методы численно-аналитического решения краевых задач для неканонических областей // Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – 60, № 4. – С. 75 – 89.
9. Шахери Мобараке П., Зражевський Г.М. Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 75 – 82.
10. Gorman D.J. Vibration analysis of plates by the superposition method. – London: World Scientific, 1999. – 384 p.
11. Hajikhani M., Soltannia B., Oskouei A.R., Ahmadi M. Monitoring of delamination in composites by use of Acoustic Emission, 3rd Condition Monitoring & Fault Diagnosis Conference. – Tehran, Iran, 2009. (In Persian).
12. Leissa A.W., Qatu M.S. Vibrations of continuous systems. – New York: McGraw-Hill, 2011. – 524 p.
13. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates // J. of Sound and Vibration. – 2015. – 339. – P. 342 – 358.

14. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T.* Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains // Reports on Mathematical Physics. – 2015. – **75**, N 3. – P. 417 – 434.
15. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T., Ahmadi H., Soltannia B.* The amplitude-frequency characteristics of piezoceramic plates depending on the shape of the boundaries // Proc. of 7th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2017, Tehran, Iran, 2017).
16. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T., Iranpour Mobarakeh S., Soltannia B.* Influence of acoustic screen on directional characteristics of cylindrical radiator // Proc. of 5th Int. Conf. on Acoustics and Vibration (ISAV2015, Tehran, Iran, 2015).
17. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V., Soltannia B.* Directional characteristics of cylindrical radiators with an arc-shaped acoustic screen // J. Eng. Math. – 2017. – **103**, Iss. 1. – P. 97 – 110.
18. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T., Soltannia B.* Effect of boundary form disturbances on the frequency response of planar vibrations of piezoceramic plates. Analytical solution // Strength of Materials. – 2018. – **50**, N 3. – P. 376 – 386.
19. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T., Zrazhevsky G.M.* A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics-Mathematics. – 2015. –Special issue. – P. 297 – 304.
20. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin plates and shells: Theory, analysis, and applications. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 688 p.

Поступила 22.10.2018

Утверждена в печать 05.03.2019

