

Л. В. Мольченко, И. И. Лоос

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net*

Abstract. A theory and method for solving the geometrically nonlinear problems of magnetoelasticity of the shells of revolution of variable stiffness in two directions in the microsecond range is proposed. A numerical example is given.

Key words: shell of revolution, magnetic field, variable stiffness, magnetoelasticity.

Введение.

Действие магнитных полей на металлические упругие элементы вызывает появление объемных электродинамических сил, которые могут, при соответствующих параметрах полей, вызывать большие деформации конструкций [6, 8 – 12, 16].

Строгий анализ физико-механических процессов при электромагнитном взаимодействии должен включать уравнения движения упругого тела и уравнения электродинамики для области тела (внутренняя задача), а также уравнения электродинамики для вакуума (внешняя задача). В конкретных ситуациях рассматриваемая комплексная задача может допускать различные упрощения, например, при условии, когда можно ограничиться рассмотрением только внутренней задачи [1, 3, 7, 14].

Развитие современной техники, эксплуатация которой связана с взаимодействием различных физических факторов, обуславливает необходимость создания и разработки теории сопряженных полей тонких оболочек. Существенное место среди оболочек занимают вопросы изучения движения гибких оболочек вращения переменной жесткости с учетом электромагнитных эффектов.

В работе предложена теория и методика расчета уравнений магнитоупругости оболочек вращения переменной жесткости в геометрически-нелинейной постановке. На основании предложенной методики приведен расчет цилиндрической оболочки переменной жесткости в двух направлениях в геометрически-нелинейной постановке.

1. Постановка задачи. Двумерные нелинейные уравнения магнитоупругости оболочек вращения переменной жесткости.

Рассмотрим нелинейную задачу магнитоупругости о напряженно-деформируемом состоянии проводящих гибких оболочек вращения переменной жесткости, находящихся под действием нестационарного магнитного поля и произвольной механической нагрузки. Примем, что изотропная упругая оболочка изготовлена из материала с конечной проводимостью σ и находится во внешнем магнитном поле \vec{H}_0 . Кроме того, оболочка является проводником равномерно распределенного электрического тока плотности \vec{J}_{cm} .

Пространственные уравнения магнитоупругости в дифференциальной форме в лагранжевых переменных имеют вид [1, 5, 16]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho (\vec{F} + \vec{F}^\wedge) + \operatorname{div} \hat{\sigma};$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{H} – напряженность магнитного поля; \vec{B} – магнитная индукция; \vec{J} – плотность электрического тока; ρ – плотность материала; \vec{F} – объемная механическая сила; \vec{F}^\wedge – объемная сила Лоренца; $\hat{\sigma}$ – тензор внутренних напряжений.

Закон Ома и сила Лоренца, с учетом стороннего тока \vec{J}_{cm} , соответственно имеют вид

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm} + \sigma [\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}]; \quad \rho \vec{F}^\wedge = \vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma [\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}] \times \vec{B}.$$

При построении приближенных двумерных в материальных переменных уравнений движения и уравнений электродинамики теории тонких оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке, используются гипотезы Кирхгофа – Лява и гипотезы о характере распределения электромагнитного поля [1, 5].

Таким образом, при построении приближенных уравнений магнитоупругости гибких оболочек, которые находятся в магнитном поле, используем следующую группу электромагнитных гипотез:

$$E_\alpha = E_\alpha(\alpha, \beta, t); \quad E_\beta = E_\beta(\alpha, \beta, t); \quad E_\gamma = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} B_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} B_\beta;$$

$$J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t); \quad J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t); \quad J_\gamma = 0; \quad (1)$$

$$H_\alpha = \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h} (H_\alpha^+ - H_\alpha^-); \quad H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h} (H_\beta^+ - H_\beta^-); \quad H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t).$$

Здесь $H_i^\pm (i = \alpha, \beta, \gamma)$ известные составляющие напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки; (α, β, γ) – ортогональные криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим гибкие изотропные оболочки вращения переменной толщины, координатная поверхность которых замкнута в окружном направлении поверхности вращения. За координатную поверхность выбираем срединную поверхность оболочки и отнесем ее в недеформированном состоянии к криволинейной ортогональной системе координат (s, θ) , где s – длина меридиана; θ – центральный угол в параллельном круге. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат (s, θ, γ) .

Используя вариационный принцип, учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы (1), уравнения магнитоупругости гибких оболочек вращения принимают вид [5]:

уравнения магнитоупругости:

$$\frac{\partial (rN_s)}{\partial s} - \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(p_s + \rho F_s^\wedge) = r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r(p_\theta + \rho F_\theta^\wedge) = r \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial (rQ_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - r \frac{N_s}{R_s} - \sin \varphi N_\theta + r(p_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) = r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial(rM_s)}{\partial s} - \cos \varphi M_\theta - rQ_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s - rS \mathcal{G}_\theta = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - rQ_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \mathcal{G}_\theta - rS \mathcal{G}_s = 0;$$

$$-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right);$$

$$\sigma \left[E_s - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h};$$

$$\sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] = -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};$$

выражения деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2;$$

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \quad (3)$$

$$\chi_{s\theta} = \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},$$

где

$$\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v;$$

соотношения упругости:

$$N_s = D_N [\varepsilon_{ss} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = D_N [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{ss} - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad S = D_N \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{s\theta}; \quad (4)$$

$$H = D_M (1-\nu) \chi_{s\theta}; \quad M_s = D_M [\chi_{ss} + \nu \chi_{\theta\theta} - (1+\nu) \chi_T]; \quad M_\theta = D_M [\chi_{\theta\theta} + \nu \chi_{ss} - (1+\nu) \chi_T],$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma;$$

$$D_N = \frac{Eh(s, \theta)}{1-\nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3(s, \theta)}{12(1-\nu^2)}.$$

Составляющие силы Лоренца ρF^\wedge имеют вид:

$$\rho F_s^\wedge = -h J_{scm} B_\gamma - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} B_\gamma +$$

$$+ \sigma h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-) (B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-) (B_s^+ - B_s^-) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12}(B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \left\} - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{\mu} B_\gamma; \\
\rho F_\theta^\wedge & = hJ_{\text{ocm}} B_\gamma + \sigma h E_\theta B_\gamma + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25(B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12}(B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_\theta^+ + B_\theta^-)(B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12}(B_\theta^+ - B_\theta^-)(B_s^+ - B_s^-) \right] \right\}; \\
\rho F_\gamma^\wedge & = 0,5h \left[J_{\text{ocm}} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\text{ocm}} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \\
& - 0,5\sigma h E_\theta (B_s^+ + B_s^-) + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \right. \\
& \left. - \frac{\partial w}{\partial t} \left[0,25(B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12}(B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12}(B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{(B_\theta^+)^2 - (B_\theta^-)^2}{\mu}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что в случае использования канонических координат в теории оболочек вращения коэффициенты Ламе срединной поверхности $A = 1$, $B = r$, а также $dr/ds = \cos \varphi$, где φ – угол между осью вращения и нормалью к оболочке; $r(s)$ – радиус параллельного круга; $h = h(s, \theta)$ – толщина оболочки.

В соотношениях (2 – 5) введены следующие обозначения: N_s, N_θ – нормальное и тангенциальное усилия; S – сдвигающее усилие; Q_s, Q_θ – поперечные усилия; M_s, M_θ, H – изгибные и крутящий моменты соответственно; u, v, w – компоненты вектора перемещения; E_s, E_θ – составляющие напряженности электрического поля; B_γ – нормальная составляющая магнитной индукции; B_s^\pm, B_θ^\pm – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $\vartheta_s, \vartheta_\theta$ – углы поворота нормали; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; R_s – главный радиус кривизны; μ – коэффициент магнитной проницаемости; α – коэффициент линейного температурного расширения; $T(s, \theta, \gamma, t)$ – температура тела.

К полученным уравнениям необходимо добавить начальные и граничные условия.

2. Методика расчета гибких оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях.

При определении напряженно – деформированного состояния (НДС) токонесущих оболочек в магнитном поле, краевую задачу сформулируем в смешанном виде, когда в качестве разрешающих функций выбираются некоторые усилия, моменты, перемещения и компоненты электромагнитного поля. Выбор в качестве искомым именно таких функций позволит в дальнейшем рассматривать широкий класс граничных условий без усложнения вычислительной схемы решения краевой задачи. Дифференциальная система уравнений в основных функциях, описывающая НДС токонесущих оболочек в магнитном поле при учете геометрической нелинейности, разрешается относительно первой производной искомым функций по одной из координат.

Выбрав в качестве разрешающих функций, например, $u, v, w, \hat{S}, \hat{Q}_s, \vartheta_s, M_s, H, B_\gamma, E_\theta$, после соответствующих преобразований разрешающую систему в векторном виде представим так:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left(s, \theta, t, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right) \quad (6)$$

с граничными и начальными условиями, соответственно

$$B_1 \left(\vec{N}(s_0, \theta, t) \right) = \vec{b}_1; B_2 \left(\vec{N}(s_1, \theta, t) \right) = \vec{b}_2; \quad \vec{N} = 0, \quad \partial \vec{N} / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

где $\vec{N} = (u, v, w, \hat{S}, \hat{Q}_s, \mathcal{G}_s, M_s, H, B_\gamma, E_\theta)^T$ – в общем случае, нелинейная вектор-функция; B_1, B_2 – известные прямоугольные матрицы; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – заданные векторы.

Полученная система представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений десятого порядка в частных производных с переменными коэффициентами.

Для разделения переменных по времени применяем неявную схему Ньюмарка интегрирования уравнений магнитоупругости [5, 13, 15, 17]. Неявные схемы, в основном, абсолютно устойчивы и позволяют вести расчеты с большим временным шагом, однако часто приводят к значительному сглаживанию волновых профилей. Поэтому неявные схемы целесообразно применять в задачах с достаточно гладкими решениями.

Учитывая, что система уравнений (6) является смешанной системой гиперболо-параболического типа, величину шага по времени Δt следует выбирать, руководствуясь соотношениями

$$\Delta t < \min \left\{ \frac{\Delta s / C_M}{0,5 \Delta s^2 \sigma \mu / \rho^2} \right\}.$$

Здесь $C_M \approx 10^3$ м/с – скорость распространения магнитоупругих возмущений в металлах; Δs – шаг по переменной s .

С учетом схемы Ньюмарка, разрешающую систему магнитоупругости (6) на соответствующем временном слое можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F}_1 \left(s, \theta, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4} \right) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$D_1 \left(\vec{N}(s_0, \theta) \right) = \vec{d}_1; D_2 \left(\vec{N}(s_2, \theta) \right) = \vec{d}_2, \quad (8)$$

где D_1, D_2 – заданные прямоугольные матрицы; \vec{d}_1, \vec{d}_2 – заданные векторы. Краевая задача (7), (8) должна быть дополнена начальными условиями.

На втором этапе двумерную задачу заменяем одномерной (разделяем переменные по θ с помощью метода прямых [3, 5]). Предположим, что коэффициенты системы разрешающих уравнений и разрешающие функции – достаточно гладкие функции координаты θ . Производные по этой координате заменяем их конечно-разностными аналогами. Разделяя интервал изменения координаты θ на n полос, двумерную задачу (7), (8) аппроксимируем нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10n$ для взаимосвязанных функций $\vec{N}^i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Подставляя в систему (7) и граничные условия (8) вместо производных по координате θ конечно-разностные аналоги, получаем нелинейную систему $10n$ -го порядка, которая в конечных разностях имеет вид

$$\frac{\partial \vec{N}_1}{\partial s} = \vec{F}_2 \left(s, \vec{N}_1 \right) \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$G_1(\vec{N}_1(s_0)) = \vec{g}_1; \quad G_2(\vec{N}_1(s_1)) = \vec{g}_2, \quad (10)$$

где

$$\vec{N}_1 = \{u^1, v^1, w^1, N^1, \hat{S}^1, \hat{Q}^1, M^1, \mathcal{G}^1, B_\gamma^1, E_\theta^1, u^2, v^2, \dots, E_\theta^2, \dots, u^n, v^n, \dots, E_\theta^n\}^T.$$

Система уравнений (9) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений 10 n -го порядка с переменными коэффициентами.

Следующий этап преобразования нелинейной краевой задачи магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [2], с помощью которого исходная краевая задача (9), (10) приводится к последовательности линейных краевых задач

$$\frac{d\vec{N}_1^{k+1}}{ds} = \vec{F}_2(s, \vec{N}_1^{k+1}, \vec{N}_1^k); \quad (11)$$

$$G_1(\vec{N}_1^k) \vec{N}_1^{k+1}(s_0) = \vec{g}_1(\vec{N}_1^k); \quad G_2(\vec{N}_1^k) \vec{N}_1^{k+1}(s_1) = \vec{g}_2(\vec{N}_1^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где \vec{N}_1^{k+1} , \vec{N}_1^k – соответственно, решения на $(k+1)$ -ой и k -ой итерациях.

На каждом шаге итерационного процесса коэффициенты правой части линейной системы дифференциальных уравнений (11), элементы матриц G_1 , G_2 и компоненты векторов \vec{g}_1 , \vec{g}_2 граничных условий зависят от количества шагов по координате s и временной переменной t , а также от решения линейной задачи на предыдущем шаге.

В дальнейшем каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [4, 5].

На первом по времени шаге за начальное приближение в итерационном процессе выбирается решение линейной краевой задачи. На следующих шагах – за начальное решение выбирается решение, полученное на предыдущем шаге. Выбор такой схемы существенно уменьшает количество итераций, необходимых для решения задачи. В дальнейшем, для увеличения шага интегрирования по времени, вводим лагранжевую массовую координату, связанную с переменной s соотношением $dm = \rho ds$.

Изложенная методика позволяет упростить алгоритмизацию вычислительного процесса и решения нелинейных двумерных задач магнитоупругости оболочек вращения.

В качестве иллюстрации предложенной методики рассмотрим решение магнитоупругой задачи для гибкой круговой цилиндрической оболочки переменной жесткости по двум координатам.

3. Несимметричная магнитоупругая деформация круговой цилиндрической оболочки переменной жесткости.

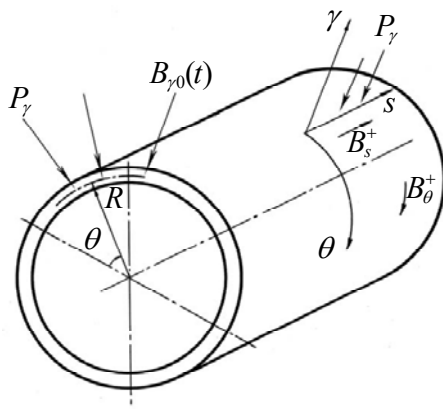


Рис. 1

Рассмотрим нелинейную краевую задачу магнитоупругости круговой цилиндрической оболочки переменной жесткости, которая находится в нестационарном магнитном поле под действием переменного механического нагружения. За координатную поверхность выбираем срединную поверхность, отнесенную к ортогональной криволинейной системе координат (s, θ) при $1/R_s = 0$, $r = R = \text{const}$ (рис. 1). Выбирая в качестве искомых функций $u, v, w, \mathcal{G}_s, N_s$,

$$\hat{S} = S + \frac{2}{R}H, \quad \hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad M_s, E_\theta, B_\gamma,$$

из системы уравнений (2), с учетом (3, 4) разрешающая система дифференциальных уравнений цилиндрической оболочки переменной жесткости принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_s - \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - \frac{\nu}{2R^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} g_s^2; \\
\frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} \hat{S} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R} g_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{h^2}{3R^2} \frac{\partial g_s}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{h^2}{3R^3} g_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{2h(1+\nu)}{3ER^2} \hat{S}; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -g_s; \\
\frac{\partial g_s}{\partial s} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_s - \frac{\nu}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\nu}{2R} g_s^2; \\
\frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} + \frac{Eh^2}{2R^3(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial g_s}{\partial \theta} + \frac{Eh^3}{6R^3(1+\nu)} \frac{\partial^2 g_s}{\partial \theta^2} - \frac{Eh^2}{2R^4(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \\
&- \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{Eh^2}{2R^4(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} g_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \frac{\partial g_s}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\
&- \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} g_s \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{2h}{3R^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{S} + \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} - (P_s + \rho F_s^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial \hat{S}}{\partial s} &= -\frac{\nu}{R} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} - \frac{E}{R^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \frac{E}{2R^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \\
&- \frac{Eh}{R^3} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{Eh^2}{4R^4} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{Eh^3}{12R^4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) + \\
&+ \frac{Eh^2}{8R^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} g_s^2 + \frac{Eh^3}{12R^3} g_s \frac{\partial g_s}{\partial \theta} - \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + \frac{Eh}{R^3} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\
&+ \frac{\nu}{R^2} N_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \hat{S} g_s - \frac{Eh^3}{6R^3(1+\nu)} \frac{\partial g_s}{\partial \theta} g_s + \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial \theta} g_s + \\
&+ \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} g_s^2 \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{h^2}{3R^3} \hat{S} g_s - (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (12) \\
\frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial s} &= -\frac{Eh}{4R^4} \left(2 \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{Eh^2}{2R^4} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) - \\
&- \frac{Eh^3}{12R^4} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \frac{Eh}{8R^3} \left[2 \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + h \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] g_s^2 + \frac{Eh^2 \nu}{2R^3(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} g_s \frac{\partial g_s}{\partial \theta} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Eh^3(1-\nu)}{12R^3(1+\nu)}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta}\right)^2 + \mathcal{G}_s \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial \theta^2}\right] - \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 M_s}{\partial \theta^2} + \frac{E}{R^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \\
& + \frac{Eh}{R^3} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{Eh}{R^3} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial N_s}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \\
& + \frac{\nu}{R^2} N_s \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} \mathcal{G}_s + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} \hat{S} + \frac{Eh^2}{2R^4(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \mathcal{G}_s \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{G}_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] + \\
& + \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \mathcal{G}_s + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta}\right) + \frac{Eh^3}{3R^4(1+\nu)} \mathcal{G}_s \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \\
& + \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \mathcal{G}_s^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) - \frac{2h}{3R^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{S} \mathcal{G}_s - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} \mathcal{G}_s - \frac{h^2}{3R^3} \hat{S} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} + \\
& + \frac{Eh}{R^2} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{Eh}{2R^3} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\nu}{R} N_s - (P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} & = \hat{Q}_s + N_s \mathcal{G}_s - \frac{\nu}{R} M_s \mathcal{G}_s + \frac{1}{R} \hat{S} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{2h}{3R^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{S} - \frac{h^2}{3R^2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} - \frac{h^2}{3R^3} \hat{S} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \\
& - \frac{Eh^2}{2R^2(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{Eh^3}{6R^2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_s}{\partial \theta^2} + \frac{Eh^2}{2R^3(1+\nu)} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{G}_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] + \\
& + \frac{Eh^3}{6R^3(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{Eh^3(1-\nu)}{12R^3(1+\nu)} \mathcal{G}_s \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \frac{Eh^3}{6R^4(1+\nu)} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{G}_s \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right]; \\
\frac{\partial E_\theta}{\partial s} & = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{R^2 \sigma \mu} \frac{\partial^2 B_\gamma}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \theta} B_\gamma - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} + \\
& + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{1}{R \sigma \mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{h}\right); \\
\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} & = \sigma \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma - E_\theta - \frac{B_s^+ + B_s^-}{2} \frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h}.
\end{aligned}$$

Компоненты силы Лоренца имеют вид (5) при $r = R = \text{const}$, $\varphi = \pi/2$.

К системе уравнений (12) добавляются граничные условия в виде комбинации компонент вектора $\vec{H}_0^{(e)}(H_{0s}^{(e)}, H_{0\theta}^{(e)}, H_{0\gamma}^{(e)})$. Внешние токи и внешние заряды отсутствуют.

Толщина оболочки изменяется в двух направлениях по закону

$$h = h_0 \left(1 + 0,3 \sin \frac{\pi s}{l}\right) (1 + 0,2 \cos \theta), \quad h_0 = \text{const}.$$

Пусть задача магнитоупругости для невозмущенного состояния решена, т.е. известны векторы магнитной индукции начального состояния для внешней $\vec{B}_0^{(e)}$ и внутренней \vec{B}_0 областей.

Граничные условия закрепления оболочки заданы в виде

$$u = v = 0; \hat{Q}_s = -200; M_s = 0; B_\gamma = B_{\gamma_0} \sin \omega t \text{ при } s_0 = 0;$$

$$u = v = w = 0; M_s = 0; B_\gamma = 0 \text{ при } s_N = l.$$

Здесь ω – круговая частота.

Начальные условия имеют вид

$$\vec{N}(s, \theta, 0) = 0; \dot{\vec{N}}(s, \theta, 0) = 0.$$

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = l = 0,5 \text{ м}; R = 0,15 \text{ м}; h_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\nu = 0,34; \sigma = 3,63 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1};$$

$$\rho = 2670 \text{ кг/м}^3; B_{s,\theta}^\pm = 0,5 T; P_\gamma = 100 \text{ Н/м}^2.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, шаг интегрирования по времени выбран равным $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с. В силу симметрии оболочки по θ решение задачи определено на интервале $[0, \pi]$.

Как отмечалось выше, значение магнитной индукции на поверхностях оболочки $B_s \left(s, \theta \pm \frac{h}{2}, t \right) = B_s^\pm (s, \theta, t)$ определяется из граничных условий и решения внешней задачи магнитостатики. При этом допускаем, что происходит хорошее «прошивание» оболочки магнитным импульсом.

Исследуем влияние изменения нормальной составляющей магнитной индукции B_γ , приложенной на контуре $s_0 = 0$, на напряженное состояние оболочки переменной жесткости.

На рис. 2 представлено распределение безразмерного прогиба w/h_0 на контуре s_0 при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с в зависимости от изменения угла θ (шаг окружной координаты $\Delta\theta = \pi/10$). Линия 1 соответствует значению $B_{\gamma_0} = 0,39444 T$, линия 2 – $B_{\gamma_0} = 0,39443 T$, линия 3 – $B_{\gamma_0} = 0,394 T$.

В результате численного эксперимента можно сформулировать следующие заключения. При значении продольных компонент магнитной индукции $B_{s,\theta}^\pm = 0,5 T$ изменение прогиба w/h_0 происходит линейно при $B_{\gamma_0} < 0,3944 T$. При $B_{\gamma_0} = 0,39444 T$ отношение прогиба $w/h_0 = -4,5$ (линия 1), что говорит о существенной геометрической нелинейности. Дальнейшее увеличение B_{γ_0}

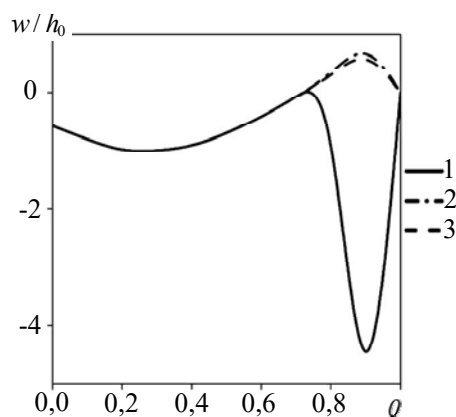


Рис. 2

резко увеличивает значение w/h_0 и это отношение уже выходит за рамки геометрической нелинейной теории, которая используется при получении уравнений магнитоупругости. Таким образом, значение $B_{\gamma_0} = 0,3944T$ является максимально возможным при решении поставленной задачи при выбранных параметрах. Отметим также, что при изменении значений продольных компонент магнитной индукции $B_{s,\theta}^{\pm}$, изменяется также максимальное значение B_{γ_0} , при уменьшении значений $B_{s,\theta}^{\pm}$, уменьшается и максимальное значение B_{γ_0} , и наоборот. Таким образом, можно сделать следующее заключение: увеличение значений $B_{s,\theta}^{\pm}$ делает оболочку более жесткой и, наоборот, при неизменных других параметрах оболочки.

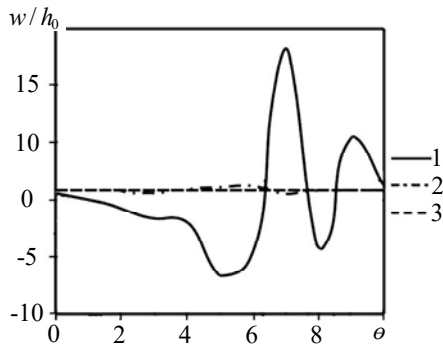


Рис. 3

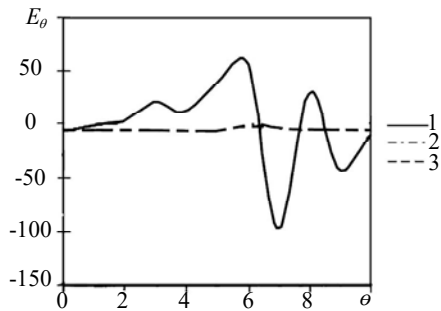


Рис. 4

Сравнивая графики на рис. 3 и 4 (линия 1), отметим, что максимумы на них совпадают для одних и тех же углов, но противоположны по знаку. Это объясняется тем, что E_{θ} определяется выражением

$$E_{\theta} = J_{\theta} / \sigma + \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-),$$

в котором производная прогиба по времени отрицательная. Отметим также, что пондеромоторная сила определяется выражением $\rho \vec{F}^{\wedge} = (\vec{J} \times \vec{B})$ и является функцией координат и времени, что позволяет «отслеживать» деформацию оболочки.

На рис. 3 представлено распределение безразмерного прогиба w/h_0 на контуре s_0 при $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ в зависимости от изменения угла θ (шаг по окружной координате $\Delta\theta = \pi/10$). Линии 1 – 3 отвечают значениям B_{γ_0} приведенным выше.

Результаты, приведенные на рис. 2, 3, позволяют также оценить влияние изменения толщины на изменение нормальной составляющей индукции $B_{\gamma}(t)$, приложенной на контуре $s_0 = 0$.

При $\theta = 7\pi/10$ отношение прогиба $w/h_0 \approx 18$ соответствует мембранной теории (безмоментная теория). При $\theta = 5\pi/10$, $\theta = 8\pi/10$, $\theta = 9\pi/10$ значения прогиба соответствуют теории гибки оболочек. Это еще раз подтверждает, что значение $B_{\gamma_0} = 0,3944T$ является максимальным для рассматриваемой задачи.

Зависимость составляющей напряженности электрического тока E_{θ} В/м в зависимости от толщины оболочки показано на рис. 4. Линии 1 – 3 отвечают значениям B_{γ_0} приведенным выше.

Заклучение.

В данной статье рассмотрена нелинейная краевая задача магнитоупругости оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях. Построена разрешающая система нелинейных уравнений цилиндрической оболочки переменной жесткости. Излагается методика расчета задач такого класса. Приведенные результаты решения нелинейной задачи магнитоупругости гибкой цилиндрической оболочки переменной жесткости в двух направлениях говорят о достаточной точности и иллюстрируют эффективность и возможности предложенной физико-механической модели, построенных алгоритма и программы.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано теорію та методику розв'язання задач магнітопружності оболонок обертання змінної жорсткості за двома напрямками в мікросекундному діапазоні. Наведено числовий приклад.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1963. – 16, вып. 5(99). – С. 171 – 174.
5. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 403 с.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 613 с.
7. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 120.
8. Dorfmann A.I., Ogden R.W. Nonlinear Theory of Electroelastic and Magnetoelastic Interactions. – New-York: Springer, 2013. – 196 p.
9. Green A.E., Naghdi P.M. One electromagnetic effects in the theory of shells and plates // Phil. Trans. Roy. Soc. – London. 1983. – A309. – P. 559 – 610.
10. Hutter K., Van de Ven A.A. Field Matter Interactions in Physics. – 1967. – N 80. – P. 339 – 368.
11. Maugin G.A. Continuum Mechanics and Electromagnetism. – New-York: Springer, 2013. – 196 p.
12. Molchenko L.V. A Method for Solving Two-Dimensional Nonlinear Boundary – Value Problems of Magnetoelasticity for Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 490 – 495.
13. Mol'chenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasilieva L.Yu. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joul Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54. – N 3. – P. 306 – 314.
14. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55. – N 1. – P. 68 – 78.
15. Mol'chenko L.V., Loos I.I., Fedorchenko L.N. Deformation of a Flexible Orthotropic Spherical Shell of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52. – N 1. – P. 56 – 61.
16. Moon F.C. Magneto-solid mechanics. – New-York: Wiley, 1984. – 437 p.
17. Newmark N.M. Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 31.10.2017

Утверждена в печать 05.03.2019