

А. Н. Гузь

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ:  
К 50-ЛЕТИЮ ИССЛЕДОВАНИЙ (ОБЗОР). II.**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. П.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

**Abstract.** An analysis of main results on investigation of some nonclassical problems of fracture and failure mechanics is considered. Results under consideration were obtained by author and his pupils in the department of dynamics and stability of continuum of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National academy of sciences of Ukraine (NASU) during last 50 years.

Nonclassical problems of fracture and failure mechanics are defined as ones in which the approaches and criteria of classical fracture and failure mechanics are inapplicable. Distinguishing feature of results of author and his pupils is application of the 3D (three-dimensional) theories of stability, dynamics and statics of solid mechanics to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics. Vast majority of others authors practises various approximate theories of shells, plates and rods and others approximate approaches to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics.

Main scientific results in the *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics obtained in the framework of above mentioned approach (3D theories of solid mechanics) are presented in very short form. Principal attention is directed to problems statement with the analysis of corresponding experiments, development of the method of solution in the framework of approach under consideration and discussion of final results. In view of it the mathematical aspect of methods of solution under consideration and their computer-aided realization are not discussed in this review paper, information on this subject is presented as annotation in short form.

Next *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics (results of author and his pupils) are considered in this review paper:

*the first problem* – fracture of composites compressed along reinforcing elements;

*the second problem* – model of short fibers in stability and fracture of composites under compression;

*the third problem* – end-crush fracture of composites under compression along reinforcing elements;

*the fourth problem* – brittle fracture of cracked materials with initial (residual) stresses acting along cracks;

*the fifth problem* – separation into slender parts of composites under tension or compression along reinforcing elements;

*the sixth problem* – fracture of materials under compression along parallel cracks;

*the seventh problem* – brittle fracture of cracked materials under dynamical loads (with contact interaction of crack faces);

*the eighth problem* – fracture of thin-walled cracked bodies under tension with prebuckling.

About **523** monographs and main papers published by author and his pupils on the eight nonclassical problems of fracture and failure mechanics under consideration are included in the list of literature to this review paper.

The total review paper includes three parts. The first part has a subtitle: General problems; this part has been published in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (**55**, № 2, 2019). The second part has a subtitle: Compressive failure of composite materials; this part is publishing in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (**55**, № 3, 2019). The third part has a subtitle: Others nonclassical problems of fracture mechanics.

**Key words:** nonclassical problems of fracture and failure mechanics; investigation during last 50 years; author and his pupils; S.P.Timoshenko Institute of Mechanics; department of dynamics and stability of continuum.

#### Предисловие.

Настоящая обзорная статья посвящена краткому описанию и соответствующему анализу основных результатов по неклассическим проблемам механики разрушения, полученных автором статьи и его учениками за последние 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

Обсуждаемая обзорная статья разделена на три части. Первая часть имеет подзаголовок «**Общие вопросы**» и опубликована в журнале «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в первую часть включены Введение и §§1 и 2. Вторая часть имеет подзаголовок «**Разрушение композитных материалов при сжатии**» и публикуется в журнале «Прикладная механика» (55, № 3, 2019); во вторую часть включены §§3 – 5. Третья часть имеет подзаголовок «**Другие неклассические проблемы механики разрушения**»; в третью часть включены §§6 – 10 и список литературы, который является общим для всех трех частей.

Во всей обзорной статье (§§1 – 10) для всех формул, рисунков, Примечаний и Таблиц принята двойная нумерация (в пределах каждого параграфа); при этом первый номер соответствует номеру параграфа и второй номер (после точки) соответствует номеру объекта в пределах рассматриваемого параграфа. Таким образом, можно рассматривать результаты каждого параграфа практически независимо от других параграфов, ориентируясь на список литературы, который является общим для всей статьи и который представлен в третьей части статьи.

#### §3. Проблема 1. Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов.

В настоящем параграфе в весьма краткой форме излагаются основные результаты по обсуждаемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ с 1967 – 1968 гг.; при этом изложение рассматриваемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении в настоящую статью (без привлечения аспектов математического характера). Также приведены сведения исторического характера, включая информацию о некоторых результатах экспериментальных исследований, соответствующих формированию обсуждаемой научно-технической проблемы.

Основные результаты сотрудников отдела динамики и устойчивости сплошных сред по рассматриваемой научной проблеме представлены в монографиях [30, 31, 54, 57] в ряде других изданий монографического характера; первоначально эти результаты были опубликованы в научных статьях, которые указаны в списках литературы к монографиям [30, 31, 54, 57]. Из списка публикаций, приведенного в настоящей обзорной статье, к рассматриваемому научному направлению отдела относятся статьи [8, 10, 11, 20, 25, 26, 29, 42, 50, 53, 55, 61, 62, 75, 80 – 82, 91 – 100, 132 – 138, 167 – 170, 175, 213 – 220, 241 – 246, 278, 290 – 293, 302, 307, 310, 311, 313, 319, 321, 326, 347, 350, 354 – 361, 374 – 376, 396, 400 – 406, 409, 410, 425 – 429, 440 – 443, 448, 485, 487 – 491, 503, 505 – 507, 512 – 516, 518, 524 – 527, 534, 538, 539, 559, 566 – 571] и материалы по докладам на международных конференциях [318, 320, 323, 329, 335, 445, 446, 460, 469, 471 – 475, 477 – 480, 517, 519 – 523].

По рассматриваемому научному направлению отдела подготовлены и защищены 5 диссертаций на степень доктора физико-математических или технических наук (DSc): И.Ю.Бабича, В.Н.Чехова, Ю.Н.Лапусты, И.А.Гузя и Э.А.Ткаченко; следует отметить, что в диссертацию И.А.Гузя также вошли результаты по **проблеме 6** (Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин).

**3.1. Общая концепция и основные направления исследований.** В настоящее время в научной литературе по механике разрушения композитных материалов принято считать, что *впервые* микровыпучивание волокон как механизм разрушения волокнистого композитного материала *при сжатии* был описан в работе [271] за 1960 г.; отмеченное явление нашло неоднократное подтверждение в ряде научных центров при соответствующих экспериментальных исследованиях, что рассмотрено в следующем пункте (п. 3.2) настоящей статьи. Указанные сведения дают возможность принять следующую Общую концепцию при анализе задач обсуждаемой проблемы.

**3.1.1. Общая концепция.** В композитных материалах, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами, при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов начальным этапом (стартом) разрушения является потеря устойчивости во внутренней структуре композитов. Распространение разрушения при этом определяется поведением возмущений в рамках применяемой теории устойчивости, распространение разрушений начинается от макро- и микронеоднородностей. Теоретическим пределом прочности при сжатии и теоретическим значением предельного укорочения являются величина критической нагрузки и величина критического укорочения, вычисленные в рамках применяемой теории устойчивости.

**Примечание 3.1.** Вышеформулированная **Общая концепция** в механике разрушения композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств композитов является полным аналогом ситуации в механике элементов конструкций, когда при сжатии вдоль осей симметрии начальным этапом исчерпания несущей способности элементов конструкций (стержни, пластины, оболочки и т.д.) является потеря устойчивости.

Таким образом, рассматриваются волокнистые однонаправленные (Рис. 3.1) и слоистые (Рис. 3.2) композиты и образованные из них перекрестной намоткой или укладкой композиты, а также другие композиты с осями симметрии свойств, вдоль которых осуществляется сжатие. Для более последовательного и строго применения сформулированной **Общей концепции** необходимо сформулировать условие существования явления потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) применительно к рассматриваемому элементу конструкции из конкретного композита. Введем обозначения:

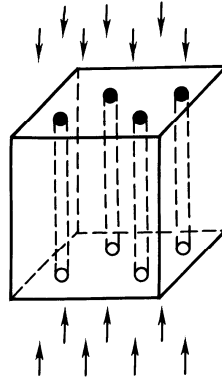


Рис. 3.1

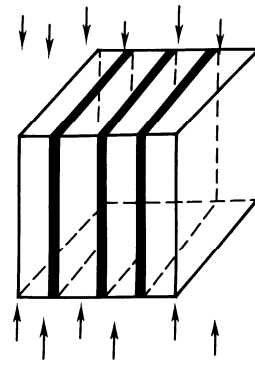


Рис. 3.2

$P_{кр}$  – критическая нагрузка, соответствующая потере устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита;

$P_{кр}^{ЭК}$  – критическая нагрузка, соответствующая потере устойчивости всего рассматриваемого элемента конструкции;

$L$  – характерный (минимальный) размер рассматриваемого элемента конструкции;

$l_{кр}$  – длина полуволны формы потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита.

Учитывая вышевведенные обозначения, условия существования потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость) применительно к рассматриваемому элементу конструкции из данного композита можно представить в следующем виде

$$P_{кр} < P_{кр}^{ЭК}; l_{кр} \ll L. \quad (3.1)$$

Невыполнение одного из условий (3.1) обозначает, что в рассматриваемом конкретном случае (форма элемента конструкции + свойства композита) при непрерывном изменении нагрузки механизм разрушения, определяемый **Общей концепцией**, не возникает.

По-видимому, впервые понятие о внутренней неустойчивости материала введено в статье [224] за 1963 г. и проведено исследование внутренней неустойчивости в рамках плоской задачи **теории 5** (теории инкрементальных деформаций [222]), анализ которой (**теории 5**) выполнен в п. 2.2 настоящей статьи. В последующие годы исследование внутренней неустойчивости проведено для пространственной и плоских задач в случае сжимаемых и несжимаемых материалов с определяющими уравнениями

достаточно общего вида в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 (в соответствии с терминологией п. 2.2); при этом конкретные результаты получены как для модели кусочно-однородной среды, так и в континуальном приближении. Вышеуказанные результаты по исследованию внутренней неустойчивости представлены в монографиях [30, 31, 49, 54, 57, 334]; предварительно эти результаты были опубликованы в статьях, которые частично вошли в списки литературы к обсуждаемым монографиям и в список литературы к настоящей обзорной статье. Применительно к континуальной модели композитов различные случаи перехода к внутренней неустойчивости (внутреннему разрушению) рассмотрены в монографии [57] (т. 2, глава 2, §4).

В рамках модели *кусочно-однородной среды* при определении величины критической нагрузки и форм потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) для конкретных композитов, обычно, учитывая второе неравенство (3.1), проводят анализ для композита конкретной структуры, который занимает бесконечное пространство. После решения соответствующих задач на собственные значения для «бесконечного» композита определяют зависимость параметра нагружения  $p$  от параметра волнообразования  $\alpha$  в следующей форме:

$$p = p(\alpha); \alpha = \pi \frac{h}{l}. \quad (3.2)$$

В (3.2) и ниже введены обозначения:

$h$  – характерный геометрический параметр структуры композита ( $h$  – минимальная толщина слоев в слоистом композите (Рис. 3.2),  $h$  – радиус волокна в однонаправленном волокнистом композите (Рис. 3.1));

$l$  – длина полуволны (вдоль слоев или волокон) формы потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость).

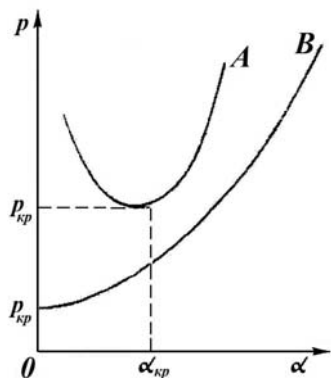


Рис. 3.3

Учитывая вышеизложенные соображения и определения, приходим к выводу, что явление потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость) существует не при произвольной зависимости (3.2). Для наглядности можно представить два типа зависимости (3.2), соответствующие кривым А и В на Рис. 3.3. Кривая А на Рис. 3.3 имеет четко выраженный минимум; в связи с этим величина  $p_{кр}$  определяется посредством минимизации первого выражения (3.2) и величина  $\alpha_{кр}$  определяется из выражения  $p_{кр} = p(\alpha_{кр})$ . Таким образом, для случая зависимости (3.2) в виде кривой А на Рис. 3.3 определяется величина критической нагрузки  $p_{кр}$  и форма потери устойчивости, соответствующая параметру волнообразования

в виде  $\alpha_{кр} = \pi h l_{кр}^{-1}$ . Необходимо отметить, что для случая кривой А имеют место соотношения

$$\alpha_{кр} \neq 0; l_{кр} \neq \infty. \quad (3.3)$$

В связи с наличием соотношений (3.3) в случае зависимости (3.2) в виде кривой А на Рис. 3.3 отмеченные ранее условия (3.1) применяются для определения тех элементов конструкций (их размеров) из конкретного композита, для которых реализуется потеря устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость).

Кривая В на Рис. 3.3 является монотонной кривой; в связи с этим критическое значение  $p'_{кр}$  для этой кривой в результате минимизации выражения (3.2) определяется соотношением  $p'_{кр} = p(0)$ , следовательно в рассматриваемом случае кривой В на Рис. 3.3 получаем

$$\alpha_{кр} = 0; l_{кр} = \infty. \quad (3.4)$$

Из выражений (3.4) следует, что в случае зависимости (3.2) в виде кривой **В** на Рис. 3.3 невозможно определить форму потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита. Таким образом, в соответствии с принятым определением *не существует* явления потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренней неустойчивости) в случае зависимости (3.4) в виде кривой типа **В** на Рис. 3.3. Также отметим, что в соответствии со вторым выражением (3.4) в случае кривой типа **В** на Рис. 3.3 для *любого элемента конструкций* не может выполняться второе условие (3.1); следовательно в рассматриваемом случае *может реализоваться только потеря устойчивости всего элемента конструкций*.

Таким образом, можно считать, что явление потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость) не возникает, если зависимость параметра нагружения  $p$  от параметра волнообразования  $\alpha$  (первое выражение (3.2)) *представляется кривой типа В на Рис. 3.3*. В случае кривых типа **А** на Рис. 3.3, *когда  $\alpha_{кр}$  незначительно отличается от нуля*, явление потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость) в элементах конструкций конкретной форсы также практически не возникает вследствие второго условия (3.1), поскольку при этом  $l_{кр} \rightarrow \infty$ . Отмеченную ситуацию применительно к зависимости (3.2) в виде кривой **А** на Рис. 3.3 необходимо учитывать при анализе рассматриваемого явления для конкретных композитов.

Вышеизложенная в настоящем пункте (п. 3.1.1) **Общая концепция** и методология ее применения дают возможность получать и анализировать результаты, относящиеся к **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*) и также другим неклассическим проблемам механики разрушения композитов, которые получены с привлечением ТЛТУДТ; в частности, такой подход полностью применим к модели «бесконечно длинных волокон» в механике композитных материалов, когда исследуются периодические вдоль армирующих элементов (волокон, слои) формы потери устойчивости. По стилю изложения материала настоящий п. 3.1.1 соответствует п. 1.2.1 обзорной статьи [65] и обзору результатов в монографии [64]. В исследованиях по обсуждаемой **Проблеме 1** с привлечением **Общей концепции** сформировалось два научных направления, краткая информация по характеристике которых представлена в следующих пп. 3.1.2 и 3.1.3.

**3.1.2. Первое направление (весьма приближенные подходы).** Первое направление основано на введении *различных весьма приближенных расчетных схем и допущений* при исследовании явления внутренней неустойчивости (потери устойчивости во внутренней структуре) композитов, определяющей начальный этап (старт) разрушения композитов при сжатии. В настоящее время, по-видимому, еще не выполнен надлежащий анализ такого подхода в основных задачах, если он вообще возможен; в связи с этим при рассмотрении результатов, полученных в рамках первого подхода, осторожное к ним отношение не может быть неоправданным, поскольку обсуждаемые результаты являются результатами теоретических исследований при введении *приближенных расчетных схем и допущений* без их надлежащего анализа и обсуждения.

Автор настоящей обзорной статьи, как и авторы обзора [65] за 2016 г. не определяли свою цель – дать систематический обзор и анализ соответствующих публикаций по **первому** направлению, так как в настоящее время в научно-технической литературе по механике композитов и по механике разрушения опубликовано сравнительно большое количество статей, результаты которых получены в рамках **первого** направления. Целью настоящего пункта (п. 3.1.2), как и п. 1.2.2.1 [65], является: классификация обсуждаемых результатов как **первого** направления в рассматриваемых исследованиях; формулировка основных (по мнению автора настоящей обзорной статьи) приближенных допущений, характерных для первого направления; рассмотрение первых в историческом аспекте публикаций, относящихся к первому направлению.

Характерные *приближенные допущения*, широко применяемые при проведении исследований в рамках первого рассматриваемого направления, можно условно объединить в следующие пять групп.

1. При исследовании закономерностей в *волокнистом* композите применяется модель *слоистого* композита, для которого исследования проводятся в рамках плоской задачи.

2. При анализе устойчивости наполнителя – армирующих элементов (волокна, слой) широко применяются *одномерные и двухмерные прикладные теории устойчивости тонкостенных систем* (стержни, пластины), построенные с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгофа – Лява и т.п.; как общеизвестно, такого типа теории применяются *только* для описания сравнительно длинноволновых форм потери устойчивости.

3. Как правило, не учитывается, что матрица (связующее) также воспринимает сжимающую нагрузку. Такое допущение вызвано тем, что материал матрицы имеет значительно меньшую жесткость по сравнению с материалом наполнителя; как следствие при исследовании принимается, что *матрица является незагруженной*. Для ряда композитов, по крайней мере для композитов с малой концентрацией наполнителя, обсуждаемое допущение является достаточно приближенным.

4. При исследованиях приближенно учитывается взаимодействие матрицы (связующего) и наполнителя (волокна, слой). Достаточно часто взаимодействие волокна с матрицей моделируется взаимодействием волокна с коаксиальным цилиндром (частью матрицы) Также достаточно часто при анализе взаимодействия наполнителя (волокно, слой) и матрицы (связующего) применяется моделирование матрицы одномерной моделью.

5. На границах раздела (interface) наполнителя и матрицы *приближенно* удовлетворяются граничные условия, достаточно часто даже не комментируя указанную ситуацию.

Необходимо отметить, что при введении допущений по одной из указанных групп допущений автоматически вводятся допущения и по другой группе; для иллюстрации вышеизложенной ситуации рассмотрим следующий пример. Так, принимая допущение, что при сжатии композита в матрице не возникают напряжения, а в наполнителе – волокнах возникают напряжения (третья группа допущений), автоматически вводятся допущения о приближенных граничных условиях на границе раздела (interface) матрицы и наполнителя (пятая группа допущений). Дело в том, что исходное допущение автоматически приводит к тому, что в докритическом состоянии (до потери устойчивости) матрица и наполнитель свободно проскальзывают друг относительно друга вдоль волокон, а в момент потери устойчивости для матрицы и наполнителя выполняются условия полного контакта.

Безусловно, анализ допущений, входящих в указанные пять групп, и других допущений **первого** направления можно продолжить, однако такой анализ не является целью настоящей обзорной статьи. Рассмотрим некоторые моменты исторического характера, относящиеся к проведению теоретических исследований в рамках первого направления.

В настоящее время принято считать, что *первые* теоретические результаты применительно к исследованию явления, отмеченного в публикации [271] за 1960 г., были представлены в статье [551] за 1965 г., которая была опубликована на английском языке; статья [551] на русском языке была опубликована в 1967 г. в виде статьи [161]. Следует отметить, что в статьях [551] и [161] фактически в той или иной форме используются приближенные допущения, входящие в вышеперечисленные пять групп приближенных, характерных для **первого** направления. Статьи [551] и [161] являются общеизвестными и общепризнанными в мировой научно-технической литературе по механике композитов и механике разрушения, несмотря на вышеуказанный *весьма приближенный характер* изложенных в них результатов. Так, результаты [551] и [161] вошли в семитомный трактат [160] энциклопедического характера по разрушению (в виде статьи [162] первой части седьмого тома). Кроме того, эти результаты вошли в восьмитомный трактат [127] энциклопедического характера по композитным материалам в виде материала к соответствующим статьям. Кроме того, обсуждаемые результаты также включены в известную коллективную монографию [163], опубликованную на русском языке в 1970 г.

По-видимому, целесообразно отметить, что обсуждаемые результаты публикаций [551] и [161] уже не предполагалось включить в коллективные многотомные монографии [247] (в 6-и томах; Editor-in-Chief: A.Kelly, C.Zweden) по композитным материалам и [248] (в 10-и томах; Int. Advisory Board: Ian Milne, R.O.Ritchie, B.Karihaloo) по разрушению, которые планировались к изданию в издательстве Elsevier в 2006 г.; отмеченная информация может быть сформирована из рекламных материалов, которые были доступны к концу 2006 г. автору настоящей обзорной статьи. Дополнительно отметим, что результаты публикаций [551] и [161] не вошли в 4-х томное издание [146] (под общей ред. В.В.Панасюка) по механике разрушения, которое было опубликовано в 1988 – 1990 гг.

В настоящее время в рамках обсуждаемого первого направления, кроме статьи [551] за 1965 г., опубликовано уже достаточно большое количество статей. По-видимому, целесообразно указать статьи, опубликованные в первые годы после 1965 г.: [556] за 1966 г., [553] за 1967 г., [493] за 1966 г. и [494] за 1970 г., [162] за 1976 г.; в монографиях [54, 57, 64] и в обзорной статье [65] за 2016 г. в списках литературы отмечены вышеуказанные и другие публикации. Обсуждаемые результаты в монографии [174] со ссылкой на статью [162] названы теорией Дау-Грунфеста-Розена-Шурца (как авторов публикаций [271] за 1960 г., [551] за 1965 г. и [556] за 1966 г.). Обзор ряда результатов по первому направлению приведен в обзорной статье [557] за 1996 г., которая опубликована на английском языке.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении результатов, полученных по первому направлению (*весьма приближенные подходы*); как уже отмечалось, во вводной части настоящего п. 3.1.2, автор обзора не стремился дать систематический обзор и анализ соответствующих публикаций по **первому** направлению.

**3.1.3. Второе направление (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ).** Второе направление характеризуется проведением исследований *первого явления* – внутренней неустойчивости (потери устойчивости во внутренней структуре) композитов и *второго явления* – поверхностной или приповерхностной неустойчивости (потери устойчивости в поверхностных или приповерхностных слоях) композитов, определяющих начальный этап (старт) разрушения композитов при сжатии в соответствии с **Общей концепцией**, которая для первого явления сформулирована в п. 3.1.1 и для второго явления будет сформулирована ниже в настоящем пункте (п. 3.1.3). В рамках второго направления исследования вышеуказанных первого и второго явлений проводятся на основе ТЛТУДТ (трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел), математический аппарат которой в краткой форме изложен в предыдущем параграфе (§2) настоящей статьи.

Целесообразно отметить, что исследование *второго явления* (поверхностная или приповерхностная неустойчивость в структуре композитных материалов) *вообще не проводилось* в рамках первого направления. По-видимому, с учетом приближенных схем и допущений 1 – 5, указанных в п. 3.1.2 и применяемых в первом направлении, весьма сложно построить какую-либо теорию, адекватно описывающую столь тонкое явление как поверхностная или приповерхностная неустойчивость в структуре композитного материала при сжатии.

**3.1.3.1. Внутреннее разрушение (потеря устойчивости во внутренней структуре).** При проведении исследований применяются строгие и последовательные подходы в рамках трехмерной теории (ТЛТУДТ) и, таким образом, во *втором* направлении *не используются* приближенные расчетные схемы и допущения 1 – 5, которые характерны для первого направления и которые указаны в первой части предыдущего пункта (п. 3.1.2); в связи с вышеизложенным конкретные результаты, полученные при *втором* подходе, можно также использовать для оценки точности соответствующих результатов, полученных при первом подходе.

В рамках второго направления получены конкретные результаты для ряда классов пространственных и плоских задач механики разрушения композитов при сжатии

применительно к различным моделям деформируемых тел для наполнителя и матрицы в случае модели кусочно-однородной среды и континуальной модели, соответствующей применению принципа континуализации. Комментарий к первому подходу (модель кусочно-однородной среды) и второму подходу (модель однородной среды с усредненными параметрами – как результат применения принципа гомогенизации) кратко изложены во второй части п. 1.4.1.

При применении вышеуказанного первого подхода (модель кусочно-однородной среды) отдельно для каждого элемента наполнителя и матрицы применяются основные соотношения ТЛТУДТ, и на границе раздела указанных материалов обеспечивается выполнение непрерывности векторов напряжений и перемещений. В обсуждаемом случае исследования проводились и получены многочисленные результаты при одноосном сжатии (вдоль волокон) однонаправленного волокнистого композита (Рис. 3.1) и слоистого композита (Рис. 3.2) при одноосном или двухосном сжатии вдоль слоев. В вышеуказанных ситуациях исследования проводились в соответствии с методологией, которая в краткой форме изложена в п. 3.1.1 после формулировки **Общей концепции**.

При применении вышеуказанного второго подхода (модель однородной среды с усредненными параметрами) полученные результаты относятся к композитам различной структуры, которые имеют одну плоскость симметрии, две взаимно-перпендикулярные или три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии свойств материала; принимается, что вдоль нормалей к указанным плоскостям симметрии свойств композита осуществляется одноосное, двухосное или трехосное сжатие материала. При вышеуказанных условиях (свойства материала + условия нагружения) построена континуальная теория разрушения композитов, основанная на выявлении в материале возмущений, не имеющих локального характера; разработан метод определения теоретических пределов прочности при одноосном нагружении и метод построения поверхностей теоретических пределов прочности при двухосном и трехосном нагружении.

**3.1.3.2. Приповерхностное разрушение (потеря устойчивости в структуре приповерхностных слоев композита).** По-видимому, впервые понятие о поверхностной неустойчивости материала введено в статье [223] за 1963 г. и проведено исследование поверхностной неустойчивости в рамках плоской задачи **теории 5** (*теории инкрементальных деформаций* [222]), анализ которой (**теории 5**) выполнен в п. 2.2 настоящей статьи. Явление поверхностной неустойчивости [223] полуплоскости заключается в том, что при сжатии полуплоскости вдоль ее границы возникает возле границы потеря устойчивости состояния равновесия, формы которой (потери устойчивости) затухают при удалении от границы. По мнению автора настоящей статьи обсуждаемое явление целесообразно назвать «приповерхностная неустойчивость» (near-the-surface instability) вместо названия «поверхностная неустойчивость» (surface instability), поскольку потеря устойчивости происходит в слоях материала возле поверхности и амплитуда форм потери устойчивости затухает при удалении от поверхности материала; в связи с этим ниже будем применять название приповерхностное разрушение (приповерхностная неустойчивость, потеря устойчивости в структуре приповерхностных слоев материала).

В последующие годы исследование приповерхностной неустойчивости было проведено для пространственных и плоских задач в случае сжимаемых и несжимаемых материалов (с определяющими уравнениями достаточно общего вида) в единой общей форме для **теорий 1, 2 и 3** (в соответствии с терминологией п. 2.2); при этом конкретные результаты получены как для модели кусочно-однородной среды, так и в континуальном приближении. Вышеуказанные результаты по исследованию приповерхностной неустойчивости представлены в монографиях [30, 31, 49, 54, 57, 334]; предварительно эти результаты были опубликованы в статьях, которые, частично, вошли в списки литературы к обсуждаемым монографиям и в список литературы к настоящей обзорной статье.



В общем случае рассматриваются композитные материалы различной структуры, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами; при этом принимается, что указанные материалы имеют *свободную поверхность*, которая параллельна одной из плоскостей ортотропии. В случае сжатия параллельно к свободной поверхности вдоль одной или двух взаимно-перпендикулярных осей может возникать в структуре композита потеря устойчивости в приповерхностных слоях композита, когда амплитуда форм потери устойчивости затухает при удалении от *свободной поверхности*; указанное явление получило название *поверхностная неустойчивость* (surface instability) или *приповерхностная неустойчивость* (near-the-surface instability). Полученные при вышеуказанной постановке результаты дают возможность сформулировать **Общую концепцию** при исследовании *приповерхностного разрушения* (с учетом наличия *свободной поверхности*) по аналогии с **Общей концепцией**, изложенной в п. 3.1.1 в случае сжатия композита (без учета влияния *свободной поверхности*).

**Общая концепция.** В композитных материалах, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами и которые имеют *свободную поверхность* (параллельную одной из плоскостей ортотропии), при сжатии параллельно «свободной поверхности» в одном или в двух взаимно-перпендикулярных направлениях *начальным этапом (стартом) приповерхностного разрушения* является *приповерхностная потеря устойчивости*. При анализе дальнейшего развития рассматриваемого механизма разрушения необходимо учитывать его возможное взаимодействие с другими механизмами разрушения. *Теоретическим пределом прочности и теоретическим значением предельного укорочения при приповерхностном разрушении при сжатии являются величина критической нагрузки и величина критического укорочения, вычисленные в рамках применяемого варианта ТЛТУДТ.*

Вышеформулированная **Общая концепция** дает возможность разрабатывать механику приповерхностного разрушения композитов (в приповерхностных слоях материала вблизи свободной границы) при сжатии, исследуя приповерхностную неустойчивость вблизи свободной границы композита с привлечением ТЛТУДТ (второе направление п. 3.1.3); по-видимому, в рамках первого научного направления (п. 3.1.2) такого типа исследования нельзя признать перспективными.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при краткой характеристике второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ); дополнительные сведения представим лишь в виде следующих двух Примечаний.

**Примечание 3.2.** Сведения, представленные выше в п. 3.1.2 для **первого** направления исследований (*весьма приближенные подходы*) и в п. 3.1.3 для **второго** направления исследований (*строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ*) ни в коей мере *не могут* рассматриваться как даже весьма краткие *обзоры* результатов по обсуждаемым двум направлениям; сведения в пп. 3.1.2 и 3.1.3 целесообразно рассматривать как краткие характеристики тематики и применяемых подходов соответствующих двух направлений исследований. Краткий обзор основных результатов, полученных по **второму** направлению, будет представлен в п. 3.3 настоящего параграфа; при этом в следующем п. 3.2 приведены основные результаты экспериментальных исследований, относящиеся к подтверждению существования обсуждаемого явления (потеря устойчивости в структуре композита при сжатии) и к исследованию разрушения при сжатии композитов вдоль армирующих элементов (**Проблема 1** по терминологии п. 1.3 настоящей статьи).

**Примечание 3.3.** В монографиях [90, 423] и в соответствующих статьях, например [348, 424] и другие статьи из списков литературы к вышеуказанным монографиям, изложены основы механики нанокомпозитов с полимерной матрицей; обсуждаемые основы включают принципы построения механики композитов с полимерной матрицей и ряд разделов, относящихся к динамике, устойчивости и статике рассматриваемых нанокомпозитов. Так, в [90, 423] представлены основы механики разрушения нанокомпозитов с полимерной матрицей при сжатии, которая построена на основе ТЛТУДТ и которую можно рассматривать как развитие результатов, соответствующих **второму** направлению (п. 3.1.3).

**3.2. Анализ экспериментальных результатов по сжатию композитов.** В настоящее время применительно к проблеме экспериментальных исследований по сжатию композитов уже опубликовано достаточно большое число научно-технических статей, как и по результатам теоретических исследований, о чем, в частности, свидетельствует и список публикаций к настоящей обзорной статье. В качестве примера можно указать обзорную статью [572] за 1996 г., опубликованную на английском языке в известном журнале «Prog. Aerospace Sciences», в списке литературы к которой насчитывается 133 публикации; при этом обсуждаемая обзорная статья [572] посвящена исключительно анализу результатов по экспериментальному исследованию разрушения композитов при сжатии. Интересно отметить, что в обзорной статье [572] подчеркивается пионерский характер публикации [271] в исследованиях по влиянию механизма внутренней неустойчивости в структуре композита на разрушение композита при сжатии.

В настоящем п. 3.2 при анализе публикаций с результатами экспериментальных исследований по разрушению композитов при сжатии предусматривается конкретная цель: во-первых, рассмотреть ряд публикаций, экспериментальные результаты которых подтверждают существование обсуждаемого явления (потеря устойчивости во внутренней структуре композита при сжатии); во-вторых, рассмотреть ряд публикаций, экспериментальные результаты которых характеризуют специфику разрушения при сжатии композитов вдоль армирующих элементов. Вышеуказанный анализ проводился в монографиях [30] за 1971 г., [54] за 1990 г., [57] за 2008 г. и [64] за 2015 г., а также в обзорной статье [65] за 2016 г. при различном охвате анализируемых публикаций; по-видимому, можно считать, что в монографии [57] по обсуждаемым двум вопросам изложен наибольший (по сравнению с другими вышеуказанными монографиями) объем информации. Целесообразно отметить, что в монографиях [90, 423], которые, как указывалось ранее в Примечании 3.3, посвящены изложению принципов построения основ механики нанокompозитов с полимерной матрицей, также приведены экспериментальные результаты по исследованию устойчивости нанотрубок в полимерной матрице при сжатии.

По рассмотренным результатам настоящий п. 3.2 соответствует при некотором сокращении п. 1.1 обзорной статьи [65] за 2016 г.; при этом отдельно анализируются результаты экспериментальных исследований, свидетельствующие о существовании явления потери устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии (п. 3.2.1) и результаты экспериментальных исследований, характеризующие специфику разрушения композитов при сжатии вдоль армирующих элементов (п. 3.2.2).

**3.2.1. Экспериментальные результаты по потере устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии.** Прежде всего, необходимо отметить, что анализируемое явление (потеря устойчивости во внутренней структуре) не наблюдается для однородных материалов; оно характерно только для композитных материалов (как для структурно-неоднородных материалов, в которых наличие внутренней структуры учитывается на различных уровнях при их анализе). При этом целесообразно отметить, что структурная однородность или неоднородность конкретного материала в значительной мере определяется уровнем рассмотрения (исследования) процессов, который, в основном, определяется показателями изменчивости полей механических величин (напряжения, деформации, ...) по пространственным переменным.

При анализе экспериментальных результатов по потере устойчивости во внутренней структуре композитных материалов необходимо учитывать следующую ситуацию. При сжатии вдоль армирующих элементов (волокон, наполнителя) композитных материалов в случае экспериментальных исследований наблюдать (фиксировать) потерю устойчивости во внутренней структуре «в чистом виде» весьма затруднительно, так как с самого начала процесса потери устойчивости возникает незначительное или значительное разрушение. В связи с этим для доказательства возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композитного материала при сжатии обычно приводят результаты специально поставленных экспериментов, которые заключаются в следующем.

Волокна (наполнитель композита) помещают в эпоксидную (или иную) смолу и производят полимеризацию при определенной температуре; после этого осуществляются процессы охлаждения до определенной температуры и отверждения. Практиче-

ски во всех случаях рассматриваемых экспериментальных исследований нагружение сжатием осуществляется за счет усадки (shrinkage) матрицы (смолы, связующего) при ее отверждении или остывании блока композитного материала. В этом случае за счет разности коэффициентов теплового расширения волокон и матрицы, соединенных между собой, на волокна действуют сжимающие нагрузки.

Вышеуказанные экспериментальные исследования проводились в различных научных центрах в различное время. Результаты таких экспериментальных исследований представлены в соответствующих публикациях.

По-видимому, впервые обсуждаемые результаты экспериментальных исследований представлены на русском языке в публикации [161] за 1967 г., которая является переводом публикации [551] за 1965 г. на английском языке; в связи с этим ниже приведем некоторые результаты, соответствующие [161, 551]. Так, на Рис. 3.4 приведена фотоупругая картина для трех отдельных волокон из Е-стекла (диаметром 0,13; 0,09 и 0,013 мм) в матрице из эпоксидной смолы, заполимеризованной при температуре 120°C. Периодическая (с большим числом периодов) фотоупругая картина на Рис. 3.4 для всех трех волокон свидетельствует о синусоидальной (вдоль направления волокон) форме потери устойчивости. Заметим, что Рис. 3.4 соответствует [161, Фиг. 3.20]; эти результаты, как уже отмечалось, получены методом фотоупругости.



Рис. 3.4

В последующие годы родственные результаты экспериментальных исследований были получены во многих научных центрах, в том числе и при других методах отверждения смолы (связующего).

Ниже в качестве примера приведены результаты экспериментальных исследований при термохимическом отверждении смолы (связующего), при этом до термохимического отверждения смолы волокна стекла и их пряди свободно плавали в связующем. Результаты указанных экспериментальных исследований опубликованы в статье [290] за 1982 г.; при исследованиях применялись волокна стекла диаметром 0,01 мм. На Рис. 3.5, соответствующем публикации [290], представлены результаты (при увеличении в 50 раз) для отдельных волокон и пряди волокон после отверждения смолы (связующего) термохимическим методом. Из Рис. 3.5 видно, что вся прядь волокон и отдельные волокна после отверждения смолы (связующего) приобретают явно выраженную периодическую синусоидальную (вдоль направления волокон) форму потери устойчивости.

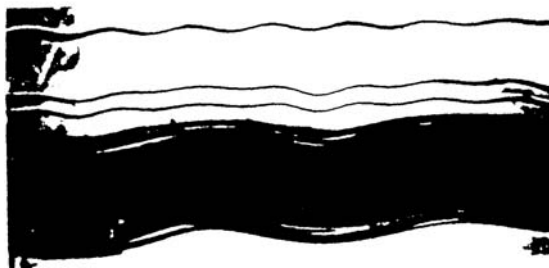


Рис. 3.5

Следует отметить, что результаты, представленные на Рис. 3.4 и 3.5, относятся к потере устойчивости во внутренней структуре композитных материалов, в которых армирующими элементами являются волокна стекла диаметром 0,13; 0,09; 0,013 и 0,01 мм; вышеуказанные результаты экспериментальных исследований опубликованы во второй половине XX века. Родственные экспериментальные исследования проводятся и в настоящее время (в начале XXI века) применительно к случаям, когда армирующими элементами (наполнителем) являются волокна из других материалов; при этом во всех случаях сжатие реализуется за счет усадки (shrinkage) смолы (связующего) при ее отверждении или остывании.

Примером результатов экспериментальных исследований, опубликованных в начале настоящего XXI века, является статья [498], которая опубликована в 2004 г.; результаты этой статьи, которые получены по вышеуказанной методике, относятся к исследо-

ванию устойчивости углеродного волокна в полимерной матрице (эпоксидная смола). На Рис. 3.6, соответствующем статье [498], представлена периодическая синусоидальная форма потери устойчивости с большим количеством периодов. Форма потери устойчивости, представленная на Рис. 3.6, получена при остывании полимерной матрицы и зафиксирована согласно [498] на 68-ой секунде после начала процесса остывания; при этом в левом нижнем углу на Рис. 3.6 указан масштаб изображения в микронах.

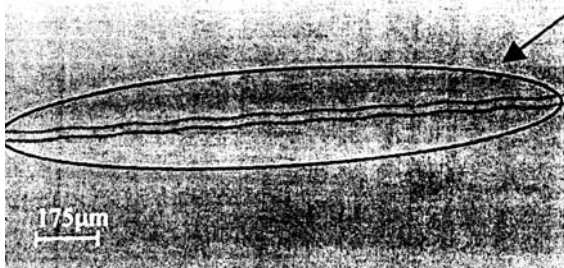


Рис. 3.6

Наряду с результатами, представленными на Рис. 3.4 – 3.6 и относящимися к волокнам стекла и углеродным волокнам, в настоящее время опубликован ряд статей с результатами экспериментальных исследований по рассматриваемому явлению применительно к различным композитным материалам.

Таким образом, вышеприведенные и родственные *результаты экспериментальных исследований*, относящиеся к достаточно длинным армирующим элементам (волоконкам, наполнителю) в матрице (связующем), *подтверждают существование явления потери устойчивости во внутренней структуре композитного материала. Обнаруженные при экспериментальных исследованиях формы потери устойчивости (Рис. 3.4 – 3.6) являются периодическими (вдоль армирующих элементов, вдоль волокон) синусоидальными формами потери устойчивости во внутренней структуре композита с большим числом периодов*; в связи с вышеуказанным граничные условия на торцах армирующих элементов (волокон) не могут оказывать существенного влияния на формы потери устойчивости и на величины критических нагрузок и укорочений. *Вышеизложенные сведения фактически являются экспериментальным обоснованием модели «бесконечно длинных волокон».*

В заключительной части настоящего п. 3.2.1 сформулируем некоторые соображения в виде следующих двух примечаний.

**Примечание 3.4.** Экспериментальные исследования, результаты которых представлены на снимках Рис. 3.4 – 3.6, являются специально поставленными, можно сказать «модельного характера», которые позволили доказать возможность существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композитных материалов. При внимательном анализе снимков на Рис. 3.4 – 3.6 получаем, что представленная на них потеря устойчивости во внутренней структуре композитов *зафиксирована «в чистом виде» – без признаков явления разрушения*, так как на указанных снимках *визуально не фиксируется отделение матрицы (связующего) от волокон (наполнителя)*. Указанная ситуация представляется достаточно существенной, так как соответствующее внимание целесообразно уделить при анализе результатов экспериментальных исследований по разрушению композитных материалов при сжатии, который проводится в следующем пункте.

**Примечание 3.5.** Можно считать, что в настоящем параграфе 3 рассматриваются различные процессы в композитных материалах при сжатии, в основном, вдоль армирующих элементов (волокон) – вдоль направления преимущественного армирования применительно, в основном, к однонаправленным композитным материалам. Вышеуказанные композитные материалы в континуальном приближении моделируются ортотропными однородными материалами; к последним материалам также относятся композитные материалы с армированием во взаимно-перпендикулярных направлениях. Таким образом, применительно к модели ортотропных материалов рассматривается сжатие вдоль направлений осей симметрии свойств материала. Родственная ситуация также имеет место и при других видах нагружения; например, в сжатых зонах при изгибе различных элементов конструкций и в других случаях. При сжатии различных элементов конструкций (стержни, пластины и оболочки) вдоль направлений симметрии (геометрической формы и свойств материала) основным механизмом истощения несущей способности элементов конструкций является потеря устойчивости.

**3.2.2. Экспериментальные результаты по разрушению композитов при сжатии вдоль армирующих элементов.** Прежде всего, необходимо отметить, что в настоящем пункте рассматривается анализ экспериментальных исследований по разрушению композитных материалов *при сжатии*, когда уже произошло разрушение композита; таким образом, по существу, анализируются снимки уже разрушенного материала, начальный этап (старт) разрушения, естественно, не фиксируется в таких экспериментах. Следовательно, в настоящее время отсутствуют экспериментальные исследования разрушения композитов при сжатии, в которых фиксируется процесс разрушения, начиная с начального этапа (старта) разрушения, соответствующего потере устойчивости во внутренней структуре композита, и заканчивая заключительным этапом разрушения, соответствующего разделению рассматриваемого блока материала на отдельные части. Целесообразно отметить, что экспериментальные исследования разрушения вышеуказанного типа отсутствуют и применительно к большинству процессов разрушения для других материалов при других нагрузках.

Таким образом, в настоящем пункте рассматривается анализ характера разрушения композитных материалов *при сжатии*, ориентируясь на снимки (при различном увеличении), по существу, уже разрушенного композитного материала. Экспериментальные исследования относятся к сжатию композитных материалов вдоль осей симметрии свойств материала (вдоль армирующих элементов – вдоль волокон в случае однонаправленных композитов; вдоль направления преимущественного армирования в случае композита с армированием во взаимно-перпендикулярных направлениях; в перпендикулярном направлении к плоскости преимущественного армирования в случае композитов с армированием во взаимно-перпендикулярных направлениях). При анализе вышеотмеченных экспериментальных исследований рассматривается влияние специфических особенностей характера разрушения при изучаемом виде нагружения.

Прежде всего, необходимо отметить, что специфические особенности характера разрушения фиксируются не только при сжатии вдоль направления преимущественного армирования, но и при сжатии в перпендикулярном направлении. С целью иллюстрации вышеуказанной ситуации приведем результаты статьи [21], опубликованной в 1968 г.; так, на Рис. 3.7 приведен снимок разрушенного образца, соответствующий статье [21]. В [21] рассматривалось одноосное сжатие стеклотекстолита перпендикулярно к армирующим элементам (перпендикулярно к плоскости армирования). Из снимка на Рис. 3.7 видно, что разрушение произошло по плоскостям, перпендикулярным к направлению действия нагрузки, и материал разделился на части. Разрушение рассматриваемых композитов по плоскостям, почти перпендикулярным действию одноосной сжимающей нагрузки, является характерной особенностью *рассматриваемого вида разрушения*.

В работе [396], опубликованной в 1969 г., представлены результаты по исследованию характера разрушения образцов из однонаправленного стеклопластика при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон); эти результаты получены в Институте механики АН УССР (ныне – Институте механики им. С.П.Тимошенко НАНУ).

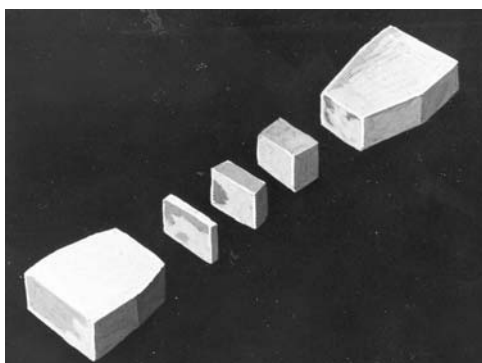


Рис. 3.7



Рис. 3.8

Цилиндрические образцы диаметром 10 и высотой 45 мм и призматические образцы размером 15x15x70 мм (Рис. 3.8) вырезались из стеклопластиковых пластин, изготовленных методом намотки на металлическую оправку с последующим отверждением под прессом при удельном давлении 1МПа. В качестве армирующих элементов (наполнителя) использовалась безщелочная стеклонить марки НС55/6 с замасливателем – парафиновой эмульсией, в качестве матрицы (связующего) использовалось эпоксиднофенольное связующее ЭФБ-4. Содержание связующего в стеклопластике по весу составляло 26,6% со степенью полимеризации 89,9%. Более подробно сведения по технологии изготовления образцов и по испытаниям образцов приведены в статье [396] и в монографии [57, т. 1, с. 189 – 191].

Необходимо только отметить следующую ситуацию. Чтобы избежать смятия торцов образца при сжатии на его концы надевались металлические обоймы, которые заливались эпоксидной смолой холодного отверждения; в результате длина открытой части образца составляла 1,5 – 2 линейного размера поперечного сечения. На снимке (Рис. 3.9) показан характер разрушения образца квадратного поперечного сечения и на снимке (Рис. 3.10) показан характер разрушения образца кругового поперечного сечения; после разрушения образцы легко разделялись на две, представленные на снимках части. Отметим, что разрушение, как правило, происходило возле металлической обоймы; отмеченная ситуация свидетельствует, вероятно, о возникновении в указанных местах первоначального локального разрушения, вызванного срезом крайних волокон.

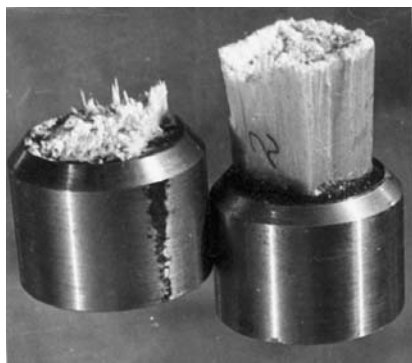


Рис. 3.9

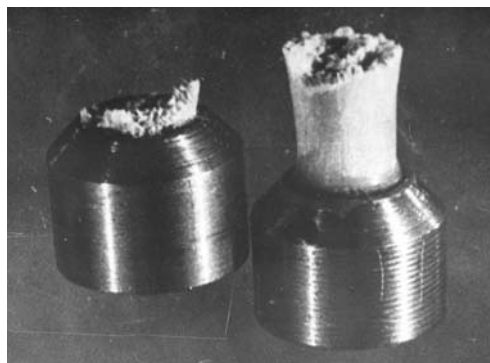


Рис. 3.10

Все же разрушение при сжатии образцов (Рис. 3.8) из однонаправленного стеклопластика при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон) распространяется по плоскостям, почти перпендикулярным к волокнам и к направлению сжимающей нагрузки.

Таким образом, как при сжатии однонаправленного стеклопластика вдоль волокон, так и при сжатии стеклотекстолита в перпендикулярном направлении к плоскостям армирования разрушение рассматриваемых образцов распространялось по плоскостям, почти перпендикулярным направлению действия одноосной сжимающей нагрузки. Вышеуказанная ситуация является *характерной особенностью рассматриваемого вида разрушения*; отметим, что в вышеотмеченных двух случаях (Рис. 3.7 – 3.10) сжатие осуществляется вдоль осей симметрии свойств материала. Дополнительные соображения, относящиеся к обсуждаемому процессу разрушения, представлены в монографии [57, т. 1, с. 191].

Целесообразно отметить, что результаты экспериментальных исследований, информация о которых представлена на Рис. 3.7 – 3.10, относятся к стеклопластикам с полимерной матрицей. Родственные экспериментальные исследования проводились и для других композитных материалов.

В статье [558], опубликованной в 1985 г., представлены результаты экспериментальных исследований для композитного материала с металлической матрицей, в котором наполнителем (армирующими элементами) являются однонаправленные волокна сапфира и связующим (матрицей) является алюминий. Экспериментальные исследования в [558] проводились при одноосном сжатии вдоль системы однонаправленных волокон сапфира (вдоль системы армирующих элементов). На Рис. 3.11, соответствующем [558], представлен снимок (при соответствующем увеличении) разрушений в рассматриваемом металлокомпозите (волокна сапфира + алюминий) при одноосном сжатии вдоль однонаправленных волокон сапфира. Разрушения локализованы в сравнительно узкой зоне; если провести плоскость по средней части разрушенной зоны на Рис. 3.11, то эта плоскость будет почти перпендикулярна направлению действия сжимающей нагрузки.

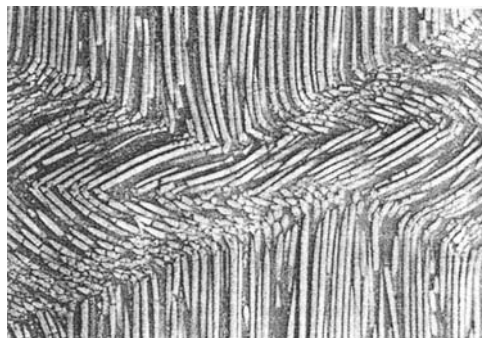


Рис. 3.11

Таким образом, при сжатии однонаправленных композитов вдоль армирующих элементов (вдоль волокон) как в случае стеклопластиков с полимерной матрицей (Рис. 3.8 – 3.10), так и в случае металлокомпозитов (Рис. 3.11) имеет место характерная особенность рассматриваемого вида разрушения – разрушение происходит или распространяется почти перпендикулярно к направлению действия сжимающей нагрузки. Все же рассматриваемый вид разрушения, очевидно, не должен возникать мгновенно во всей толще материала, хотя и его началом (стартом) является потеря устойчивости во внутренней структуре композита. Вполне естественно, что рассматриваемый вид разрушения может возникать возле какой-либо микронеоднородности (нарушений, в том числе и сплошности) во внутренней структуре; дальнейшее же распространение разрушения соответствует вышеизложенной характерной особенности. В связи с этим представляется интересным исследование закономерностей распространения разрушений возле макронеоднородности в композите при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон); ниже рассмотрим такого типа экспериментальные исследования.

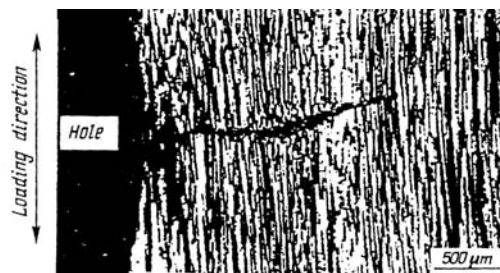


Рис. 3.12

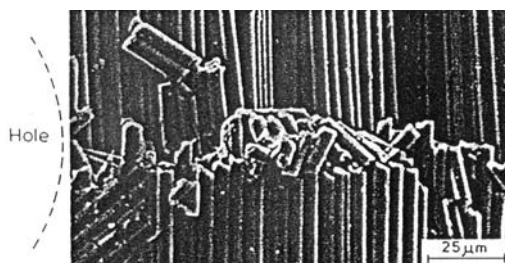


Рис. 3.13

В статье [362], опубликованной в 1991 г., представлены результаты экспериментальных исследований по распространению разрушений от кругового отверстия в пластине из композитного материала при сжатии в направлении армирования, результаты исследований показаны на снимках Рис. 3.12 – 3.15, соответствующих [362].

На Рис. 3.14 представлена расчетная схема с указанием направления осей координат; в соответствии с обозначениями на Рис. 3.14 сжатие осуществлялось вдоль вертикальной оси (вдоль оси  $Oy$ ). Пластины были изготовлены из слоистого композита, каждый из слоев которого представлял собой однонаправленный волокнистый материал (наполнитель – углеродные волокна, матрица – эпоксидная смола).

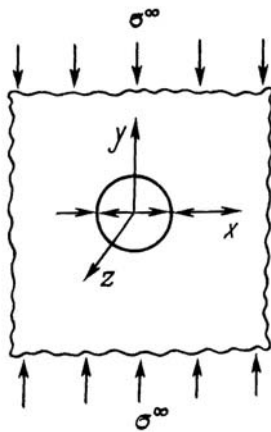


Рис. 3.14

Слой по толщине (вдоль оси  $0z$  на Рис. 3.14) укладывались таким образом, что оси  $0x$  и  $0y$  (Рис. 3.14) являлись осями симметрии свойств композитного слоистого материала (осуществлялась продольно-поперечная укладка слоев вдоль осей  $0x$  и  $0y$ ).

Следовательно, в континуальном приближении рассматриваемый материал можно считать ортотропным, где оси  $0x$ ,  $0y$  и  $0z$  (Рис. 3.14) являются осями симметрии свойств материала; при этом сжатие осуществлялось вдоль оси  $0y$  (вдоль оси симметрии свойств материала). При продольно-поперечной укладке в большинстве слоев однонаправленные волокна были ориентированы вдоль оси  $0y$  (Рис. 3.14); в связи с этим полученные слоистые пластины можно считать пластинами с преимущественным армированием вдоль оси  $0y$ , вдоль которой и осуществлялось сжатие.

При рассматриваемых экспериментальных исследованиях разрушение начиналось с двух точек на контуре отверстия по горизонтальной линии на Рис. 3.14, т.е. с точек с максимальным коэффициентом концентрации сжимающих макронапряжений (напряжений в рамках континуальной модели ортотропного материала). Дальнейшее развитие разрушения осуществлялось в виде формирования двух практически прямолинейных трещин, которые выходят с контура отверстия из точек с максимальным коэффициентом концентрации сжимающих напряжений (Рис. 3.14) и которые распространяются почти перпендикулярно к направлению действия сжимающей нагрузки; указанные трещины при этом заполнены разрушенным материалом. Информация о характере распространения трещин (разрушения) представлена на микрофотографиях на Рис. 3.12, 3.13 и 3.15, полученных на электронном микроскопе и соответствующих [558]; при этом на каждом снимке (Рис. 3.12, 3.13 и 3.15) в правом нижнем углу указан масштаб изображения (в микронах). Снимки на Рис. 3.12, 3.13 и 3.15 относятся к разрушению, распространяющемуся от правой точки на контуре отверстия на горизонтальной оси на Рис. 3.14. Так, на снимке Рис. 3.12 показана трещина, распространяющаяся от контура отверстия в направлении, которое почти перпендикулярно действию сжимающей нагрузки. На снимке Рис. 3.13 при значительно большем увеличении (почти в 20 раз) показана

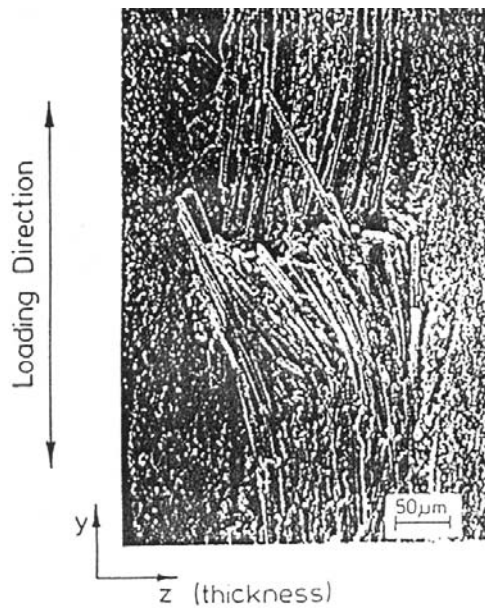


Рис. 3.15

разрушенная часть материала внутри распространяющейся узкой полосы, которую можно моделировать заполненной трещиной. Результаты на снимках (Рис. 3.12 и 3.13) соответствуют значениям сжимающей нагрузки порядка 95% от значений общей разрушающей нагрузки для всей пластины с отверстием. На снимке Рис. 3.15 представлена по толщине пластины (вдоль оси  $0z$  на Рис. 3.14) структура разрушенной части материала по краю отверстия; на этом снимке четко видны следующие виды разрушения: *разрушение (излом) волокон, изгиб разрушенных волокон в сторону отверстия и расслоение слоистого материала*. Результаты на Рис. 3.15 соответствуют значениям сжимающей нагрузки порядка 80 – 85% от значений общей разрушающей нагрузки для всей пластины с отверстием.

Целесообразно отметить, что многие авторы при анализе разрушений во внутренней структуре композитов (типа разрушений на снимках Рис. 3.8 – 3.13 и 3.15)



отмечают только microbuckling (микровыпучивание при локальной потере устойчивости) и delamination (расслоение слоистого композита). В действительности, как это видно на снимке Рис. 3.13, например, проявляется значительно больше механизмов разрушения в микроструктуре композитного материала при сжатии; дополнительно можно отметить следующие механизмы разрушения: *разрушение (излом) волокна в пределах трещины; изгиб разрушенного волокна; разрушение волокна за пределами трещины; отделение (отслоение) волокна от матрицы; разрушение матрицы и т.п.* Все же вышеотмеченные и подобные механизмы разрушения в микроструктуре композита при сжатии вдоль осей симметрии свойств проявляются лишь на последующих этапах разрушения; **первоначальный же этап разрушения (старт) возникает, по-видимому, в указанной ситуации только за счет потери устойчивости во внутренней структуре композита.**

Вышеуказанный старт разрушения, естественно, может возникать как возле локальных неоднородностей во внутренней структуре композита (при срезе, например, крайних волокон металлической обоймой на Рис. 3.8 – 3.10), так и возле макронеоднородностей (возле отверстия, например, на Рис. 3.12 – 3.15). **Все же возникшее локальное разрушение во всех снимках на Рис. 3.7 – 3.15 потом распространяется по плоскостям и поверхностям, которые почти перпендикулярные к направлению сжимающей нагрузки; как уже неоднократно отмечалось, вышеуказанная ситуация является характерной особенностью рассматриваемого вида разрушения.**

Результаты экспериментальных исследований, представленные на снимках Рис. 3.7 – 3.15, и им родственные были опубликованы во второй половине XX века в 1968 – 1991 гг.; подобного рода экспериментальные исследования продолжаются и в настоящем XXI веке, в качестве примера ниже рассмотрим экспериментальные результаты статьи [573] за 2004 г. В [573] приведены результаты экспериментальных исследований для случая сжатия вдоль слоев слоистого композитного материала, состоящего из 628 слоев; наличие столь большого числа слоев дает возможность ожидать, что полученные экспериментальные результаты как бы относятся к материалу, состоящему из «бесконечного» числа слоев. В связи с этим условно можно считать, что результаты [573] как бы относятся к явлениям, которые происходят во внутренней структуре слоистого композита и не зависят от граничных условий на граничных поверхностях всего пакета; все же полностью исключить влияние граничных условий, особенно граничных условий на торцах пакета, на все явления, по-видимому, нельзя. Поскольку в [573] сжатие осуществлялось вдоль слоев, то в континуальном приближении можно считать, что сжатие осуществлялось вдоль осей симметрии свойств ортотропного материала. На Рис. 3.16, соответствующем [573, с. 1074, Fig. 2], приведены формы слоев, которые они приобретают при соответствующем значении сжимающей нагрузки. Из анализа результатов, представленных на Рис. 3.16, следует, что появляются как бы узкие полосы разрушенного материала (условно на Рис. 3.16 показанные наклонными сплошными линиями); причем указанные полосы как бы периодически повторяются вдоль горизонтальной, вдоль которой осуществлялось одноосное сжатие. Также следует отметить, что узкие полосы разрушенного материала наклонены по отношению к вертикальной оси на углы в  $19^\circ$ ;  $18,5^\circ$  и  $18^\circ$ , т.е. они мало отличаются от перпендикуляра к горизонтальной оси. Таким образом, и результаты экспериментальных исследований [573], представленные на Рис. 3.16, подтверждают вывод, сформулированный на основе результатов экспериментальных исследований, которые представлены на Рис. 3.7 – 3.15. Обсуждаемый вывод заключается в том, что **при одноосном сжатии разрушение распространяется по плоскостям и поверхностям, которые почти перпендикулярные к направлению сжимающей нагрузки; как уже неоднократно отмечалось, вышеуказанная ситуация является характерной особенностью рассматриваемого вида разрушения.**

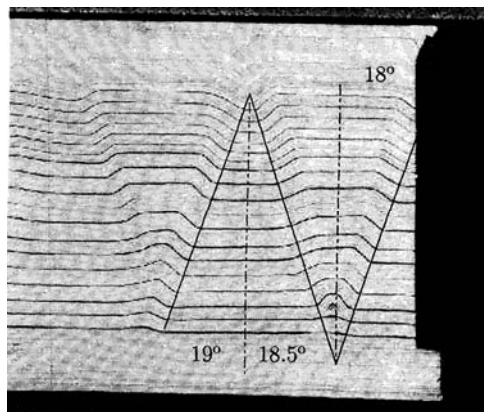


Рис. 3.16

Вышеизложенными сведениями, соображениями и выводами ограничимся при анализе результатов экспериментальных исследований, относящихся к разрушению композитных материалов при сжатии вдоль армирующих элементов (или, в более широком смысле, при сжатии вдоль осей симметрии свойств композитов), в соответствии с конкретной целью, которая сформулирована во вводной части п. 3.2.

**3.2.3. Об исследовании явления «kinking».** Дополнительно к пп. 3.2.1 и 3.2.2 в настоящем пункте (п. 3.2.3) в весьма краткой форме приводятся сведения об исследовании явления «kinking», так как обсуждаемое исследование возникло в результате анализа экспериментальных результатов при сжатии композитных материалов.

Первоначальное явление «kinking» рассматривалось в статье [240] за 1983 г.; в последующие годы концепция «kinking» стала достаточно популярной, особенно среди англоязычных исследователей, и в рамках обсуждаемой концепции уже опубликованы многочисленные статьи, среди которых целесообразно указать обзор [274] за 1997 г., опубликованный в широко известной серии изданий «*Advances in Applied Mechanics*», которая издается в США.

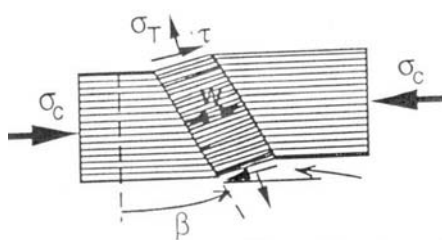


Рис. 3.17

В общих чертах явление «kinking» заключается в появлении (при сжатии композита вдоль армирующих элементов) достаточно узких полос «kinking» (kink band) уже разрушенного материала; схематически явление «kinking» показано на Рис. 3.17, который входит в большинство публикаций по исследованию обсуждаемого явления, где через  $W$  обозначена ширина зоны «kinking».

Прежде всего, целесообразно отметить, что при проведении исследований зона «kinking» анализируется на основе *весьма приближенных расчетной схемы и соотношений*.

Автор настоящей обзорной статьи также принимал участие в обсуждении (в весьма краткой форме) исследований по явлению «kinking», что нашло отражение в статье [383] за 2006 г., монографии [57] (т. 1, с. 73 – 74) за 2008 г., монографии [64] (с. 94 – 96) за 2015 г. и обзора [65] (с. 46 – 47) за 2016 г.; ниже также в весьма краткой форме изложены соображения и выводы, приведенные в вышеуказанных публикациях, при этом устранены замеченные опечатки и неточности.

Прежде всего, необходимо отметить, что схема разрушения, представленная на Рис. 3.17, *относится к уже разрушенному образцу*; в связи с этим при обсуждаемом подходе начало (старт) разрушения не определяется. Таким образом, нельзя исключать, что начало (старт) процесса разрушения, который на заключительном этапе процесса разрушения привел к появлению полосы «kinking», определялся потерей устойчивости во внутренней структуре композита в соответствии с **Общей концепцией**, изложенной в п. 3.1.1 настоящей обзорной статьи. Вышеизложенная ситуация дает определенное основание отнести обсуждаемое исследование явления «kinking» к **первому направлению (весьма приближенные подходы)** (п. 3.1.2 настоящей обзорной статьи). Также следует заметить, что для явления «kinking» при сжатии вдоль горизонтальной оси (Рис. 3.17) наблюдается смещение вдоль вертикальной оси частей материала, расположенных слева и справа от полосы «kinking» (Рис. 3.17); отмеченная ситуация, по-видимому, является характерной для обсуждаемого явления.

Следуя вышеуказанным публикациям [383, 57, 64, 65], ниже приведем три соображения, относящихся к явлению «kinking».

1. Явление «kinking» в образцах (Рис. 3.17) может возникать, если при сжатии вдоль горизонтальной оси граничные условия на торцах образца позволяют возникать смещениям вдоль вертикальной оси.

2. При внутреннем разрушении (модель «бесконечного» материала) явление «kinking», по-видимому, *не может* возникать в виде отдельной изолированной полосы «kinking» (в виде отдельной kink band) при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала. Внутри композита при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала явление «kinking» может существовать лишь в виде чередующихся полос «kinking»,

чтобы возникающее при этом возмущение напряженно-деформированного состояния было самобалансированным.

3. Исследование явления «kinking» не может, по-видимому, однозначно установить механизмы, определяющие начало (старт) процесса разрушения. Одним из механизмов, определяющих начало (старт) процесса разрушения, может быть, в этом случае и механизм потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита в соответствии с **Общей концепцией** (п. 3.1.1), который может быть достаточно строго исследован в рамках **второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ)** (п. 3.1.3) настоящей обзорной статьи.

Как уже отмечалось в вышеуказанных публикациях, приведенные соображения лишь отражают точку зрения авторов этих публикаций; в связи с этим возможны и другие соображения, отражающие точки зрения других авторов.

В определенном смысле подтверждением второго из вышеизложенных соображений являются результаты экспериментальных исследований, которые опубликованы в статье [573] и представлены на Рис. 3.17; результаты экспериментальных исследований [573] в весьма краткой форме описаны и обсуждены в тексте настоящей статьи возле Рис. 3.17.

Учитывая дополнительный характер п. 3.2.3, вышеизложенными сведениями в пп. 3.2.1 – 3.2.3 ограничимся при обсуждении результатов экспериментальных исследований по разрушению композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала.

**3.3. Основные результаты второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ).** Краткая характеристика **второго направления** теоретических исследований по построению механики разрушения композитов при сжатии вдоль направления симметрии свойств материала представлена в п. 3.1.3. Можно сформулировать основные характерные особенности исследований в рамках **второго направления** следующим образом.

1. Не привлекаются *приближенные расчетные схемы и допущения* (типа указанных в п. 3.1.2), свойственные первому направлению.

2. Исследования проводятся в трехмерной постановке на основе ТЛТУДТ (в краткой форме аппарат изложен в §2), что приводит к результатам, точность которых соответствует другим направлениям механики деформируемых тел.

3. С учетом вышеуказанной особенности «2» результаты **второго направления** можно использовать для оценки более приближенных теорий, в том числе и результатов **первого направления**.

4. Основы механики приповерхностного разрушения разработаны только в рамках **второго направления**.

5. Результаты второго направления строго и последовательно определяют начало (старт) процесса разрушения для композитов при сжатии как при внутреннем разрушении, так и в случае приповерхностного разрушения.

**3.3.1. Сведения вводного характера.** В п. 1.3 настоящей статьи при описании **Проблемы 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*) отмечалось, что результаты в рамках **второго** (подхода) направления принадлежат, в основном, автору статьи и его ученикам; целесообразно отметить, что первыми статьями во **втором** направлении (подходе) были статьи [25, 26] за 1969 г. Перечень публикаций (монографии, статьи и доклады на международных конференциях), которые вошли в список литературы к настоящей обзорной статье и которые подготовлены на основании исследований отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, приведен во вводной части §3 настоящей обзорной статьи.

В настоящем п. 3.3 ниже излагаются основные результаты, полученные по **второму** направлению, которые первоначально были представлены в вышеуказанных статьях и на международных конференциях и потом вошли в вышеуказанные и другие монографии. Обсуждаемые исследования проведены для упругих и упруго-пластических моделей сжимаемых и несжимаемых изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов (в случае трансверсально-изотропных и ортотропных материалов). Результаты общего характера получены в случае упругих моделей – для гиперупругих

материалов с произвольной структурой упругого потенциала и в случае упруго-пластических моделей – для материалов с определяющими уравнениями достаточно общего вида; результаты конкретного характера получены для упругих и упруго-пластических моделей материалов с определяющими соотношениями простейшей структуры. Для упруго-пластических материалов (применительно к связующему и наполнителю) применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения, изложенная в п. 2.3.2 настоящей статьи; в связи с этим исследование проводится в единой общей форме для упругих и упруго-пластических материалов.

Исследование явления потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) и в приповерхностных слоях (приповерхностной неустойчивости) для композитных материалов проводится при действии внешней «мертвой» нагрузки, что характерно практически для всех публикаций по механике разрушения. Применительно к исследованиям второго направления в случае упругих моделей и упруго-пластических моделей (с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения) *строго доказано выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования устойчивости* (п. 2.4.2 – первый результат) и, таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к задачам на собственные значения, т.е. применяется метод Эйлера. Вышеуказанное доказательство также относится к приповерхностной неустойчивости при сжатии вдоль армирующих элементов и приповерхностной неустойчивости возле нагруженных торцов. **Таким образом, исследования в рамках второго подхода полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач.** Вышеформулированные вывод, доказательство и подход имеют место для упругих и упруго-пластических моделей (с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения) и не имеют места для моделей с реологическими свойствами.

**Примечание 3.6.** В настоящую обзорную статью (рассматриваемый п. 3.3. Основные результаты второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ)) не включены результаты для моделей с реологическими свойствами по следующим соображениям.

1. Как отмечено в **Примечании 2.9**, для тел с реологическими свойствами отсутствует *общий метод и строгий критерий*, позволяющие проводить исследования с такой степенью общности и строгости, как и для упругих и упруго-пластических тел.

2. В настоящее время уже полученные результаты на основе трехмерных уравнений для тел с реологическими свойствами построены *статическим методом* с привлечением одного из *приближенных* критериев устойчивости, указанных в п. 2.3.3; в связи с приближенностью критерия не ясны общность и достоверность указанных результатов.

3. Вышеформулированные (перед настоящим Примечанием 3.6) вывод, доказательство и подход не имеют места для тел с реологическими свойствами.

**Примечание 3.7.** Результаты второго направления предназначены для композитных материалов с полимерной и металлической матрицами. Для композитов с полимерной матрицей анализируется хрупкое разрушение; при этом матрица моделируется упругим телом, что характерно для композитов при умеренных температурах и при сравнительно недлительном действии нагрузки, так как в этом случае не учитываются эффекты вязкости. Для композитов с металлической матрицей анализируется *пластическое разрушение* (с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения); при этом рассматривается этап нагружения, когда **вся матрица находится в состоянии пластического деформирования**.

**Примечание 3.8.** В рамках второго направления при исследовании потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита и приповерхностной потери устойчивости (приповерхностная неустойчивость) композита *предусматривается одинаковое укорочение наполнителя и матрицы вдоль направления сжатия* (вдоль волокон на Рис. 3.1 для однонаправленного волокнистого композита, вдоль слоев на Рис. 3.2 для слоистого композита). Вышеуказанное условие является, по-видимому, единственно возможным условием, позволяющим анализировать явления внутри композитного материала. При экспериментальных исследованиях

вышеуказанные условия выполняются при сжатии достаточно жесткими дисками (вдоль вертикальной оси на Рис. 3.2), когда вдоль горизонтальной оси (на торцах на Рис. 3.2) обеспечивается минимальное трение. При теоретических исследованиях вдоль вертикальной оси задается одинаковое перемещение в наполнителе и матрице, а вдоль горизонтальной оси задаются нулевые касательные напряжения.

Учитывая вышеизложенные в настоящем п. 3.3.1 сведения вводного характера, ниже в последующих пунктах приведем в краткой форме основные результаты, полученные в рамках второго направления и изложенные в публикациях, которые указаны во вводной части §3 настоящей обзорной статьи; дополнительно отметим, что обсуждаемые основные результаты получены автором и его учениками в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. В рамках второго направления развиты: континуальная теория разрушения композитов, основанная на модели однородной среды с усредненными параметрами и математическом аппарате ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи); трехмерная теория разрушения волокнистых однонаправленных и слоистых композитов, основанная на модели кусочно-однородной среды при точных граничных условиях на границе раздела (interface) и математическом аппарате ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи). При изложении обсуждаемых результатов существенно используются монографии [54, 57] и привлекается опыт сокращенного изложения этих результатов в обзорной статье [65] (стр. 27 – 45) за 2016 г.

**3.3.2. Континуальная теория разрушения.** В настоящем пункте 3.3.2 в краткой форме рассмотрим основные элементы континуальной теории разрушения композитов при сжатии, которая основана на континуальной модели композитов с усредненными параметрами и ТЛТУДТ, применительно к хрупкому и пластическому разрушению с учетом **Примечания 3.7** для пластического разрушения. Основные результаты получены для *внутреннего разрушения* (потеря устойчивости во внутренней структуре, внутренняя неустойчивость) и *приповерхностного разрушения* (приповерхностная потеря устойчивости во внутренней структуре, приповерхностная неустойчивость).

**3.3.2.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутреннего разрушения следует рассматривать композит, который занимает бесконечное пространство; само же разрушение и его распространение описывается системой статических уравнений ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи), в незагруженном состоянии указанная система уравнений для сжимаемого материала является системой уравнений эллиптического типа. Сжимаемость композита в континуальном приближении обеспечивается сжимаемостью наполнителя или связующего.

В силу рассмотрения бесконечного материала при анализе внутреннего разрушения исследуется как бы потеря устойчивости в микрообъеме. Таким образом, при рассматриваемом механизме разрушения изменения в микрообъеме должны каким-то образом проявляться и в макрообъеме, причем в последнем случае они не должны иметь локального характера, так как только в этом случае будет наблюдаться разрушение всего образца (макроразрушение). Указанное изменение в микрообъеме должно проявляться в свойствах, не зависящих от граничных условий, так как исследуется процесс разрушения материала (внутреннее разрушение соответствует «бесконечному» материалу), а не влияние захватов испытательных машин, формы поперечного сечения и т.д. Очевидно, что изменения в макрообъеме определяются возмущениями перемещений, которые описываются системой статических уравнений ТЛТУДТ (§2).

Таким образом, можно считать, что начало разрушения соответствует появлению решений системы статических уравнений ТЛТУДТ (§2) для сжимаемого материала, которые не зависят от граничных условий (рассматривается случай бесконечного материала) и не имеют локального характера; при этом, безусловно, следует отбросить решения типа однородных напряженно-деформированных состояний. Вышеприведенное условие для системы статических уравнений ТЛТУДТ (§2) может выполняться лишь в том случае, когда указанная система уравнений становится системой гиперболического типа.

Учитывая вышеизложенное, **Основную концепцию** построения континуальной теории внутреннего разрушения композитных материалов при сжатии можно сформулировать следующим образом.

**Основная концепция.** Начало процесса разрушения можно отождествлять с тем моментом в истории нагружения, когда система статических уравнений ТЛУДТ (для сжимаемых материалов) из эллиптической системы переходит в гиперболическую, т.е. указанная система теряет свойство эллиптичности. Теоретические пределы прочности при этом определяются из того же условия. Разрушение композитных материалов при сжатии происходит вдоль характеристических плоскостей и поверхностей.

Дополнительные сведения по излагаемому вопросу представлены в монографии [57, т. 1, глава 2]; ниже рассмотрим лишь отдельные результаты.

Следуя **Основной концепции**, введено понятие о поверхности  $\Pi_T$  – поверхности теоретических пределов прочности при сжатии, которое вводится в трехмерном пространстве сжимающих главных напряжений тензора напряжений  $((-\sigma_{11}^0), (-\sigma_{22}^0),$

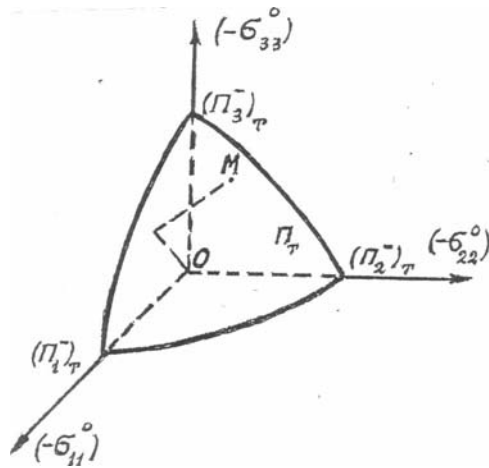


Рис. 3.18

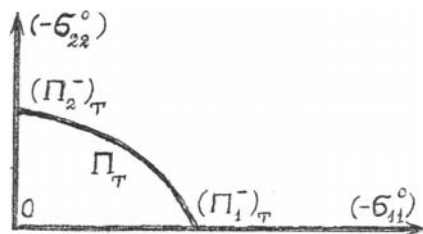


Рис. 3.19

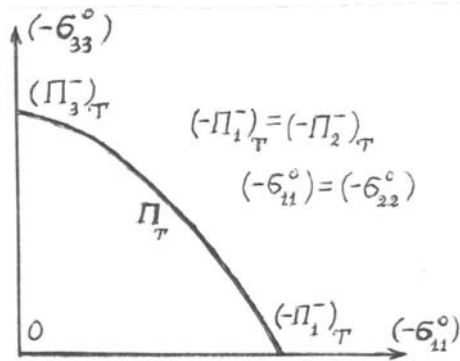


Рис. 3.20

$(-\sigma_{33}^0)$ ). Схематически  $\Pi_T$  – поверхности теоретических пределов прочности при сжатии представлены на Рис. 3.18 – 3.20: Рис. 3.18 соответствует общему случаю; Рис. 3.19 соответствует осесимметричному нагружению; Рис. 3.20 соответствует плоской задаче. На Рис. 3.18 – 3.20 и ниже введены обозначения  $(\Pi_j^-)_T$  – теоретические пределы прочности при одноосном сжатии вдоль соответствующих осей. На Рис. 3.19, относящемся к осесимметричному нагружению, представлено меридиональное сечение поверхности теоретических пределов прочности на сжатие, поскольку в этом случае поверхность  $\Pi_T$  представляет собой поверхность вращения. В трехмерном пространстве  $((-\sigma_{11}^0), (-\sigma_{22}^0), (-\sigma_{33}^0))$  на Рис. 3.18 траектория нагружения показана штриховой линией  $OM$ . Если в истории нагружения точка  $M$  (Рис. 3.18) впервые попадает на поверхность  $\Pi_T$ , то достигается теоретический предел прочности при соответствующем трехосном сжатии.

В случае хрупкого разрушения (композиты с полимерной матрицей) поверхность  $\Pi_T$  построена в явном виде для осесимметричной пространственной (Рис. 3.21) и плоской (Рис. 3.22) задач.

На Рис. 3.21 для хрупкого разрушения, как и на Рис. 3.19 для общего случая, представлено (применительно к осесимметричному нагружению) меридиональное сечение поверхности теоретических пределов прочности в виде поверхности вращения. На Рис. 3.21 и 3.22 заштрихованные области представляют собой области эллиптичности статической системы уравнений ТЛУДТ (§2); при измене-

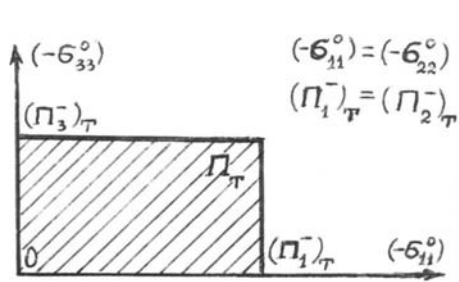


Рис. 3.21

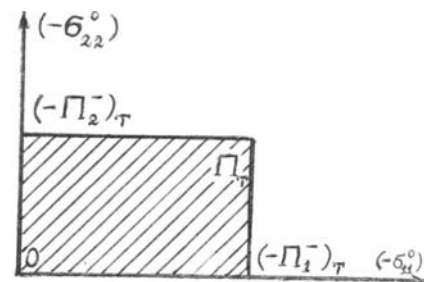


Рис. 3.22

нии параметров нагружения внутри области эллиптичности разрушение при соответствующих значениях параметров нагружения *не возникает*, дополнительные сведения представлены в монографии [57] (т. 1, стр. 182 – 185).

При пластическом разрушении для построения соответствующих поверхностей теоретических пределов прочности на сжатие необходимо проводить дополнительные исследования с привлечением компьютерных методов.

Также в случае хрупкого разрушения строго доказано, что разрушение распространяется по плоскостям, перпендикулярным к действию сжимающих нагрузок; экспериментальным подтверждением вышеуказанной теоретической закономерности являются результаты на снимках Рис. 3.7 – 3.12 при одноосном сжатии.

Ниже приведем сведения о сравнении величин теоретических пределов прочности на сжатие и теоретических значений предельных укорочений, вычисленных в рамках континуальной теории внутреннего разрушения (п. 3.3.2.1), со значениями соответствующих величин, определенных из экспериментальных исследований; при этом будем ориентироваться на сведения из монографии [57, т. 1, глава 2], представленные отдельно для хрупкого и пластического разрушения. Исследование проведем для одноосного сжатия вдоль волокон (условно вдоль оси  $0x_3$ ) однонаправленного волокнистого композита (Рис. 3.1), который в плоскости поперечного сечения ( $x_3 = \text{const}$ ) не имеет четко выраженной структуры в расположении волокон; в связи с этим в континуальном приближении такой композит моделируется трансверсально-изотропным материалом, ось изотропии которого направлена вдоль волокон (вдоль оси  $0x_3$ ). Индексами « $a$ » и « $m$ » ниже и во всей статье будем отмечать все величины, относящиеся к армирующим элементам (наполнителю) и к матрице (связующему).

**Хрупкое разрушение.** Вышеуказанное сравнение проведем для однонаправленных волокнистых композитов с полимерной матрицей в виде эпоксидной смолы в случае весьма жестких волокон, для модулей Юнга которых имеет место

$$E_a \gg E_m. \quad (3.5)$$

Также введем следующие обозначения:  $(\Pi_3^-)_{\Gamma}$  – теоретический предел прочности при сжатии вдоль одной оси (в данном случае – вдоль оси  $0x_3$ );  $(\Pi_3^-)_{\text{эк}}$  – экспериментальный предел прочности при одноосном сжатии вдоль этой же оси. В случае (3.5) для композита с 50%-ой концентрацией (долей) однонаправленных волокон ( $S_a = S_m = 0,5$ ) теоретический предел прочности на сжатие (в рамках континуальной теории разрушения) приведен в монографии [57, т. 1, с. 192]

$$(\Pi_3^-)_{\Gamma} = 2,09 - 3,00 \text{ ГПа} \quad (3.6)$$

с учетом разброса свойств эпоксидной смолы, указанного в Табл. 0.1 [57] (т. 1, стр. 67). В справочном издании [153], опубликованном на русском языке в 1981 г. (на английском языке это издание [492] опубликовано в 1978 г.), на стр. 656 [153] представлены экспериментальные пределы прочности для различных композитов (различные

волокна при  $S_a = S_m$ ); эти результаты представлены также в [57, т. 1, с. 192] и имеют вид

$$(P_3^-)_{эк} = \begin{cases} 3,10 \text{ ГПа} - \text{в случае волокон бора;} \\ 1,38 \text{ ГПа} - \text{в случае высокопрочных углеродных волокон;} \\ 1,03 \text{ ГПа} - \text{в случае высокомодульных углеродных волокон.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Из сравнения результатов (3.6) и (3.7) следует, что применительно к рассматриваемым композитам с полимерной матрицей наблюдается неплохое соответствие между теоретическими пределами прочности на сжатие и экспериментальными пределами прочности при одноосном сжатии.

**Пластическое разрушение.** Вышеуказанное сравнение проведем для однонаправленного волокнистого материала с металлической матрицей, используя экспериментальные результаты статьи [548]; в [548] приведены экспериментальные результаты для металлокомпозита (наполнитель – проволока из нержавеющей стали, матрица – чистый алюминий). Теоретический предел прочности и теоретическое значение предельного укорочения при одноосном сжатии (в рамках континуальной теории внутреннего разрушения, рассматриваемой в настоящем п. 3.3.2.1) определены в первом приближении в монографии [57, т. 1, глава 2, с. 193 – 202], где наполнитель моделировался линейным упругим изотропным сжимаемым телом и матрица моделировалась упруго-пластическим изотропным несжимаемым телом со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций в следующем виде:

$$\sigma_u^m = A_m \varepsilon_u^{m k_m}; \quad A_m, k_m - \text{const.} \quad (3.8)$$

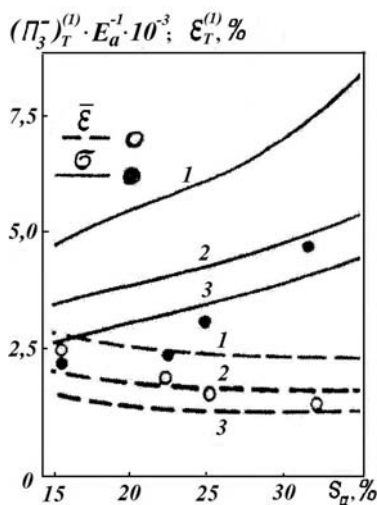


Рис. 3.23

для величин  $A_m$  и  $k_m$  в (3.8):

$$\begin{aligned} 1 &\sim A_m = 100 \text{ МПа}, k_m = 0,1; \\ 2 &\sim A_m = 100 \text{ МПа}, k_m = 0,25; \\ 3 &\sim A_m = 68 \text{ МПа}, k_m = 0,25. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В монографии [57, т. 1, глава 2, с. 207] указаны авторы, в публикациях которых применялись аппроксимации (1.10).

Учитывая вышеизложенное, на Рис. 3.23 представлены зависимости от  $S_a$  (концентрации наполнителя, в данном случае – проволоки из нержавеющей стали) для



следующих величин: сплошными линиями для величины  $(\Pi_3^-)_T^{(1)} \cdot E_a^{-1} \cdot 10^{-3}$  – безразмерного нормированного значения теоретического предела прочности при сжатии вдоль одной оси, вычисленного в первом приближении; штриховыми линиями для величины  $\varepsilon_T^{(1)}$  в % – теоретического значения предельного укорочения, вычисленного в первом приближении.

При этом на Рис. 3.23 кривые, соответствующие аппроксимациям (3.9), отмечены значками 1, 2 и 3. Экспериментальные результаты [548] представлены на Рис. 3.23: темными кружочками – для экспериментального предела прочности и светлыми кружочками – для экспериментального значения предельного укорочения; заметим, что в [548] применялась аппроксимация 2.

Из анализа результатов, представленных на Рис. 3.23, следует, что удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных результатов наблюдается для пределов прочности при применении аппроксимации 3 из (3.9) и для предельных укорочений при применении аппроксимации 2 из (3.9).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении механики внутреннего разрушения в рамках рассматриваемой континуальной теории разрушения: как уже неоднократно отмечалось, достаточно подробные сведения по этому вопросу приведены в монографии [57, т. 1, глава 2].

**3.3.2.2. Приповерхностное разрушение.** Континуальная теория приповерхностного разрушения построена на исследовании приповерхностной формы потери устойчивости, перемещения и напряжения в которой затухают при удалении от граничной поверхности; при этом при исследовании применяются основные соотношения ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи). В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 3.3.1, в рассматриваемом случае (п. 3.3.2.2) приходим к статическим задачам ТЛТУДТ (§2) для полуограниченных областей (к задачам на собственные значения, в которых собственные функции затухают при удалении от граничной поверхности).

В настоящем п. 3.3.2.2 рассматривается обсуждаемая континуальная теория приповерхностного разрушения, соответствующего приповерхностной потере устойчивости при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя). Континуальная теория приповерхностного разрушения, относящаяся к этому типу, достаточно подробно изложена в монографии [57, т. 1, глава 2, §2, стр. 209 – 224]. Для примера, расчетная схема применительно к плоской задаче представлена на Рис. 3.24, где  $x_2 = 0$  является свободной поверхностью и армирующие элементы (наполнитель) направлены вдоль оси  $0x_1$ . Можно считать, что в монографиях [54, 57] достаточно подробно изложена обсуждаемая континуальная теория приповерхностного разрушения композита при сжатии, соответствующая приповерхностной потере устойчивости (возле свободной поверхности) при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя); в связи с этим ниже в настоящей статье этот вопрос подробно рассматриваться не будет. Обсуждаемые результаты в монографиях [54, 57] представлены для композитов с полимерной матрицей (хрупкое разрушение) и для композитов с металлической матрицей (пластическое разрушение); при этом при исследовании пластического разрушения учитывается **Примечание 3.7.** Дополнительно следует отметить, что в монографии [57] (т. 1, глава 2, §2) также изложена двухуровневая континуальная механика разрушения композитов при сжатии, когда трещины выходят из контура отверстия.

В заключение к п. 3.3.2 лишь отметим, что в монографиях [54, 57] для композитов с полимерной и металлической матрицами в рамках континуальной теории разрушения при сжатии *строго доказано* выполнение следующего условия

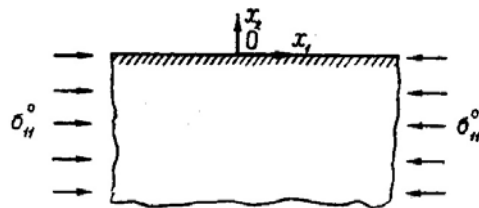


Рис. 3.24

$$(\Pi_3^-)_T^{\Pi} < (\Pi_3^-)_T. \quad (3.10)$$

В (3.10) дополнительно к обозначению  $(\Pi_3^-)_T$  – (теоретический предел прочности при одноосном сжатии в случае внутреннего разрушения) введено обозначение:  $(\Pi_3^-)_T^{\Pi}$  – (теоретический предел прочности при одноосном сжатии вдоль свободной поверхности в случае приповерхностного разрушения). Условие (3.10) соответствует обычно принимаемому положению – разрушение материала начинается с поверхности материала.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении приповерхностного разрушения в рамках рассматриваемой континуальной теории разрушения композитов при сжатии.

**Примечание 3.9.** Необходимо отметить, что в п. 3.3.2.1 применительно к внутреннему разрушению представлено достаточно хорошее совпадение пределов прочности при одноосном сжатии, полученных при экспериментальных исследованиях, с соответствующими теоретическими пределами прочности рассматриваемой континуальной теории разрушения как применительно к хрупкому разрушению (композиты с полимерной матрицей), так и применительно к пластическому разрушению (композиты с металлической матрицей). Отмеченное хорошее совпадение, *по-видимому, объясняется тем*, что в анализируемых примерах рассматривались композиты, в которых материалы наполнителя и матрицы *существенно отличаются по жесткости* (выполняются условия (3.5)); для других композитов, *по-видимому*, не следует ожидать такого хорошего совпадения. В целом же целесообразно отметить, что *рассматриваемая континуальная теория разрушения является наиболее негромоздкой* и удобной при исследованиях по сравнению с *любыми* теориями, построенными в рамках модели кусочно-однородной среды, как в *первом* направлении, так и во *втором* направлении; в то же время континуальная теория в ряде случаев дает результаты, соответствующие экспериментам. В историческом аспекте, *по-видимому, первой публикацией* по построению рассматриваемой континуальной теории разрушения была *статья [26]*, опубликованная в 1969 г.

Вышеизложенной в п. 3.3.2 информацией ограничимся при рассмотрении континуальной теории разрушения композитных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала; обсуждаемая теория построена на основании модели однородного материала (среды, тела) с усредненными свойствами (параметрами) и ТЛТУДТ, математический аппарат которой в краткой форме изложен в §2 настоящей обзорной статьи.

**3.3.3. Слоистые композиты. Модель кусочно-однородной среды.** В настоящем пункте (п. 3.3.3) в весьма краткой форме приведена информация о механике разрушения при сжатии слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами, которая построена на основе модели кусочно-однородной среды. В этом случае отдельно для материалов каждого слоя наполнителя и связующего принимаются основные соотношения ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) и на границах раздела (interface) принимаются определенные условия непрерывности напряжений и перемещений. Исследования проводятся для хрупкого и пластического разрушения; в последнем случае предварительно принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 3.3.1, в рассматриваемом случае исследований приходим к анализу статических уравнений и соответствующих граничных условий ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) для кусочно-однородной среды (задачи на собственные значения). Основные результаты получены для потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость, *внутреннее* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [57, т. 1, глава 3], и для приповерхностной потери устойчивости (*приповерхностное* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [57, т. 1, глава 5]; частично основные результаты также представлены в монографиях [30, 31, 54], а также в весьма краткой форме в обзорной статье [65]. Предварительно обсуждаемые результаты для слоистых композитов

тов были опубликованы в статьях, основные из которых вошли в список литературы к настоящей обзорной статье и вошли в перечень основных статей, относящихся ко всему **второму направлению** и приведенному во вводной части §3 настоящей обзорной статьи; дополнительную информацию об опубликованных статьях можно получить из списков литературы к монографиям [30, 31, 54, 57]. Основные результаты для слоистых композитов в виде характеристических определителей для внутреннего и приповерхностного разрушения изложены в единой общей форме для **теорем 1, 2 и 3** в соответствии с терминологией п. 2.2 и вводной части п. 2.3.

Ниже в настоящем п. 3.3.3 обсуждаются в весьма краткой форме лишь основные результаты по механике разрушения композитов при сжатии, полученные в рамках модели кусочно-однородной среды и ТЛТУДТ, основы математического аппарата которой в краткой форме изложены в §2 настоящей обзорной статьи; при этом учитывается краткое изложение вопроса в обзорной статье [65].

**3.3.3.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутреннего разрушения (внутренней неустойчивости) рассматривается слоистый композит, который занимает бесконечное пространство (Рис. 3.2), применяются общие решения статических уравнений ТЛТУДТ (§2) и анализ проводится в соответствии с процедурой, изложенной в п. 3.1.1, с учетом подхода, соответствующего Рис. 3.3. Необходимо отметить, что в настоящем пункте (п. 3.3.3.1) приводится информация только о результатах, полученных для композитов, в поверхностях раздела (interface) которых отсутствуют дефекты (на поверхностях раздела выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений).

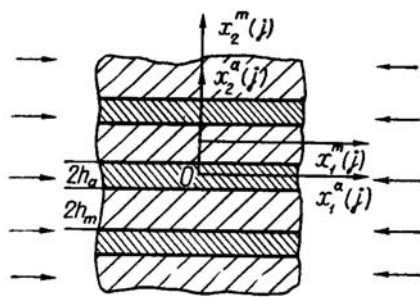


Рис. 3.25

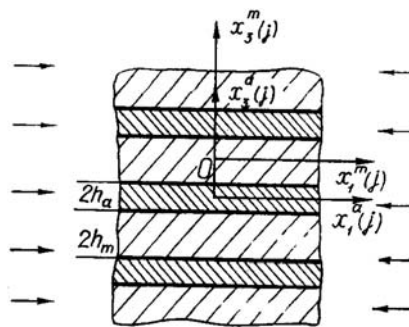


Рис. 3.26

Исследованы плоские и пространственные задачи для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами, состоящих из слоев наполнителя (одинаковой толщины) и слоев матрицы (одинаковой толщины), которые периодически чередуются вдоль оси  $0x_2$  (Рис. 3.25) в случае плоских задач и вдоль оси  $0x_3$  (Рис. 3.26) в случае пространственных задач; в случае пространственных задач Рис. 3.26 соответствует плоскости в сечении  $x_2 = 0$ . На Рис. 3.25 и 3.26 индексом «a» отмечены все величины, относящиеся к армирующим элементам (наполнителю, слоям), и индексом «m» отмечены все величины, относящиеся к матрице (связующему, слоям). В случае плоских задач рассматриваются слои ортотропных материалов (в частном случае – изотропных материалов), в случае пространственных задач рассматриваются слои трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии  $x_3 = \text{const}$  (Рис. 3.26) (в частном случае – изотропные материалы); при этом характеристические определители во всех случаях получены для материалов с определяющими уравнениями достаточно общей структуры. Учитывая периодичность структуры вдоль вертикальной оси на Рис. 3.25 и 3.26 с периодом  $2(h_a + h_m)$ , анализировались моды потери устойчивости с периодом вдоль вертикальной оси, кратным периоду структуры, т.е. с периодом  $T_k$ ,

$$T_k = 2k(h_a + h_m); k = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

**Общий метод решения** для плоских (Рис. 3.25) и пространственных (Рис. 3.26) задач о *внутреннем разрушении* слоистых композитов заключается в следующем. Применяются статические уравнения ТЛТУДТ, что строго обосновано (п. 3.3.1); используются общие решения ТЛТУДТ (пп. 2.5.1 и 2.5.2). Рассматриваются следующие формы потери устойчивости: вдоль линий действия сжимающих нагрузок (вдоль  $0x_1$  для плоских задач, Рис. 3.25; вдоль  $0x_1$  и  $0x_2$  для пространственных задач, Рис. 3.26) выбираются в виде тригонометрических функций с неизвестной длиной волны формы потери устойчивости; перпендикулярно к слоям на основании общих решений ТЛТУДТ строятся решения по  $x_2$  для плоских задач (Рис. 3.25) и по  $x_3$  для пространственных задач (Рис. 3.26) для различных видов симметрии, что приведено ниже на примере Рис. 3.27 – 3.30, и различной периодичности согласно (3.11). При применении вышеуказанных решений для удовлетворения условий непрерывности напряжений и перемещений по плоскостям раздела наполнителя и связующего получаются характеристические определители четвертого порядка для плоских задач и шестого порядка для пространственных задач. В результате решения вышеуказанных характеристических уравнений получаем зависимость параметров нагружения от параметров волнообразования; минимизация этих зависимостей проводится в соответствии с п. 3.1.1 и Рис. 3.5.

Были исследованы первые четыре моды, которые названы модами первого, второго, третьего и четвертого рода; указанные моды схематически показаны на Рис. 3.27 – 3.30. Форма потери устойчивости первого рода имеет период, равный периоду структуры (в (3.11)  $k = 1$ ), и представлена на Рис. 3.27; эта мода соответствует сдвиговой моде по принятой терминологии в ряде публикаций.

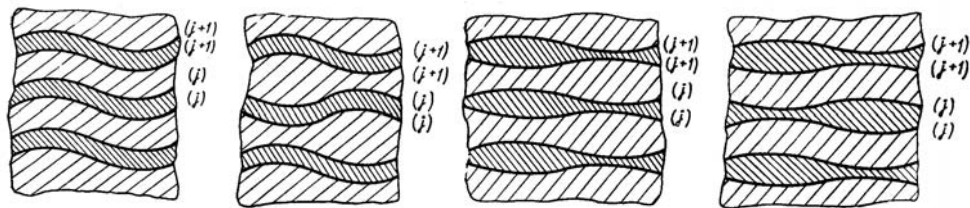


Рис. 3.27

Рис. 3.28

Рис. 3.29

Рис. 3.30

Форма потери устойчивости второго рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный удвоенному периоду структуры (в (3.11)  $k = 2$ ), и представлена на Рис. 3.28; эта мода соответствует моде растяжения по принятой терминологии в ряде публикаций.

Форма потери устойчивости третьего рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный периоду структуры (в (3.11)  $k = 1$ ), и представлена на Рис. 3.29.

Форма потери устойчивости четвертого рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный удвоенному периоду структуры (в (3.11)  $k = 2$ ), и представлена на Рис. 3.30.

Для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами в случае плоских и пространственных задач получены характеристические определители в замкнутой форме для материалов наполнителя и связующего с определяющими уравнениями достаточно общего вида; критические значения параметров нагружения получены в результате минимизации корней характеристических определителей, при этом корни определены с привлечением численных методов. При таком подходе получены многочисленные результаты для конкретных слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами.

В качестве примера вышеотмеченных результатов для конкретных слоистых композитов ниже в весьма краткой форме приведем отдельные результаты для слоистого композита, составленного из изотропных слоев, когда материал каждого из слоев моделируется линейным упругим телом. Эти результаты подробно представлены в монографии [57, т. 1, стр. 297 – 299]; представленный здесь Рис. 3.31 соответствует Рис. 3.9 указанной монографии. На Рис. 3.31 представлена зависимость параметра

нагружения от параметра волнообразования  $\alpha_a$  (типа параметров (3.2)) для слоистого композита со следующими параметрами:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 500$ ;  $h_m \cdot h_a^{-1} = 1; 5; 10; 20; 30; 40; 50$  применительно к плоской задаче, где обозначения соответствуют Рис. 3.25. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 на Рис. 3.31 отмечены кривые, соответствующие вышеуказанным значениям параметра  $h_m \cdot h_a^{-1}$ . Сплошными линиями на Рис. 3.31 показаны результаты, относящиеся к изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, Рис. 3.27); штрихпунктирными линиями на Рис. 3.31 показаны результаты, относящиеся к моде растяжения (форме потери устойчивости второго рода, Рис. 3.28).

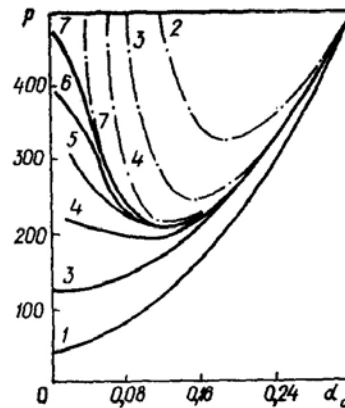


Рис. 3.31

Весьма кратко рассмотрим анализ результатов, представленных на Рис. 3.31 применительно к изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, Рис. 3.27), которые изображены сплошными линиями. Из Рис. 3.31 следует, что сплошные кривые с цифрами 1 и 3 ( $h_m \cdot h_a^{-1} = 1$  и 10) являются кривыми типа B на Рис. 3.3; таким образом, для рассматриваемого композита при компоновках слоев  $h_m \cdot h_a^{-1} = 1$  и 20 внутренняя потеря устойчивости (потеря устойчивости во внутренней структуре) не возникает по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода). Из Рис. 3.31 следует, что сплошные кривые с цифрами 4, 5, 6 и 7 ( $h_m \cdot h_a^{-1} = 20, 30, 40$  и 50) являются кривыми типа A на Рис. 3.3; таким образом, согласно подходу п. 1.2.1 для рассматриваемого композита при компоновках слоев  $h_m \cdot h_a^{-1} = 20, 30, 40$  и 50 внутренняя потеря устойчивости (потеря устойчивости во внутренней структуре) возникает по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода). Таким образом, строго доказано существование следующего явления – в зависимости от структуры слоистого композита может возникать или не возникать потеря устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, Рис. 3.27).

Дополнительную информацию о результатах по внутреннему разрушению слоистых композитов, обсуждаемых в настоящем п. 3.3.3.1, можно получить из монографии [57, т. 1, глава 3].

**3.3.3.2. Приповерхностное разрушение.** Рассмотрим в весьма краткой форме информацию о результатах по приповерхностному разрушению слоистых композитов, полученную в рамках модели кусочно-однородной среды; достаточно подробная информация по этому вопросу содержится в монографии [57, т. 1, глава 5].

При исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается слоистый композит, занимающий нижнее полупространство  $\text{const} \geq x_2 > -\infty$  в случае плоских задач согласно Рис. 3.25 и нижнее полупространство  $\text{const} \geq x_3 > -\infty$  в случае пространственных задач согласно Рис. 3.26. Все обозначения и соображения, изложенные в начале п. 3.3.3.1 до выражения (3.11), остаются в силе и для приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости), анализируемой в настоящем п. 3.3.3.2. Конкретные результаты получены для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицей (хрупкое и пластическое разрушение).

Для исследования плоских и пространственных задач о приповерхностном разрушении (приповерхностной потере устойчивости) разработаны два метода: первый метод, являющийся практически точным методом, основан на сведении рассматриваемых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений с последующим их тщательным анализом; второй метод, являющийся сугубо приближенным методом, основан на применении вариационных принципов ГЛТУДТ (§2 настоящей статьи).

В дальнейшем в этой статье не будем приводить примеры анализа полученных результатов для конкретных слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами применительно к приповерхностной неустойчивости. Ограничимся лишь информацией *о качественно новом явлении*, которое описано в монографии [57, т. 1, глава 5, с. 513] и заключается в следующем. *Не при всех концентрациях наполнителя и не при всех относительных жесткостных параметрах наблюдается (существует) явление поверхностной неустойчивости*. Так, при непрерывном увеличении внешней сжимающей нагрузки вначале может возникать внутренняя неустойчивость или критические нагрузки для внутренней и поверхностной неустойчивостей могут совпадать.

Вышеизложенной информацией ограничимся при весьма кратком обсуждении приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости) в слоистых композитах с полимерной и металлической матрицами, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды. Достаточно подробное изложение результатов по рассматриваемой проблеме представлено в монографии [57, т. 1, глава 5].

**3.3.3.3. Дополнительные сведения к механике разрушения слоистых композитных материалов.** В настоящем пункте (п. 3.3.3.3) приводится дополнительная информация в весьма краткой форме, относящаяся к следующим вопросам механики разрушения слоистых композитов при сжатии: анализ континуальной механики разрушения композитов при сжатии, изложенной в п. 3.3.2 настоящей обзорной статьи; построение метода исследования для более сложных форм потери устойчивости применительно к слоистым композитам; выводы из последовательного анализа теории Дау-Грунфеста-Розена-Шурца.

**3.3.3.3.1. Анализ континуальной механики разрушения композитов.** Как уже неоднократно отмечалось в настоящей статье, что при исследовании различных проблем устойчивости в механике композитов *модель кусочно-однородной среды*, когда отдельно для наполнителя и матрицы применяется ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) и на границах раздела (*in interface*) обеспечиваются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений, является *наиболее строгой и точной* в рамках механики деформируемых тел. Естественно, что полученные конкретные результаты в рамках вышеуказанной *наиболее строгой и точной модели* являются основой для оценки точности и обоснования любых более приближенных теорий и полученных на их основе соответствующих конкретных результатов.

Все результаты для теории разрушения при сжатии слоистых композитов, изложенные в пп. 3.3.3.1 и 3.3.3.2 настоящей обзорной статьи и в соответствующих главах монографий [30, 31, 35, 54, 57], получены на основе вышеуказанной *наиболее строгой и точной модели*. В связи с этим вышеотмеченные результаты по механике разрушения слоистых композитов при сжатии являются основой для оценки точности и обоснования более приближенных теорий в механике разрушения слоистых композитов при сжатии.

Континуальная теория разрушения композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала, которая изложена в п. 3.3.2 настоящей обзорной статьи, построена на основе *существенно более приближенной модели* (по сравнению с вышеуказанной *строгой и точной моделью*) – модели однородной среды с усредненными параметрами и ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи). В связи с этим полученные результаты по теории разрушения слоистых композитов при сжатии, полученные на основе *наиболее строгой и точной модели* и изложенные в пп. 3.3.3.1 и 3.3.3.2, можно применять для оценки точности и обоснования континуальной теории разрушения композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала, изложенной в п. 3.3.2 настоящей обзорной статьи, применительно к слоистым композитам.

Одним из основных результатов континуальной теории разрушения композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала, которая достаточно подробно изложена в монографиях [54] (глава 2) за 1990 г. и [57] (т. 1, глава 2) за 2008 г. и в сокращенной форме в п. 3.3.2 настоящей обзорной статьи, является определение теоретического предела прочности при одноосном сжатии. В случае композитов с поли-

мерной матрицей (как материалов с пониженной сдвиговой жесткостью) для плоской задачи (Рис. 3.25) в плоскости  $x_1 0x_2$  при одноосном сжатии вдоль оси  $0x_1$  для  $(\Pi_1^-)_T$  – теоретического предела прочности получена оценка ([57], т. 1, глава 2, формулы (2.60) и (2.61))

$$(\Pi_1^-)_T \leq G_{12}, \quad (\Pi_1^-)_T \approx G_{12}, \quad (3.12)$$

где  $G_{12}$  – модуль при рассмотрении в континуальном приближении композита как ортотропного материала.

Следует отметить, что выражения (3.12) относятся к композиту произвольной структуры, у которого ось  $0x_1$  (Рис. 3.25) является осью симметрии свойств материала. Поскольку в настоящем п. 3.3.3.1 анализ точности и обоснование континуальной теории (п. 3.3.2) проводится с точки зрения *строгой и точной* теории для слоистых композитов (пп. 3.3.3.1 и 3.3.3.2), то для слоистых композитов усредненное значение модуля сдвига  $G_{12}$  (3.12) определяется следующим выражением

$$G_{12} = G_a G_m (S_a G_m + S_m G_a)^{-1}, \quad (3.13)$$

где  $G_a$  и  $G_m$  – модули сдвига армирующих элементов (наполнителя) и матрицы (связующего);  $S_a$  и  $S_m$  – объемные концентрации армирующих элементов (наполнителя) и матрицы (связующего) в случае изотропных слоев. Отметим, что выражение (3.13) получено при строгом рассмотрении ситуации на Рис. 3.25 для плоской задачи в случае статики и с привлечением метода «длинных волн» в теории распространения волн применительно к классической линейной теории упругости изотропного тела; в настоящее время выражение (3.13) является общеизвестным и общепринятым. Таким образом, для слоистых композитов применительно к плоской задаче (Рис. 3.25) в рамках континуальной теории разрушения (п. 3.3.2) получаем теоретический предел прочности при одноосном сжатии в следующем виде

$$(\Pi_1^-)_T = G_a G_m (S_a G_m + S_m G_a)^{-1}. \quad (3.14)$$

В Предисловии к [57] (т. 1, стр. 20, 21) для композитов сформулированы условия, когда можно применять континуальную модель или теорию (модель однородного анизотропного тела с усредненными свойствами или параметрами). Для формулировки обсуждаемых условий введены два геометрических параметра: параметр  $L$  характеризует рассматриваемые механические процессы (характер изменяемости механических рассматриваемых полей по пространственным переменным); параметр  $h^*$  характеризует среднее значение расстояний между центрами соседних частиц во внутренней структуре композита. Введенный геометрический параметр  $L$  соответствует: в статических задачах – минимальным расстояниям, на которых существенно изменяются поля напряжений и деформаций; в задачах о распространении волн – длине волны; в задачах устойчивости – длине волны формы (моды) потери устойчивости. С учетом введенных обозначений условие применимости модели однородного анизотропного тела с усредненными параметрами (континуальной модели, континуальной теории) можно представить в виде

$$L \gg h^*. \quad (3.15)$$

В рассматриваемом в п. 3.3.3 слоистом композите с чередующимися слоями применительно к плоской задаче (Рис. 3.25) при потере устойчивости по периодической форме вдоль  $0x_1$  (Рис. 3.25) в соответствии с [57] (т. 1, стр. 305) выбираем в качестве параметров  $L$  и  $h^*$  в (3.15) следующие величины:  $L \sim l$ , где  $l$  – длина полуволны (вдоль слоев) формы потери устойчивости;  $h^* \sim 2(h_a + h_m)$ , где  $2(h_a + h_m)$  – общая

толщина слоя наполнителя и слоя связующего. С учетом выбранных параметров и соотношения (3.15) условие применимости континуальной модели для плоской задачи (Рис. 3.25) можно представить в виде

$$2(h_a + h_m) \ll l. \quad (3.16)$$

Из (3.16) для параметров волнообразования (в моде потери устойчивости)  $\alpha_a$  и  $\alpha_m$  получаем

$$\alpha_a = \pi \frac{h_a}{l} \ll 1; \quad \alpha_m = \pi \frac{h_m}{l} \ll 1. \quad (3.17)$$

Следует отметить, что в рамках модели кусочно-однородной среды для слоистых композитов (п. 3.3.3) для всех четырех форм потери устойчивости, которые представлены на Рис. 3.27 – 3.30, построены характеристические определители, элементы которых также зависят от параметров волнообразования  $\alpha_a$  и  $\alpha_m$  (3.17); отмеченные результаты представлены в монографии [57] (т. 1, глава 3). В указанной монографии на стр. 314 введено понятие об *асимптотически точных континуальных теориях* внутреннего разрушения (внутренней неустойчивости) слоистых композитов.

*Континуальная теория внутреннего разрушения, построенная на основе модели однородного тела с усредненными параметрами (свойствами), является асимптотически точной, если ее результаты следуют из результатов теории, построенной на основе модели кусочно-однородного тела, при стремлении параметров волнообразования  $\alpha_a$  и  $\alpha_m$  к нулю с учетом (3.16) и (3.17), т.е. при*

$$\alpha_a = \pi \frac{h_a}{l} \rightarrow 0; \quad \alpha_m = \pi \frac{h_m}{l} \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Безусловно, доказательство асимптотической точности рассматриваемой континуальной теории для слоистого композита в случае плоской задачи (Рис. 3.25) можно провести *только* применительно к четырем модам потери устойчивости, представленным на Рис. 3.27 – 3.30, для которых получены характеристические определители в рамках модели кусочно-однородного тела (п. 3.3.2.1). Для доказательства необходимо представить все элементы вышеуказанных характеристических определителей в виде рядов по параметрам  $\alpha_a$  и  $\alpha_m$  (3.18) и вычислить первый член такого разложения всего характеристического определителя.

В монографии [57] (т. 1, стр. 316) для плоской задачи (Рис. 3.25) в случае слоистых композитов с полимерной матрицей *строго доказано, что континуальная теория внутреннего разрушения (п. 3.3.2.1) является асимптотически точной и соответствует форме потери устойчивости первого рода (изгибной форме, Рис. 3.27)*. В этом случае для теоретического предела прочности при одноосном сжатии получено выражение (3.122) монографии [57] (т. 1, стр. 316), которое полностью совпадает с выражением (3.14), полученным в рамках континуальной теории внутреннего разрушения (п. 3.3.2.1).

Из вышеизложенного доказательства также следует, что континуальная теория внутреннего разрушения (п. 3.3.2.1) *не описывает* разрушения, связанные с формами потери устойчивости второго, третьего и четвертого рода, которые представлены на Рис. 3.28 – 3.30, ввиду следующего соображения. Применительно к формам потери устойчивости второго, третьего и четвертого рода при анализе, соответствующем условиям (3.18), не приходим к результатам, имеющим непосредственный физический смысл; более подробно этот вопрос рассмотрен в монографиях [54] (глава 3) и [57] (т. 1, стр. 304 – 312).

В монографиях [30] за 1971 г. и [31] за 1973 г., а также в статьях [216] за 1969 г., [179] за 1982 г. и [177] за 2001 г. было отмечено, что при численных исследованиях обнаружено – рассмотрение форм потери устойчивости третьего (Рис. 3.29) и четвертого (Рис. 3.30) рода *не приводит* к получению критических нагрузок *ниже*, чем по



формам потери устойчивости первого (Рис. 3.27) и второго (Рис. 3.28) рода; в последующие годы вышеизложенная информация последовательно представлена в монографиях [54] (глава 3) и [57] (т. 1, глава 3). Из вышеприведенных сведений следует вывод, что при анализе *асимптотической точности континуальной теории внутреннего разрушения* (внутренней неустойчивости), *изложенной в п. 3.3.2.1, достаточно рассматривать формы потери устойчивости первого (Рис. 3.27) и второго (Рис. 3.28) рода*, исследованные в рамках модели кусочно-однородного тела (среды, материала) в п. 3.3.3.1.

Необходимо отметить, что аналогичные исследования были проведены в рамках модели кусочно-однородной среды и ТЛТУДТ для слоистых композитов (в рамках подхода и метода п. 3.3.3.1) применительно к пространственной задаче в случае композитов с полимерной матрицей (хрупкое разрушение), а также применительно к плоской и пространственной задачам в случае композитов с металлической матрицей (пластическое разрушение). Во всех вышеуказанных случаях при исследовании были получены такие же результаты, как и для слоистых композитов с полимерной матрицей применительно к плоской задаче, обсуждаемые результаты представлены достаточно подробно в монографиях [54] (глава 3) и [57] (т. 1, глава 3).

Таким образом, можно считать, что выше в общем случае доказано следующее Утверждение.

**Утверждение.** Для слоистых композитных материалов с полимерной и металлической матрицей континуальная теория (п. 3.3.2.1) внутреннего разрушения, построенная на основе модели однородного материала с усредненными параметрами и ТЛТУДТ, имеет следующие свойства:

- 1) является асимптотически точной и соответствует форме потери устойчивости первого рода (изгибной моде, Рис. 3.27);
- 2) не описывает внутреннее разрушение, соответствующее форме потери устойчивости второго рода (мода растяжения, Рис. 3.28).

Поскольку потеря устойчивости во внутренней структуре слоистого композита и вызванный старт разрушения возникает при меньшем значении критической нагрузки (из двух значений критических нагрузок, соответствующих формам потери устойчивости первого (Рис. 3.27) и второго (Рис. 3.28) рода), то обсуждаемый анализ можно продолжить и целесообразно выделить три характерных случая.

**Первый случай.** При разрушении *реализуется* форма потери устойчивости первого рода и *не реализуется* форма потери устойчивости второго рода. В этом случае обсуждаемая континуальная теория описывает разрушение.

**Второй случай.** При разрушении *может реализоваться* и форма потери устойчивости первого рода, и форма потери устойчивости второго рода. В этом случае, как следует из Таблиц 3.1. и 3.2 монографий [54] (стр. 182, 183) и [57] (т. 1, стр. 300, 301), величины критических нагрузок, вычисленные в рамках модели кусочно-однородной среды (п. 3.3.3.1) и ТЛТУДТ для форм потери устойчивости первого (Рис. 3.27) и второго (Рис. 3.28, мода растяжения) рода, *отличаются незначительно* в рассмотренных примерах [54] и [57] (т. 1). Таким образом, и во **втором случае** обсуждаемая континуальная теория *дает надежную информацию о величине теоретического предела прочности*; по-видимому, в рассматриваемом случае целесообразно расширить количество анализируемых числовых примеров.

**Третий случай.** При разрушении *не реализуется* форма потери устойчивости первого рода и *реализуется* форма потери устойчивости второго рода. В этом случае в соответствии с вышесформулированным **Утверждением** обсуждаемая континуальная теория внутреннего разрушения (п. 3.3.2.1) при сжатии *не описывает* внутреннее разрушение слоистых композитов при сжатии. Для выяснения пригодности выражения (3.14) для определения теоретического предела прочности слоистых композитов в рассматриваемом третьем случае, по-видимому, целесообразно провести численное исследование для ряда слоистых композитов с привлечением подхода п. 3.3.3.1 в рамках модели кусочно-однородного материала применительно к форме потери устойчивости второго рода (Рис. 3.28, мода растяжения).

Вышеизложенными в настоящем п. 3.3.3.3.1 сведениями ограничимся при анализе континуальной теории внутреннего разрушения композитов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала, изложенной в п. 3.3.2.1, применительно к слоистым композитам при сжатии вдоль слоев (Рис. 3.25 и 3.26).

**3.3.3.3.2. О построении метода исследования для сложных форм потери устойчивости слоистых композитов.** При исследовании устойчивости слоистых композитов в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела) и ТЛТУДТ (§2 настоящей обзорной статьи) во всех анализируемых формах потери устойчивости выделялись множители  $(\sin \pi l_1^{-1} x_1 -$  в случае плоских задач, Рис. 3.25;  $(\sin \pi l_1^{-1} x_1) \times (\cos \pi l_2^{-1} x_2) -$  в случае пространственных задач, Рис. 3.26), где  $l_1$  и  $l_2$  – длины полу-

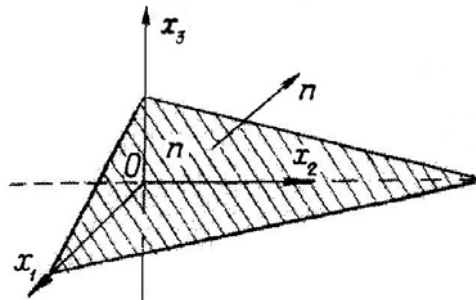


Рис. 3.32

волны форм потери устойчивости вдоль слоев. Таким образом, в рамках модели «бесконечно длинных слоев» принималось, что каждый из слоев теряет устойчивость по одинаковой периодической (в фазе или противофазе) форме потери устойчивости вдоль слоев. При рассматриваемых формах потери устойчивости *плоскости с одинаковой фазой* в форме потери устойчивости (вдоль координаты  $x_1$  в случае плоских задач (Рис. 3.25) и вдоль координат  $x_1$  и  $x_2$  в случае простран-

венных задач (Рис. 3.27), в общем случае вдоль слоев) расположены *перпендикулярно слоям*. Все же более сложными являются формы потери устойчивости, которые являются *периодическими вдоль слоев, но плоскости с одинаковой фазой* в форме потери устойчивости расположены произвольно относительно плоскости слоев. Для более четкой характеристики форм потери устойчивости в обсуждаемом случае введено понятие о плоскости  $\Pi$ , которая состоит из точек композита, имеющих одинаковую фазу (по координатам вдоль слоев) в форме потери устойчивости; при этом плоскость  $\Pi$  занимает произвольное положение, определяемое ортом нормали  $\mathbf{n}$  (Рис. 3.32), и форма потери устойчивости является периодической по координатам вдоль слоев (по  $x_1$  – в случае плоской задачи, Рис. 3.25; по  $x_1$  и  $x_2$  – в случае пространственной задачи, Рис. 3.26). В первом октанте на Рис. 3.32 плоскость  $\Pi$  заштрихована и определяется ортом  $\mathbf{n}$  нормали с составляющими

$$n_1, n_2, n_3; n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (3.19)$$

В статье [376] в явном виде построены решения системы статических уравнений ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) для слоистых композитов применительно к вышеуказанным формам потери устойчивости и показано, что при предложенном подходе получаем конечного порядка характеристический определитель, элементы которого представляются в замкнутом виде. Целесообразно отметить, что применительно и к обсуждаемым формам потери устойчивости относятся сведения п. 3.3.1 об общности подхода **второго направления** и его полному соответствию общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач; лишь в силу выполнения достаточных условий применимости метода Эйлера в [376] ограничились построением решений статических уравнений ТЛТУДТ.

**3.3.3.3.3. Выводы из последовательного анализа теории Дау-Грунфеста-Розена-Шурца.** Краткие сведения о формировании названия «теория Дау-Грунфеста-Розена-Шурца» представлены в заключительной части п. 3.1.2 настоящей обзорной статьи. Обсуждаемые результаты указанной теории (по классификации настоящей статьи) относятся к **первому направлению (весьма приближенные подходы)**, весь-

ма краткой характеристике которого посвящен п. 3.1.2; целесообразно отметить, что в п. 3.1.2 сформулировано пять групп основных приближенных допущений, которые характерны для **первого направления** исследований.

Характерным представителем **первого направления**, как уже отмечалось в п. 3.1.2, является статья [551], которая опубликована на английском языке в 1965 г. и на русском языке в 1967 г. в виде статьи [161], которая, по-видимому, была *первой* публикацией (в **первом направлении**) с результатами теоретического характера и которая вошла в многотомные издания энциклопедического характера по разрушению [160] и по композитам [127]. В связи с вышеизложенным анализ теории Дау-Грунфеста-Розена-Шурца проводится по результатам статей [551, 161]; целесообразно отметить, что к обсуждаемым публикациям относятся все пять групп приближенных допущений, указанных в п. 3.1.2. Анализ результатов обсуждаемой теории целесообразно проводить на основании соответствующих результатов **второго направления**, в которых, как уже отмечалось в начале п. 3.1.3.1, не принимаются вышеуказанные пять групп приближенных допущений. Такой анализ теории Дау-Грунфеста-Розена-Шурца проводился в монографии [54] за 1990 г. на стр. 206 – 214, в монографии [57] (т. 1) за 2008 г. на стр. 328 – 335 и в сокращенном виде в обзорной статье [65] за 2016 г. на стр. 22 – 26. Вышеуказанный анализ обсуждаемой теории проводился на основании результатов для слоистых композитов, полученных в рамках **второго направления** и, частично, изложенных в настоящем пункте 3.3.3; в связи с этим данный п. 3.3.3.3, посвященный изложению выводов из обсуждаемого анализа, включен в п. 3.3.3. Отметим, что основные результаты статей [551, 161] представлены ниже на Рис. 3.33, в который входят Фиг. 3.22 – 3.24 статьи [161].

Для удобства анализа обсуждаемых результатов целесообразно отметить, что все величины, относящиеся к наполнителю (армирующие элементы, волокна, слои и т.п.) и к матрице (связующее), отмечены индексами: « $a$ » и « $m$ » – в настоящей обзорной статье; « $B$ » и « $M$ » – в обсуждаемой статье [161] и на Рис. 3.33, в который вошли Фиг. 3.22, 3.23 и 3.24 статьи [161], являющейся переводом на русский язык статьи [551].

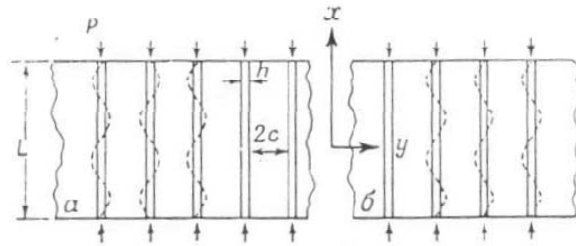
Из обсуждения и анализа результатов статей [551, 161], которые представлены в монографиях [54, 57], можно сделать следующие краткие выводы.

1. При анализе закономерностей в *волокнистом* композите применяется, по существу, модель *слоистого* композита, поскольку исследования проводятся в рамках *плоской* задачи в плоскости  $xOy$  (Рис. 3.33, Фиг. 3.22), хотя применяется терминология, соответствующая *волокнистому* композиту. При этом вышеуказанное моделирование никак не обосновывается.

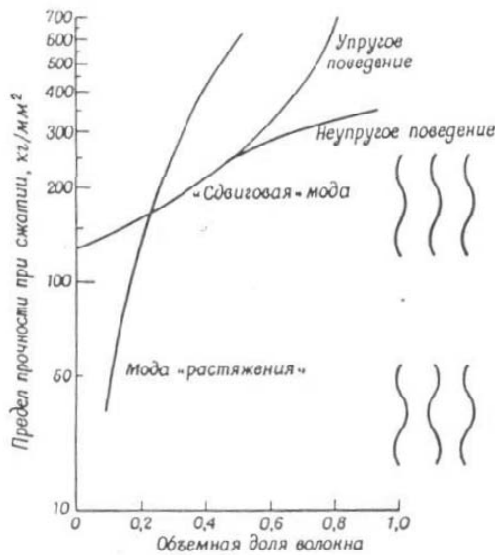
2. Обсуждаемая теория имеет **качественные противоречия**, ниже ограничимся формулировкой двух позиций.

2.1. *Теория [551, 161] не допускает (не описывает) потери устойчивости (внутренней неустойчивости) по сдвиговой моде композита* (ни при каких соотношениях между жесткостными и геометрическими параметрами композита). Отметим, что «сдвиговая» мода (Фиг. 3.22б на Рис. 3.33) соответствует форме потери устойчивости первого рода (Рис. 3.27). Этот вывод следует при строгом анализе (в соответствии с подходами, изложенными в п. 3.1.1 возле Рис. 3.3) из выражения (В.26) на стр. 96 [161], которое свидетельствует, что зависимость типа  $p = p(\alpha)$  (3.2) для выражения (В.26) [161] имеет монотонный характер – типа кривой  $B$  на Рис. 3.2. В монографии [54] сформулированный вывод фактически изложен в более подробном виде на стр. 207 – 209 [54].

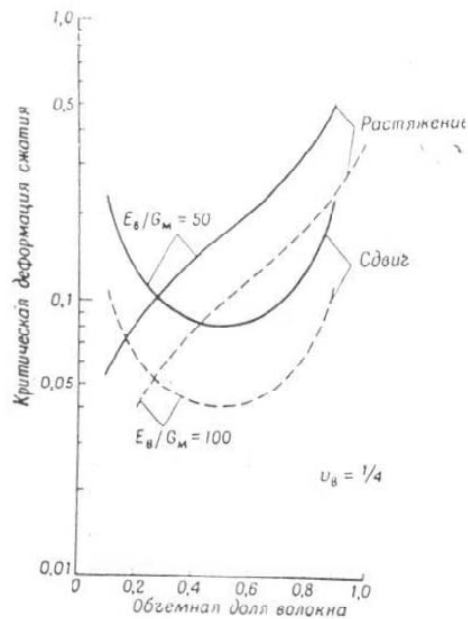
В рамках **второго направления** (более строго и точного по сравнению с [551, 161] *строго доказано* (например, в заключительной части п. 3.3.3.1 настоящей обзорной статьи), что потеря устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) *по «сдвиговой» или «изгибной» моде может возникнуть или не возникнуть в зависимости от соотношений между жесткостными и геометрическими параметрами композита*. В частности, неустойчивость *по «сдвиговой» или «изгибной» моде* (форме потери устойчивости первого рода, Рис. 3.27) *возникает при малых концентрациях наполнителя*, что отмечено в монографии [54] на стр. 209.



Ф и г. 3.22. Аналитическая модель прочности волокнистой композиции при сжатии. а — мода растяжения; б — сдвиговая мода.



Ф и г. 3.23. Прочность при сжатии стеклопластика.



Ф и г. 3.24. Критическая деформация сжатия волокнистых композиций.

Рис. 3.33

В вышеизложенном заключается первое качественное противоречие теории [551, 161].

2.2. Теория [551, 161] при больших концентрациях наполнителя (армирующих элементов, волокон и т.п.) приводит к физически некорректному результату для «сдвиговой» или «изгибной» моды (формы потери устойчивости первого рода, Рис. 3.27). Так, из выражения (3.29) [161] на стр. 82 следует, что теоретический предел прочности при сжатии стремится к «бесконечности», когда  $\nu_B \rightarrow 1$  (в [161] через  $\nu_B$  обозначена объемная концентрация наполнителя).

В рамках **второго направления** (более строгого и точного по сравнению с [551, 161]) строго доказано, что в вышеуказанной ситуации теоретический предел прочности на сжатие стремится к конечной величине [57] (т. 1, стр. 189, выражение (2.71)); отмеченный результат также следует из выражения (3.14) при  $S_a \rightarrow 1$  и  $S_m = 1 - S_a \rightarrow 0$ , где  $S_a \sim \nu_B$ .

Таким образом, в вышеизложенном заключается второе качественное противоречие теории [551, 161].

3. Обсуждаемая теория имеет **количественные погрешности**, ниже ограничимся формулировкой двух позиций.

3.1. Результаты *теории* [551, 161] и соответствующие результаты **второго направления** для слоистых композитов *существенно отличаются друг от друга при малых и больших концентрациях наполнителя* (армирующие элементы, волокна, слои и т.п.). Отмеченный вывод представлен в монографии [54] на стр. 210.

3.2. Результаты *теории* [551, 161] и соответствующие результаты **второго направления** для слоистых композитов при довольно малых концентрациях наполнителя (армирующие элементы, волокна, слои и т.п.) *могут отличаться друг от друга в три раза и более*. Отмеченный вывод изложен в верхней части стр. 211 монографии [54].

Таким образом, обсуждаемая теория Дау-Грунфеста-Розена-Шурца (в виде публикаций [551, 161]) и ее количественные результаты имеют *существенные качественные противоречия и количественные погрешности* по отношению к теории и результатам, построенным с обычно принятой точностью в механике деформируемых тел (**второе направление**, построенное на основе ТЛТУДТ). В связи с этим для определения *достоверности* отдельных конкретных результатов, полученных в рамках обсуждаемой теории, необходимо проводить *дополнительные исследования*.

Следует отметить, что вышесформулированные выводы из анализа статей [551, 161], представленные в сокращенной форме, соответствуют обзорной статье [65] за 2016 г. на стр. 24 – 26; в наиболее полной форме соответствующий анализ и выводы изложены в монографии [54] за 1990 г. на стр. 206 – 214.

Также целесообразно отметить, что вышесформулированные выводы из анализа статей [551, 161] совместно с пятью группами основных приближенных допущений, которые сформулированы в п. 3.1.2 и которые характерны для **первого направления** исследований (п. 3.1.2), дают определенное представление обо всех исследованиях **первого направления**. Все же, как уже неоднократно подчеркивалось, в настоящей статье не ставилась цель изложить обзор исследований по **первому направлению** для слоистых композитов.

Вышесформулированными сведениями ограничимся при рассмотрении результатов, относящихся к п. 3.3.3 (Слоистые композиты. Модель кусочно-однородной среды).

**3.3.4. Волокнистые однонаправленные композиты. Модель кусочно-однородной среды.** В настоящем пункте (п. 3.3.4) в весьма краткой форме приведена информация о механике разрушения при сжатии (вдоль волокон) волокнистых однонаправленных композитов с полимерной и металлической матрицами, построенной на основе модели кусочно-однородной среды (тела, материала). В этом случае отдельно для материалов матрицы (связующего) и каждого волокна (армирующего элемента) применяются основные соотношения ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) и на границах раздела (interface) в виде цилиндрических поверхностей принимаются условия непрерывности напряжений и перемещений. Исследования проводятся для хрупкого и пластического разрушения; в последнем случае предварительно принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения, в краткой форме изложенная в §2 настоящей обзорной статьи. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 3.3.1, в рассматриваемом случае исследований приходим к анализу статических уравнений и соответствующих граничных условий ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) для кусочно-однородной среды и на заключительном этапе исследований приходим к задаче на собственные значения с привлечением аппарата ТЛТУДТ. Целесообразно отметить, что в настоящем п. 3.3.4 приводится только информация о результатах, полученных для волокнистых однонаправленных композитов, в поверхностях раздела которых отсутствуют дефекты; в связи с этим для результатов, представленных в п. 3.3.4, выполняются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений на всех цилиндрических поверхностях раздела. Основные результаты получены для *внутреннего* разрушения (потеря устойчивости во внутренней структуре, внутренняя неустойчивость), результаты для которого изложены в монографии [57] (т. 1, глава 4), и для *приповерхностного* разрушения (потеря устойчивости в приповерхностных слоях внутренней структуры, приповерхностная неустойчивость), результаты для кото-

рого изложены в монографии [57] (т. 1, глава 6); частично основные результаты также представлены в монографиях [30, 31, 54] и в весьма краткой форме в обзорной статье [65]. Предварительно обсуждаемые результаты для волокнистых однонаправленных композитов были опубликованы в статьях, основные из которых вошли в список литературы к настоящей обзорной статье и вошли в перечень основных статей, относящихся ко всему **второму направлению** и приведенному во вводной части §3 настоящей обзорной статьи; дополнительную информацию об опубликованных статьях можно получить из списков литературы к монографиям [30, 31, 54, 57]. Основные результаты для волокнистых однонаправленных композитов в виде характеристических определителей для внутреннего и приповерхностного разрушения изложены в единой общей форме для **теорий 1, 2 и 3** в соответствии с терминологией п. 2.2 и вводной части п. 2.4.

Ниже в настоящем п. 3.3.4 обсуждаются в весьма краткой форме лишь основные результаты по механике разрушения волокнистых однонаправленных композитов при сжатии вдоль волокон, полученные в рамках модели кусочно-однородной среды и ТЛТУДТ, основы математического аппарата которой в краткой форме изложены в §2 настоящей обзорной статьи; при этом учитывается краткое изложение рассматриваемого вопроса в обзорной статье [65].

**3.3.4.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутреннего разрушения (внутренней неустойчивости) рассматривается волокнистый однонаправленный композит, который занимает бесконечное пространство (Рис. 3.1), применяются статические уравнения ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи), что обосновано в п. 3.3.1, и анализ проводится в соответствии с процедурой, изложенной в п. 3.1.1, с учетом подхода, изложенного возле Рис. 3.3. Также принимается, что укорочения вдоль волокон в матрице и волокнах (в докритическом состоянии при сжатии вдоль волокон) совпадают, что соответствует **Примечанию 3.8**.

Целесообразно отметить следующую ситуацию. В волокнистых однонаправленных композитах при сжатии вдоль волокон (Рис. 3.1), в отличие от слоистых композитов при сжатии вдоль слоев (Рис. 3.2), *может возникнуть в докритическом состоянии неоднородное напряженное состояние*, зависящее от пространственных переменных в плоскости поперечного сечения. *Однородное докритическое состояние* может возникать только в двух случаях: первый – материалы волокон и матрицы являются несжимаемыми; второй – материалы волокон и матрицы имеют одинаковые коэффициенты Пуассона ( $\nu_a = \nu_m$ ). Указанное условие не выполняется, когда коэффициенты Пуассона материалов волокна не равны ( $\nu_a \neq \nu_m$ ); в этом случае получаем неоднородное докритическое состояние. В связи с этим возникает вопрос о необходимости

учитывать (в задачах устойчивости волокнистых однонаправленных композитов) неоднородность докритического состояния для случая  $\nu_a \neq \nu_m$ . В монографии [57, т. 1, глава 4, §1, стр. 391 – 396] на примере одного волокна исследован этот вопрос; при этом для неоднородного докритического состояния достаточно точные результаты получены численным методом. Так, на Рис. 3.34 представлена зависимость величин  $\varepsilon_T \cdot 10$  ( $\varepsilon_T$  – теоретическое значение предельного укорочения) и  $\alpha_{кр} = \pi R / l_{кр}$  (критическое значение параметра волнообразования  $\alpha = \pi R / l$ ;  $R$  – радиус поперечного сечения во-

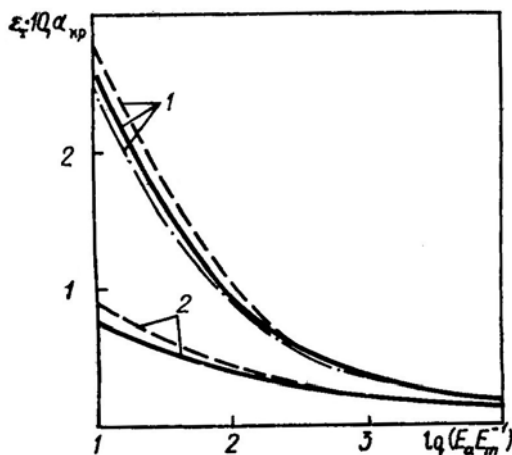


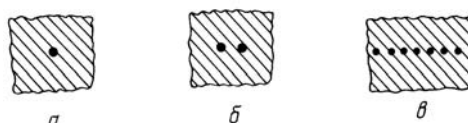
Рис. 3.34

локна;  $l$  – длина полуволны (вдоль оси волокна) формы потери устойчивости) от параметра  $\lg(E_a \cdot E_m^{-1})$ . Кривые для величины  $\alpha_{кр}$  отмечены цифрами 1, кривые для величины  $\varepsilon_T \cdot 10$  отмечены цифрами 2; сплошные кривые относятся к случаю  $\nu_a = 0,2$  и  $\nu_m = 0,4$  (докритическое состояние неоднородное), штриховые кривые относятся к случаю  $\nu_a = \nu_m = 0,2$  (докритическое состояние однородное) и штрихпунктирные кривые относятся к случаю  $\nu_a = \nu_m = 0,4$  (докритическое состояние однородное). Отметим, что на Рис. 3.34 для величины  $\varepsilon_T \cdot 10$  сплошные и штрихпунктирные линии практически совпадают. Также отметим, что случай  $\nu_a = 0,2$  и  $\nu_m = 0,4$  согласно Табл. 0.1 и Табл. 0.2 [57, т. 1, с. 67 и с. 68] соответствует наибольшему отклонению в коэффициентах Пуассона для типичных наполнителей и связующих.

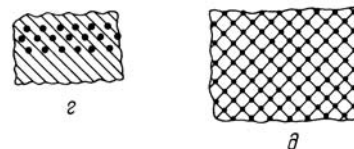
Из анализа результатов на Рис. 3.34 и Табл. 4.1 [57, т. 1, с. 395] сделан следующий вывод: при  $E_a \cdot E_m^{-1} \geq 20$ , выполняя исследования с точностью до 5%, можно не учитывать неоднородность докритического состояния, вызванную различием в значениях коэффициентов Пуассона для наполнителя и связующего, и проводить исследования при равных значениях коэффициента Пуассона  $\nu_a = \nu_m = 0,3$ . Сформулированный вывод дает возможность обоснованно применять общие решения статических уравнений ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи, пп. 2.5.1 и 2.5.2), которые получены для однородных докритических напряженных состояний; все изложенные ниже результаты для волокнистых однонаправленных композитов получены указанным способом.

Для волокнистых однонаправленных композитов при сжатии вдоль волокон (Рис. 3.1) возникают различные задачи в зависимости от структуры композита в плоскости поперечного сечения и рассматриваемых расчетных схем. На Рис. 3.35 (в плоскости поперечного сечения) показаны следующие расчетные схемы.

1. Одно волокно (Рис. 3.35, а) – для волокнистых композитов с малой концентрацией наполнителя, когда соседние волокна не взаимодействуют между собой.



2. Два волокна (Рис. 3.35, б) – для волокнистых композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры при потере устойчивости могут взаимодействовать два соседних волокна.



3. Один периодический ряд волокон (Рис. 3.35, в) – для волокнистых композитов периодической структуры, когда при потере устойчивости волокна в пределах одного ряда взаимодействуют между собой, а соседние ряды волокон не взаимодействуют между собой (весьма малые расстояния между волокнами в одном ряду, весьма большие расстояния между соседними рядами).

4. Несколько периодических рядов волокон (Рис. 3.35, г) – для волокнистых композитов периодической структуры, когда при потере устойчивости волокна в пределах каждого ряда взаимодействуют между собой, ряды волокон в пределах группы рядов взаимодействуют между собой и различные группы рядов не взаимодействуют между собой.

5. Двоякопериодическая структура волокон (Рис. 3.35, д) – для волокнистых композитов двоякопериодической структуры при весьма малых расстояниях между соседними волокнами, когда при потере устойчивости необходимо учитывать взаимодействие в рамках модели двоякопериодической структуры.

Количество вариантов исследований для волокнистых однонаправленных композитов определяется не только количеством расчетных схем, приведенных на Рис. 3.35 (всего 5 расчетных схем), но и тем, что для каждой расчетной схемы необходимо исследовать различные формы (или типы форм) потери устойчивости, определяемые

Рис. 3.35

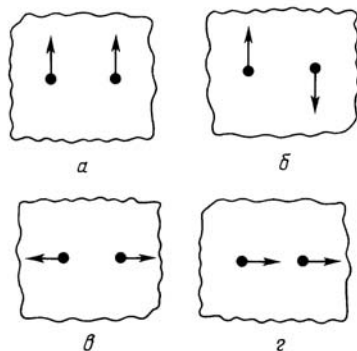


Рис. 3.36

свойствами симметрии в плоскости поперечного сечения. Безусловно, после проведения исследований по различным формам потери устойчивости необходимо проводить минимизацию полученных всех собственных чисел (обычно первых собственных чисел для каждого типа форм потери устойчивости) с целью определения критического значения укорочения вдоль оси волокон.

Для примера на Рис. 3.36 показаны (в плоскости поперечного сечения) различные типы форм потери устойчивости для двух волокон (Рис. 3.35, б). Так, Рис. 3.36, а соответствует формам потери устойчивости в одной фазе из плоскости волокон; Рис. 3.36, б соответствует формам потери устойчивости в противофазе из плоскости волокон; Рис. 3.36, в соот-

ветствует формам потери устойчивости в противофазе в плоскости волокон; Рис. 3.36, г соответствует формам потери устойчивости в одной фазе в плоскости волокон.

**Общий метод решения** вышесформулированных задач, который применялся при исследовании всех задач по механике внутреннего разрушения при осевом сжатии волокнистых однонаправленных композитов в рамках **второго направления**, включает следующие составные элементы. Применение для волокон и матрицы общих решений статических уравнений ГЛУДУТ (§2 настоящей статьи, пп. 2.5.1 и 2.5.2) в круговых цилиндрических координатах. Представление решения в виде суммы решений в локальных цилиндрических координатах в форме рядов Фурье с неопределенными коэффициентами, включающих специальные функции кругового цилиндра. Получение характеристических уравнений в виде бесконечных характеристических определителей с вычислением элементов в явном виде. Доказательство, что указанные бесконечные характеристические определители для несоприкасающихся волокон являются определителями нормального типа. Отмеченное доказательство обосновывает при приближенном определении корней замену бесконечных определителей конечными определителями, т.е. применять метод усечения. Обоснование практической сходимости указанного метода посредством сравнения значений корней, получающихся при увеличении порядка усеченных определителей.

Вышеуказанным методом получены многочисленные результаты по внутреннему разрушению при сжатии волокнистых однонаправленных композитов с полимерной и металлической матрицами; достаточно подробное и последовательное изложение этих результатов представлено в монографии [57, т. 1, глава 4]. По-видимому, отмеченные результаты являются в настоящее время *наиболее точными и строгими*; кроме того, *метод позволяет уточнять* полученные результаты для несоприкасающихся волокон.

**Пример.** Весьма кратко рассмотрим определение экспериментальных и теоретических пределов прочности при одноосном сжатии вдоль волокон для металлокомпозита (однонаправленный волокнистый бороалюминиевый композит с 50% содержанием волокон бора,  $S_a = S_m = 0,5$ ) ВКА-1 с волокнами бора диаметром 140 мкм; общий вид образцов из бороалюминия представлен на Рис. 3.37 и на Рис. 3.38 при значительном увеличении представлена внутренняя структура бороалюминиевого композита в поперечном сечении. Обсуждаемые результаты были опубликованы в статье [95] и сравнительно подробно изложены в монографии [57] (т. 1, глава 4, с. 486 – 488), где можно получить более подробную информацию. При теоретических исследованиях применялась **теория 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) в соответствии с терминологией п. 2.2 настоящей статьи; также рассматривалось *пластическое разрушение*, под которым в соответствии с **Примечанием 3.7** понимается этап нагружения, когда *вся матрица находится в состоянии пластического деформирования*. В связи с этим для описания пластического деформирования матрицы применялось соотношение (3.8) в рамках модели несжимаемого изотропного пластического материала. В рассматриваемом волокнистом однонаправленном бороалюми-



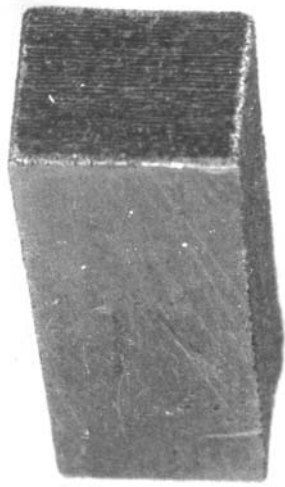


Рис. 3.37

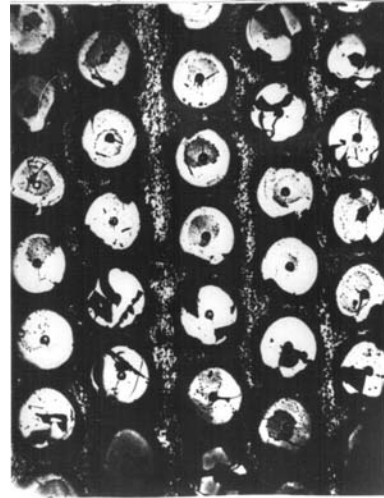


Рис. 3.38

ниевом композите в качестве матрицы применялся технический алюминий АД – 1, для которого (применительно к отожженным и неотожженным образцам) определялись параметры  $A_m$  и  $k_m$ , входящие в соотношение (3.8); более подробные сведения по этому вопросу изложены в монографии [57] (т. 1, глава 4, с. 486 – 488). Так были определены [95]:

$$\begin{aligned} A_m &= 130 \text{ МПа}; k_m = 0,43 - \text{для отожженной матрицы (алюминия)}; \\ A_m &= 70 \text{ МПа}; k_m = 0,25 - \text{для неотожженной матрицы (алюминия)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Интересно отметить, что величины  $A_m$  и  $k_m$  для неотожженного алюминия (3.20) полностью совпадают с числовыми значениями соответствующих величин при третьей аппроксимации в (3.9). Отметим, что по существу рассматривались два металлокомпозита (отожженный и неотожженный); при экспериментальных исследованиях было разрушено 32 отожженных и 14 неотожженных образца, для которых были определены экспериментальные пределы прочности. Теоретические пределы прочности были определены в рамках континуальной теории разрушения (п. 3.3.2.1) и в рамках модели кусочно-однородной среды для волокнистых однонаправленных композитов (п. 3.3.4.1) при расчетной схеме композита двоякопериодической структуры (Рис. 3.35, д). Вышеуказанные результаты представлены в Табл. 3.1, которая соответствует Табл. 4.10 [57] (т. 1, глава 4, с. 487). Из анализа результатов, представленных в Табл. 3.1, следует, что континуальная теория разрушения дает результаты, весьма близкие к средним экспериментальным результатам, а механика разрушения в рамках модели кусочно-однородной среды дает результаты, весьма близкие к максимальным экспериментальным результатам.

Таблица 3.1

Материал	$(\Pi \bar{\sigma})_{\text{эк}}, \text{ МПа}$			$(\Pi \bar{\sigma})_{\text{т}}, \text{ МПа}$	
	max	min	Среднее	Континуальная теория	Модель кусочно-однородной среды
Отожженный	965	501	665	736	958
Неотожженный	1716	1049	1282	1467	1972

Дополнительную информацию о результатах по внутреннему разрушению волокнистых однонаправленных композитов, обсуждаемых в настоящем п. 3.3.4.1, можно получить из монографии [57] (т. 1, глава 4). Необходимо отметить, что при определении теоретических пределов прочности при одноосном сжатии вдоль волокон бороа-

люминиевого композита при пластическом разрушении в рамках континуальной теории разрушения (п. 3.3.2.1) вычисления проводились в первом приближении, как и в примере п. 3.3.2.1, результаты которого приведены на Рис. 3.23.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов (Табл. 3.1) по определению предела прочности при одноосном сжатии вдоль волокон, рассматриваемых бороалюминиевых однонаправленных композитов позволяет сделать следующие выводы.

1. Для континуальной теории разрушения (п. 3.3.2) получаем близкие значения теоретического предела прочности на сжатие по сравнению со средними значениями указанной величины, полученными из эксперимента; так, в случае отожженного материала эти результаты отличаются друг от друга на 11%, а в случае неотожженного – на 14,4%.

2. Механика разрушения с использованием модели кусочно-однородной среды (п. 3.3.4.1) дает значения теоретического предела прочности при одноосном сжатии, близкие максимальным значениям предела прочности при сжатии, полученным экспериментально. Так, в случае отожженного материала отличие между этими результатами составляет 1%, а в случае неотожженного – 15%.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при рассмотрении результатов по внутреннему разрушению волокнистых однонаправленных композитов при сжатии вдоль волокон; обсуждаемые результаты получены в рамках модели кусочно-однородной среды и ТЛТУДТ, основные положения которой и соответствующий математический аппарат изложены в §2 настоящей обзорной статьи.

**3.3.4.2. Приповерхностное разрушение.** Рассмотрим в весьма краткой форме информацию о результатах о приповерхностном разрушении волокнистых однонаправленных композитов, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды; достаточно подробная информация по этому вопросу содержится в монографии [57] (т. 1, глава 6).

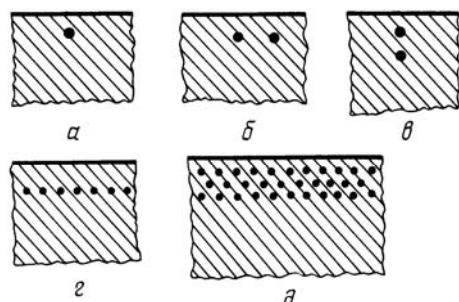


Рис. 3.39

При исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается волокнистый однонаправленный композит (Рис. 3.1), который занимает полупространство; при этом граничной поверхностью является плоскость, проходящая параллельно однонаправленным волокнам (Рис. 3.1). В связи с вышеизложенным в плоскости поперечного сечения волокнистого однонаправленного композита (Рис. 3.1) при исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается полуплоскость (Рис. 3.39) с различными структурами, соответствующими характерным расчетным схемам. На

Рис. 3.39 показано 5 характерных расчетных схем, описание которых можно провести по аналогии с описанием предыдущего п. 3.3.4.1, где это описание приведено применительно к внутреннему разрушению. Отметим, что на Рис. 3.39, как и на Рис. 3.35 и 3.36, темными кружочками изображены поперечные сечения волокон. При исследовании поверхностной неустойчивости волокнистых однонаправленных композитов анализируются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от границы нижнего полупространства на Рис. 3.39, что определяется дополнительным условием. При формировании структуры решения дополнительно к структуре решения предыдущего пункта 3.3.4.1 вводится дополнительное слагаемое в виде интегрального преобразования Фурье, обеспечивающее удовлетворение граничным условиям на плоской границе нижнего полупространства. С учетом вышеуказанной структуры представления решения в дальнейшем применялся метод решения, информация о котором представлена перед **Примером** предыдущего п. 3.3.4.1.

Конкретные результаты получены о приповерхностном разрушении однонаправленных волокнистых композитов с полимерной и металлической матрицами. Достаточно подробное изложение результатов по рассматриваемой проблеме представлено в монографии [57] (т. 1, глава 6).

**3.3.4.3. О построении метода исследования для сложных форм потери устойчивости волокнистых однонаправленных композитов.** При исследовании устойчивости волокнистых однонаправленных композитов (п. 3.3.4.1 и 3.3.4.2) в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела) и ТЛТУДТ (§2 настоящей обзорной статьи) во всех анализируемых формах потери устойчивости выделялся множитель  $\sin \pi l^{-1} x_3$ , где координата  $x_3$  отсчитывается вдоль волокон и  $l$  – длина полуволны формы потери устойчивости также вдоль волокон. Таким образом, в рамках модели «бесконечно длинных волокон» принималось, что каждый из армирующих элементов (волокна) теряет устойчивость по одинаковой периодической форме потери устойчивости вдоль волокон. В определенном смысле подтверждением реализации вышеуказанных форм потери устойчивости являются результаты экспериментальных исследований для композитов с полимерной (эпоксидная смола) матрицей; результаты таких экспериментов представлены на Рис. 3.5 – для композита со стеклянными волокнами и на Рис. 3.6 – для композита с углеродными волокнами.

При рассматриваемых формах потери устойчивости *плоскости с одинаковой фазой* в форме потери устойчивости (вдоль координаты  $x_3$ , вдоль волокон) в композите *расположены перпендикулярно* оси  $Ox_3$  (перпендикулярно волокнам); в связи с этим, по-видимому, можно считать, что разрушение распространяется по указанным плоскостям. В определенном смысле подтверждением вышеуказанной процедуры относительно форм потери устойчивости является *строгое доказательство* (п. 3.3.2.1) в рамках континуальной теории разрушения (п. 3.3.2) того, что (при хрупком разрушении) разрушение распространяется по плоскостям, которые являются перпендикулярными направлению действия сжимающих нагрузок. Отметим, что в континуальной теории разрушения (п. 3.3.2) рассматривается сжатие вдоль направления преимущественного армирования (в данном случае – вдоль волокон и слоев). Все же приведенные рассуждения с привлечением результатов континуальной теории для обоснования одного из составляющих моментов теории в рамках модели кусочно-однородной среды являются недостаточно логичными и последовательными, поскольку континуальная теория разрушения является приближенной и менее строгой по сравнению с теорией на базе модели кусочно-однородной среды.

В связи с вышеизложенным представляется достаточно целесообразным разработка метода исследования в теории устойчивости волокнистых однонаправленных композитов, позволяющего анализировать более общие формы потери устойчивости по сравнению с формами потери устойчивости, которые рассмотрены в пп. 3.3.4.1 и 3.3.4.2. Безусловно, наряду с разработкой метода исследования также весьма необходимым является анализ конкретных классов задач для формирования общих выводов.

В статье [319] для волокнистых однонаправленных композитов (Рис. 3.1) при одноосном сжатии вдоль волокон для наиболее сложной двоякопериодической структуры, которая показана в плоскости поперечного сечения (на Рис. 3.35 *д*), предложен метод исследования для более сложных форм потери устойчивости. Метод статьи предназначен для исследований в рамках модели «бесконечно длинных волн» (вдоль оси  $Ox_3$ ), когда сжатие осуществляется вдоль оси  $Ox_3$  и формы потери устойчивости также являются периодическими вдоль оси  $Ox_3$ , но плоскости  $\Pi$  на Рис. 3.32 с одинаковой фазой вдоль  $Ox_3$  (в форме потери устойчивости) занимают произвольное положение, определяемое ортом  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости  $\Pi$ . Для волокнистых однонаправленных композитов в [319] в круговых цилиндрических (локальных для каждого волокна) координатах построены в явном виде решения статических уравнений ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи), соответствующие произвольному положению плоскости  $\Pi$ , применительно к наиболее сложной двоякопериодической структуре, которая в плоскости поперечного сечения показана на Рис. 3.35 *д*. Для обсуждаемого случая в [319] отмечено, что при реализации рассматриваемого метода исследования получаем характеристическое уравнение в виде бесконечного определителя; при этом

доказывается, что бесконечный определитель является определителем нормального типа для несоприкасающихся волокон, что в свою очередь обосновывает возможность определения корней методом усечения бесконечного определителя при численном исследовании, практическая же сходимости достигается путем сравнения результатов при увеличении порядка усеченного определителя. Целесообразно отметить, что применительно к обсуждаемым формам потери устойчивости при сжатии волокнистого однонаправленного композита относятся сведения п. 3.3.1 об общности подхода **второго направления** и его полному соответствию общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных задач; лишь в силу выполнения достаточных условий применимости метода Эйлера в [319] ограничились построением решений статических уравнений ТЛТУДТ.

Безусловно, подход [319] позволяет осуществить (при соответствующих изменениях) переход к более простым периодическим структурам для волокнистых однонаправленных композитов, которые в плоскости поперечного сечения показаны на Рис. 3.35, *в, г*. В настоящее время конкретные результаты получены лишь для простейшей периодической структуры, для которой поперечное сечение однонаправленного волокнистого композита представлено на Рис. 3.35, *в* – это один периодический ряд волокон в бесконечной матрице. К расчетной схеме, представленной на Рис. 3.35, *в*, приходим в случае волокнистых однонаправленных композитов *периодической* структуры, когда при потере устойчивости волокон в пределах одного ряда взаимодействуют между собой, а соседние ряды волокон не взаимодействуют между собой (весьма малые расстояния между соседними волокнами в одном ряду, весьма большие расстояния между соседними рядами). Обсуждаемые результаты представлены в статьях [405] за 2002 г., [406] за 2005 г. и (первоначального характера) в [425] за 1991 г. в рамках **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) в соответствии с терминологией п. 2.2 настоящей статьи для хрупкого разрушения (при моделировании материалов волокон и матрицы линейно-упругим изотропным телом); краткое изложение обсуждаемых результатов представлено в обзорной статье [65] на стр. 43 – 46. В вышеуказанных публикациях сделан следующий вывод – **в исследуемой ситуации наименьшее критическое напряжение соответствует форме потери устойчивости, когда плоскость П (Рис. 3.32) перпендикулярна волокнам при сжатии вдоль волокон**. Этот вывод соответствует экспериментальным результатам, изложенным в п. 3.2.1, и методам исследования внутреннего разрушения, применяемым в п. 3.3.3.1 для слоистых композитов и в п. 3.3.4.1 для волокнистых однонаправленных композитов, в рамках модели кусочно-однородного материала (среды, тела) и ТЛТУДТ (§2 настоящей обзорной статьи).

В заключение к п. 3.3.4 целесообразно отметить следующую ситуацию. В этом пункте в весьма краткой форме обсуждены основные результаты по механике хрупкого и пластического внутреннего и приповерхностного разрушения волокнистых однонаправленных композитов при сжатии вдоль волокон, полученные в рамках модели кусочно-однородной среды и ТЛТУДТ (§2 настоящей статьи) *применительно к волокнам кругового поперечного сечения*. В вышеуказанной постановке также получены соответствующие результаты для волокнистых однонаправленных композитов с *волокнами некругового поперечного сечения*; указанные результаты представлены в статьях [82, 409, 410, 538, 539], а также в других статьях, которые не вошли в список литературы к настоящей обзорной статье.

Вышеизложенными сведениями ограничимся в §3 настоящей обзорной статьи при изложении и анализе результатов по **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*).

**Заключение к §3.** Необходимо отметить, что §3, посвященный **Проблеме 1**, в настоящей обзорной статье занимает существенный объем; указанная ситуация объясняется следующими тремя соображениями.

1. Автор настоящей обзорной статьи и его ученики занимаются исследованиями по **Проблеме 1** уже 50 лет; первые статьи были опубликованы еще в 1969 г. ([25, 26]).

2. По **Проблеме 1** получены существенные результаты в монографиях, статьях и докладах на международных конференциях; основные публикации, указанные в списке литературы к настоящей обзорной статье, отмечены во вводной части §3.

3. Полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики имени С.П.Тимошенко НАНУ результаты по **Проблеме 1** уже получили определенное признание мирового научного сообщества. В качестве примера можно указать публикацию специального выпуска известного журнала «Applied Mechanics Reviews» (USA) еще в 1992 г.

Micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Reviews (Special Issue, A.N.Guz – Guest Editor). – 1992. – 45, № 2. – P. 13 – 101.

Обсуждаемый специальный выпуск включен в список литературы настоящей обзорной статьи под № 534, где указаны названия статей, входящих в этот выпуск, и их авторы.

В связи с вышеизложенной ситуацией (большой объем §3) описание результатов и их анализ применительно к **Проблемам 2 – 8** будут представлены в более сокращенном виде.

**§4. Проблема 2. Модель коротких волокон в теории устойчивости и в механике разрушения композитных материалов при сжатии.**

В настоящем параграфе в достаточно краткой форме (по сравнению с **Проблемой 1**, §3 настоящей статьи) излагаются основные результаты по обсуждаемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ с 1999 г.; при этом изложение рассматриваемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении в настоящую статью (без привлечения аспектов математического характера). Также приведена информация о некоторых результатах экспериментальных исследований, соответствующих формированию обсуждаемой проблемы.

Основные результаты по рассматриваемой проблеме, полученные сотрудниками отдела динамики и устойчивости сплошных сред, представлены в монографии [64] за 2015 г., в обзорной статье [65] за 2016 г. и в статьях [66, 67, 252 – 254, 362 – 368, 504], а также в ряде других, которые не вошли в список литературы к настоящей статье; более подробный список литературы представлен в монографии [64] и в обзорной статье [65].

По рассматриваемому научному направлению подготовлена и защищена диссертация на степень доктора физико-математических наук (DSc) В.А.Декретом.

Целесообразно отметить, что композитные материалы создаются как со сравнительно длинными волокнами (предмет рассмотрения механики разрушения для этих материалов при сжатии в **Проблеме 1**), так и с достаточно короткими волокнами (армирующими элементами). При экспериментальных исследованиях при сжатии в случае композитов с короткими волокнами было обнаружено явление потери устойчивости во внутренней структуре композита с формами потери устойчивости, которые *не являются периодическими* вдоль осей волокон и которые характерны для коротких волокон в матрице. Теория устойчивости при сжатии в рассматриваемом случае, что соответствует построению механики разрушения, описывающей начало (старт) разрушения, была развита с привлечением ТЛТУДТ (§2 настоящей обзорной статьи), построенной с обычно принятой точностью в механике деформируемых тел; основные результаты были получены автором и его учениками, включая и конкретные результаты в рамках плоской задачи для композитов различной структуры.

**4.1. Экспериментальные результаты по потере устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии. Случай коротких волокон.** Прежде всего, как и в п. 3.2.1 для случая «длинных» волокон, так и в настоящем п. 4.1 для случая «коротких» волокон, необходимо отметить, что анализируемое явление (потеря устойчивости во внутренней структуре) *не наблюдается для однородных материалов (в рамках модельных представлений)*; оно характерно только для композитов (как для структурно-неоднородных материалов, в которых наличие внутренней структуры учитывается на различных уровнях их анализа). Модель «бесконечно длинных воло-

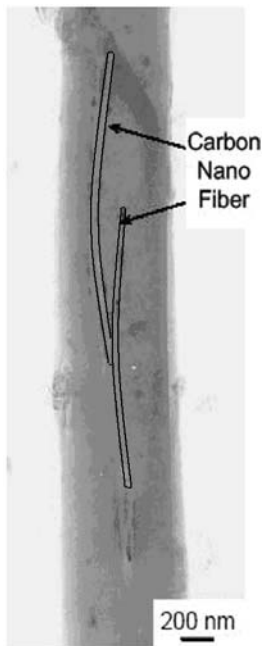


Рис. 4.1

кон», очевидно, применима к сравнительно длинным волокнам (армирующим элементам). *A priori* можно ожидать, что в случае сравнительно коротких армирующих элементов (волокон) формы потери устойчивости во внутренней структуре композита могут существенно отличаться от форм потери устойчивости, представленных на Рис. 3.4 – 3.6 и соответствующих модели «бесконечно длинных волокон». В качестве примера рассмотрим результаты экспериментальных исследований, опубликованных в статье [554] в 2004 г. и относящихся к устойчивости достаточно коротких углеродных нановолокон в полимерной матрице. На Рис. 4.1, соответствующем публикации [554], показаны формы потери устойчивости двух коротких углеродных нановолокон; причем в правом нижнем углу Рис. 4.1 указан масштаб изображения в нанометрах. Формы потери устойчивости на Рис. 4.1 не имеют ничего общего с формами потери устойчивости, которые представлены на Рис. 3.4 – 3.6. Так, на Рис. 3.4 – 3.6 формы потери устойчивости являются периодическими синусоидальными (вдоль волокон) формами с достаточно большим числом периодов; на Рис. 4.1 формы потери устойчивости коротких нановолокон приближенно могут быть аппроксимированы синусоидальными формами с одним полупериодом, в этом случае величины критических значений нагрузок и укорочений существенно зависят от граничных условий на торцах армирующих элементов (волокон).

Таким образом, можно считать, что вышеприведенные сведения, относящиеся к Рис. 4.1, являются экспериментальным обоснованием модели «волокон конечных размеров».

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, относящиеся к Рис. 3.4 – 3.6 и 4.1, можно считать, что модель «бесконечно длинных волокон» и модель «волокон конечных размеров» имеют экспериментальное обоснование, но они применимы к различного типа композитам. Так, модель «бесконечно длинных волокон» применима к композитам со сравнительно длинными армирующими элементами (волоконками); модель же «волокон конечных размеров» применима к композитам с достаточно короткими армирующими элементами (волоконками); заметим, что отмеченные соображения, следующие из экспериментальных результатов на Рис. 3.4 – 3.6 и 4.1, относятся лишь к исследованию явления потери устойчивости во внутренней структуре композита.

**4.2. Постановка задач.** Прежде всего, отметим, что в настоящем §4 рассматриваются композиты, образованные короткими волокнами (в качестве армирующих элементов, наполнителя), которые находятся в матрице (связующем). При этом принимается, что указанные композиты имеют оси симметрии свойств материала; следует отметить, что чрезвычайно сложно создавать элементы конструкций из материалов, не имеющих осей симметрии свойств материала; в связи с этим вышеизложенное предположение представляется вполне целесообразным. Наличие осей симметрии свойств композита обеспечивается способом укладки армирующих элементов (в рассматриваемом случае – коротких волокон).

При сжатии вдоль осей симметрии свойств композита в соответствии с **Общей концепцией** внутреннего разрушения (п. 3.1.1) и **Общей концепцией** приповерхностного разрушения (п. 3.1.3.2) *старт (начало) разрушения в рассматриваемых случаях определяется появлением потери устойчивости во внутренней структуре композита (внутренняя неустойчивость) или в приповерхностных слоях внутренней структуры композита (приповерхностная неустойчивость)*. Таким образом, при указанном сжатии построение механики разрушения осуществляется построением теории внутренней и приповерхностной потери устойчивости рассматриваемых композитов.

В настоящем §4 приводятся в краткой форме основные результаты, полученные автором статьи и его учениками, по построению механики разрушения (в указанном выше смысле) при сжатии композитов, армированных короткими волокнами (в качестве наполнителя); обсуждаемые результаты получены в рамках модели кусочно-однородной среды (тела, материала) и ТЛГУДТ, основы которой изложены в §2 настоящей обзорной статьи. Как уже неоднократно отмечалось, указанный подход (модель кусочно-однородной среды с привлечением ТЛГУДТ) является наиболее последовательным и строгим в механике деформируемых тел.

Ниже на Рис. 4.2, *a*, ... , *e* приведены основные наиболее простые расчетные схемы, относящиеся к **Проблеме 2** (*Модель коротких волокон в теории устойчивости и в механике разрушения композитов при сжатии*), когда «на бесконечности» (при  $x_1 = \pm\infty$ ) композит сжимается усилиями интенсивности  $P = \text{const}$ .

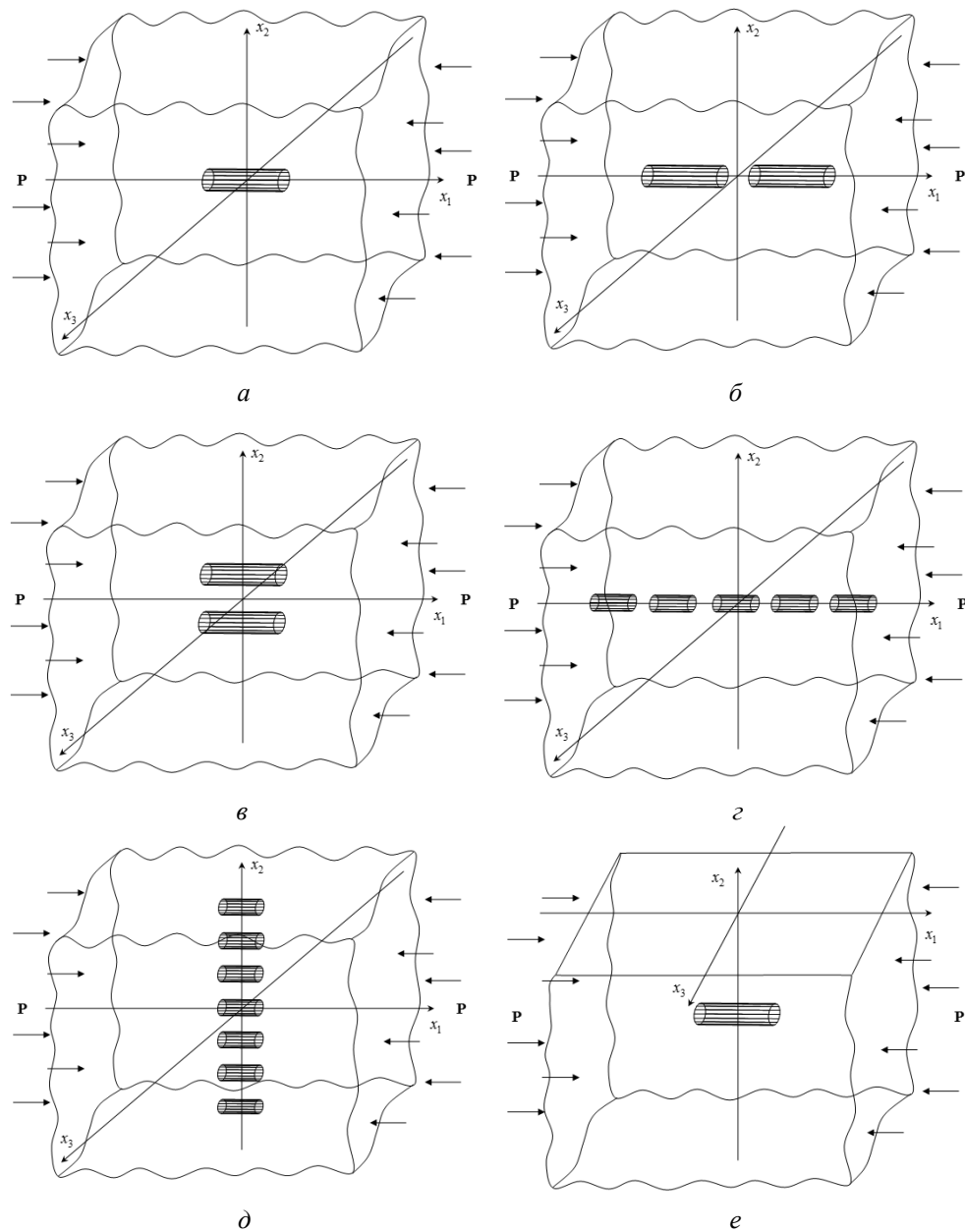


Рис. 4.2

1. Одно короткое волокно (Рис. 4.2, *a*) – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда соседние волокна не взаимодействуют между собой ни в докритическом состоянии, ни при потере устойчивости. В этом случае рассматривается одно волокно в бесконечной (по координатам  $x_1, x_2, x_3$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от волокна (при  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \pm\infty$ ).

2. Два коротких волокна, расположенных на одной линии (Рис. 4.2, *б*), – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры могут взаимодействовать два соседних волокна (Рис. 4.2, *б*) в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматриваются два волокна (Рис. 4.2, *б*) в бесконечной (по координатам  $x_1, x_2, x_3$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от волокна (при  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \pm\infty$ ).

3. Два коротких волокна, расположенных параллельно (Рис. 4.2, *в*), – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры могут взаимодействовать два соседних волокна (Рис. 4.2, *в*) в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматриваются два волокна (Рис. 4.2, *в*) в бесконечной (по координатам  $x_1, x_2, x_3$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от волокна (при  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \pm\infty$ ).

4. Один периодический ряд коротких волокон, расположенных на одной линии (Рис. 4.2, *г*), – для композита периодической структуры, когда в докритическом состоянии и при потере устойчивости два соседних волокна в пределах одного периодического ряда взаимодействуют между собой, а соседние ряды волокон не взаимодействуют между собой (малые расстояния между соседними волокнами в одном ряду, весьма большие расстояния между соседними рядами). В этом случае рассматривается периодический ряд волокон (Рис. 4.2, *г*) в бесконечной (по координатам  $x_2$  и  $x_3$ ) матрице при выполнении условий периодичности по координате  $x_1$  и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от ряда волокон (при  $x_2$  и  $x_3 \rightarrow \pm\infty$ ) и которые являются периодическими по координате  $x_1$ .

5. Один периодический в направлении оси  $0x_2$  ряд коротких волокон, расположенных параллельно (Рис. 4.2, *д*) – для композита периодической структуры, когда в докритическом состоянии и при потере устойчивости два соседних волокна в пределах одного периодического ряда взаимодействуют между собой, а соседние ряды волокон не взаимодействуют между собой (малые расстояния между соседними волокнами в пределах одного периодического ряда, весьма большие расстояния между соседними рядами). В этом случае рассматривается периодический (по координате  $x_2$ ) ряд волокон (Рис. 4.2, *д*) в бесконечной (по координатам  $x_1$  и  $x_3$ ) матрице при выполнении условий периодичности по координате  $x_2$  и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от ряда волокон (при  $x_1$  и  $x_3 \rightarrow \pm\infty$ ) и которые являются периодическими по координате  $x_2$ .

6. Одно короткое волокно вблизи свободной поверхности  $x_2 = 0$  (Рис. 4.2, *e*) – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда соседние волокна не взаимодействуют между собой ни в докритическом состоянии, ни при потере устойчивости; при этом в силу нерегулярности структуры существуют волокна, расположенные вблизи свободной поверхности  $x_2 = 0$  и взаимодействующие со свободной поверхностью и в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматривается одно волокно в полубесконечной матрице (в нижнем полупространстве ( $x_2 \leq 0$ )), которое взаимодействует с границей нижнего полупространства (на границе при  $x_2 = 0$  выполняются определенные граничные условия в докритическом состоянии и соответствующие однородные граничные условия при потере устойчивости);



при этом анализируются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от границы полупространства и волокна (при  $x_2 \rightarrow -\infty$ ) и при удалении только от волокна (при  $x_1$  и  $x_3 \rightarrow \pm\infty$ ).

Следует отметить, что шестая расчетная схема (Рис. 4.2, *e*) является самой *простейшей* расчетной схемой при исследовании приповерхностного разрушения; безусловно, количество простейших расчетных схем при исследовании приповерхностного разрушения можно существенно расширить, если в расчетных схемах, представленных на Рис. 4.2, *b – d*, предусмотреть введение границы полупространства.

Вышеизложенные расчетные схемы (Рис. 4.2, *a – e*) при применении математического аппарата ТЛТУДТ, изложенного в §2 настоящей обзорной статьи, являются самыми простейшими расчетными схемами механики разрушения композитов, армированных короткими волокнами в качестве наполнителя, при сжатии вдоль волокон (применительно к внутреннему и приповерхностному разрушениям) в случае проведения исследований в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела). Возникающие при этом задачи являются *сугубо трехмерными (пространственными)* задачами ТЛТУДТ; как уже отмечалось в п. 3.3.1, при действии внешних нагрузок в виде «мертвых» нагрузок, что общепринято в механике композитов, *строго доказано выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования устойчивости* (п. 2.4.2 – первый результат) и, таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к *трехмерным статическим задачам на собственные значения, т.е. применяется метод Эйлера*. Таким образом, обсуждаемые исследования в рамках **второго направления или подхода** (п. 3.1.3) полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных *динамических* задач.

Как уже отмечалось выше, сформулированные задачи механики разрушения композитов, армированных короткими волокнами, при сжатии вдоль волокон, расчетные схемы для которых представлены на Рис. 4.2, *a – e*, являются *статическими трехмерными (пространственными) задачами ТЛТУДТ*. Для композитов существуют и *двумерные статические задачи ТЛТУДТ*, для которых расчетные схемы являются *двумерным аналогом* трехмерных статических задач и расчетных схем, представленных на Рис. 4.2, *a – e*, – это двумерные задачи (плоская деформация) композитов ленточной структуры.

**Композиты ленточной структуры.** Обычно под композитами ленточной структуры понимаются композиты, в которых наполнителем являются тонкие ленты различной формы. В настоящем §4 будем рассматривать композиты, в которых наполнителем являются достаточно длинные ленты плоской формы, расположенные параллельно и имеющие форму поперечного сечения постоянную вдоль всей длины.

При построении расчетных схем армирующие ленты будем считать бесконечными в направлении оси  $0x_3$  ( $-\infty < x_3 < +\infty$ , ось  $0x_3$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка); в этом случае можно рассматривать двумерные задачи (плоская деформация) в плоскости  $x_1 0x_2$  и поперечное сечение ленты будем называть армирующим элементом, что и представлено на Рис. 4.3, *a – e* темным цветом. На Рис. 4.3, *a – e* представлено в плоскости  $x_1 0x_2$  шесть расчетных схем, визуально соответствующих Рис. 4.2, *a – e*, где армирующие элементы (поперечные сечения лент) представлены темными прямоугольниками; кратко рассмотрим описание указанных на Рис. 4.3, *a – e* шести расчетных схем, учитывая аналогию в описании шести расчетных схем, представленных трехмерных (пространственных) задач ТЛТУДТ на Рис. 4.2, *a – e*.

1. Один армирующий элемент (Рис. 4.3, *a*) – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда соседние армирующие элементы не взаимодействуют между собой ни в докритическом состоянии, ни при потере устойчивости. В этом случае рассматривается один армирующий элемент в бесконечной (по координатам  $x_1$  и  $x_2$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от армирующего элемента (при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ ).

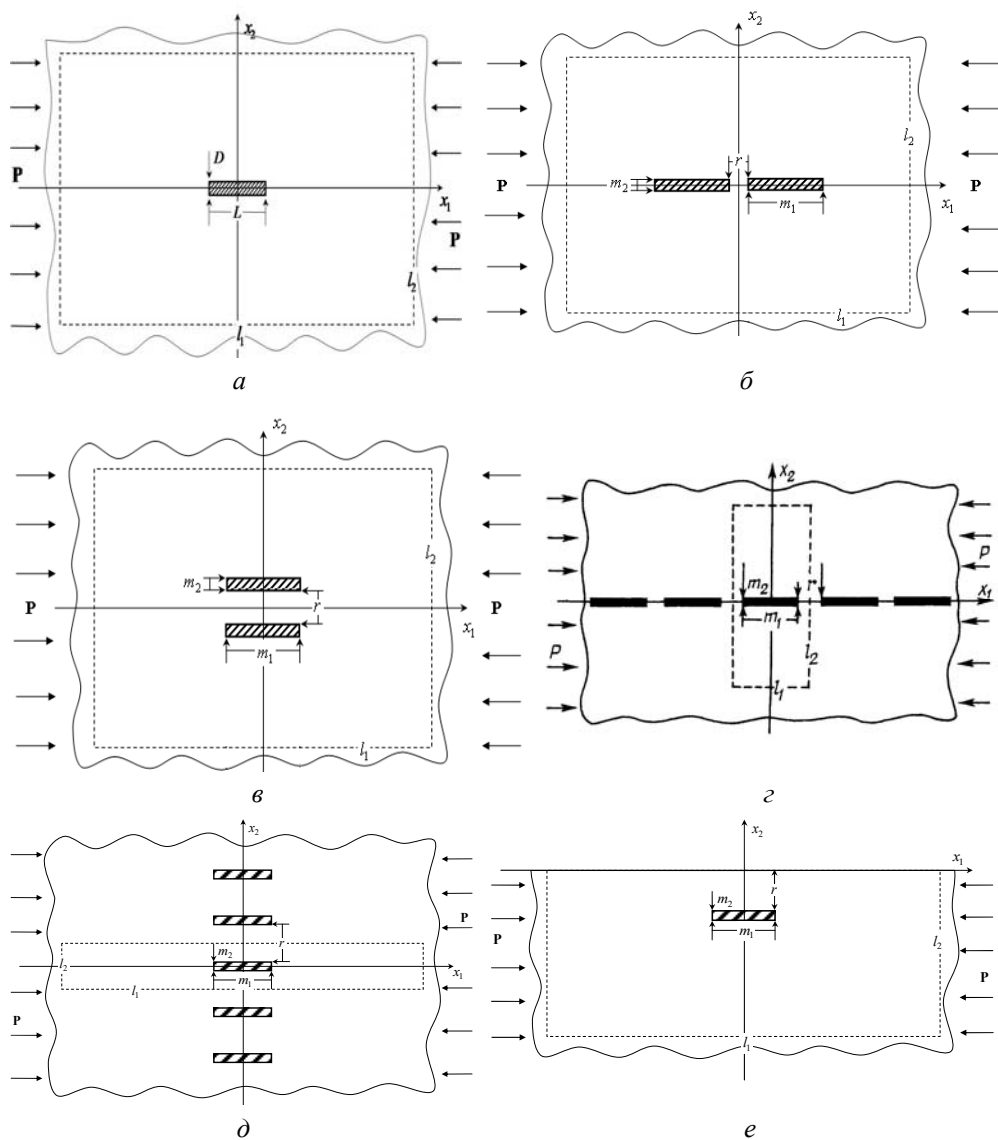


Рис. 4.3

2. Два армирующих элемента, расположенных на одной линии (Рис. 4.3, б), – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры могут взаимодействовать два соседних армирующих элемента (Рис. 4.3, б), расположенных на одной линии, в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматриваются два соседних армирующих элемента, расположенных на одной линии (Рис. 4.3, б), в бесконечной (по координатам  $x_1$  и  $x_2$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от двух соседних армирующих элементов (при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ ).

3. Два армирующих элемента, расположенных параллельно (Рис. 4.3, в), – для композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры могут взаимодействовать два соседних армирующих элемента (Рис. 4.3, в), расположенных параллельно, в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматриваются два соседних армирующих элемента, расположенных параллельно (Рис. 4.3, в), в бесконечной (по координатам  $x_1$  и  $x_2$ ) матрице и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от двух соседних армирующих элементов (при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ ).

дуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от двух армирующих элементов (при  $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ ).

4. Один периодический ряд армирующих элементов, расположенных на одной линии (Рис. 4.3,  $\varepsilon$ ), – для композита периодической структуры, когда в докритическом состоянии и при потере устойчивости два соседних армирующих элемента в пределах одного периодического ряда взаимодействуют между собой, а соседние периодические ряды армирующих элементов не взаимодействуют между собой (малые расстояния между двумя соседними армирующими элементами в одном периодическом ряду, весьма большие расстояния между соседними периодическими рядами армирующих элементов). В этом случае рассматривается один периодический ряд армирующих элементов, расположенных на одной линии (Рис. 4.3,  $\varepsilon$ ), в бесконечной (по координате  $x_2$ ) матрице при выполнении условий периодичности по координате  $x_1$  и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от периодического ряда армирующих элементов (при  $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ) и которые являются периодическими по координате  $x_1$ .

5. Один периодический в направлении оси  $0x_2$  ряд армирующих элементов, расположенных параллельно (Рис. 4.3д) – для композита периодической структуры, когда в докритическом состоянии и при потере устойчивости два соседних армирующих элемента в пределах одного периодического ряда взаимодействуют между собой, а соседние периодические ряды армирующих элементов не взаимодействуют между собой (малые расстояния между двумя соседними армирующими элементами в одном периодическом ряду, весьма большие расстояния между соседними периодическими рядами армирующих элементов).

В этом случае рассматривается один периодический (по координате  $x_2$ ) ряд армирующих элементов (Рис. 4.3,  $\delta$ ), расположенных параллельно, в бесконечной (по координате  $x_1$ ) матрице при выполнении условий периодичности по координате  $x_2$  и исследуются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от ряда армирующих элементов (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) и которые являются периодическими по координате  $x_2$ .

6. Один армирующий элемент вблизи свободной поверхности  $x_2 = 0$  (Рис. 4.3,  $e$ ) – для композитов с малой концентрацией армирующих элементов, когда соседние армирующие элементы не взаимодействуют между собой ни в докритическом состоянии, ни при потере устойчивости; при этом в силу нерегулярности структуры существуют армирующие элементы, расположенные вблизи свободной поверхности  $x_2 = 0$  и взаимодействующие со свободной поверхностью и в докритическом состоянии и при потере устойчивости. В этом случае рассматривается один армирующий элемент в полубесконечной матрице (в нижней полуплоскости ( $x_2 \leq 0$ )), который взаимодействует с границей нижнего полупространства (на границе при  $x_2 = 0$  выполняются определенные граничные условия в докритическом состоянии и соответствующие однородные граничные условия при потере устойчивости); при этом анализируются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от границы полуплоскости и армирующего элемента (при  $x_2 \rightarrow -\infty$ ) и при удалении только от армирующего элемента.

Следует отметить, что шестая расчетная схема (Рис. 4.3,  $e$ ) является самой *простейшей* расчетной схемой при исследовании приповерхностного разрушения в рамках плоской задачи (плоская деформация); безусловно, количество простейших расчетных схем при исследовании приповерхностного разрушения в рамках плоской задачи (плоская деформация) можно существенно расширить, если в расчетных схемах, представленных на Рис. 4.3,  $\delta$ – $d$ , предусмотреть введение границы полуплоскости.

Вышеприведенные расчетные схемы (Рис. 4.3, *a – e*) при применении математического аппарата ТЛТУДТ, приведенного в §2 настоящей обзорной статьи, являются самыми простейшими расчетными схемами механики разрушения композитов (с наполнителем в виде рассматриваемых коротких армирующих элементов) при сжатии вдоль армирующих элементов (применительно к внутреннему и приповерхностному разрушениям) в случае проведения исследований в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела) для плоской задачи (плоская деформация). Возникающие при этом задачи являются *сугубо двухмерными* задачами ТЛТУДТ; как уже отмечалось в п. 3.3.1, при действии внешних нагрузок в виде «мертвых» нагрузок, что общепринято в механике композитов, *строго доказано выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования устойчивости* (п. 2.4.2 – первый результат) и, таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к *двухмерным статическим задачам на собственные значения, т.е. применяется метод Эйлера*. Таким образом, обсуждаемые исследования в рамках **второго направления или подхода** (п. 3.1.3) полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных *динамических* задач применительно к плоской задаче (плоской деформации).

Целесообразно отметить еще одно соображение, относящееся к постановке плоских задач (плоская деформация) в рамках второго направления или подхода (п. 3.1.3), расчетные схемы для которых приведены на Рис. 4.3, *a – e*. В рамках модели кусочно-однородной среды и **второго направления** в п. 3.3.3 изложены результаты для слоистых композитов применительно к плоской (Рис. 3.25) и пространственной (Рис. 3.26) задачам в случае внутреннего и приповерхностного разрушения; при этом слои наполнителя и связующего рассматривались достаточно длинными, что давало возможность считать их бесконечными. Если применительно к плоской задаче (Рис. 3.25) считать слои наполнителя короткими (конечных размеров), то приходим к различным схемам, представленным на Рис. 4.3, *a – e*; таким образом, для плоских задач в плоскости  $x_1 0x_2$  название «армирующий элемент» (применяемое при описании схем на Рис. 4.3, *a – e* для обозначения поперечного сечения наполнителя ленточной структуры) и название «короткий слой», которое можно применить для обозначения наполнителя в слоистом композите (Рис. 3.35), совпадает по смыслу. Следовательно, можно считать, что расчетные схемы на Рис. 4.3, *a – e* относятся к плоским задачам для слоистых композитов с наполнителем в виде коротких слоев, которые помещены в матрицу (связующее) и ориентированы вдоль оси  $0x_1$  (Рис. 4.3, *a – e*).

Таким образом, можно считать, что в настоящем п. 4.2 изложена постановка задач для композитов, армированных однонаправленными короткими волокнами и короткими слоями, при сжатии вдоль армирующих элементов с привлечением модели кусочно-однородной среды. При этом на Рис. 4.2, *a – e* представлены расчетные схемы для композита с короткими волокнами, которые соответствуют *трехмерным (пространственным)* задачам, и на Рис. 4.3, *a – e* представлены расчетные схемы для композита с короткими слоями, которые соответствуют *двухмерным (плоским)* задачам применительно к плоской деформации.

Целесообразно отметить, что в предыдущем §2 и в настоящем §3 обсуждаются результаты, которые относятся к достаточно близким проблемам и которые получены для различных расчетных схем, в основном, в рамках модели кусочно-однородных сред (материалов, тел); в связи с этим представляется уместным провести классификацию применяемых расчетных схем, чему и посвящен следующий пункт.

**4.3. Классификация расчетных схем. Об аналогиях.** В краткой форме рассмотрим классификацию расчетных схем, которые применяются в §§2 и 3 настоящей обзорной статьи в рамках *модели кусочно-однородной среды*. Заметим, что модель кусочно-однородной среды (материала, тела) заключается в том, что для описания деформирования матрицы и отдельно каждого элемента наполнителя применяются соотношения *различных* однородных деформируемых тел; при этом на границах раздела

наполнителя и матрицы (interface) обеспечивается выполнение определенных (различных в зависимости от постановки задач) условий непрерывности векторов напряжений и перемещений. Дополнительно отметим, что в модели кусочно-однородной среды (в широком смысле) для описания деформирования матрицы и каждого элемента наполнителя *необязательно* применение трехмерных строгих соотношений классических моделей механики деформируемых тел; возможно применение упрощенных или усложненных вышеуказанных соотношений с соответствующими расчетными схемами, при этом условия на поверхности раздела также формулируются в рамках принятых расчетных схем.

Учитывая вышеизложенные сведения вводного характера, в настоящем п. 4.3 выделим три типа расчетных схем общего характера, которые применяются при построении механики разрушения однонаправленных волокнистых и слоистых композитов при сжатии и которые ниже представлены в виде трех отдельных пунктов.

**4.3.1. Модель бесконечно длинных волокон и слоев в рамках первого направления исследований.** Рассматриваются достаточно длинные волокна и слои (в качестве наполнителя, при этом в случае слоистых композитов, естественно, рассматриваются и достаточно длинные слои матрицы); в этом случае в расчетных схемах волокна и слои считаются бесконечно длинными и исследуются периодические (синусоидальные) вдоль волокон и слоев формы потери устойчивости. В вышеизложенной ситуации, очевидно, в случае волокнистых композитов исследования необходимо проводить в *трехмерной (пространственной) постановке* и в случае слоистых композитов можно ограничиться исследованием в *двухмерной постановке* (в рамках плоской деформации).

С применением обсуждаемого в настоящем п. 4.3.1 подхода исследования проводятся в рамках **первого направления (весьма приближенные подходы)**, краткое описание которого с указанием характерных *приближенных допущений* представлено в п. 3.1.2; следует отметить, что вышеуказанные приближенные допущения вносятся в основные соотношения для наполнителя и матрицы, а также в условия на границе раздела.

Вышеотмеченные характеристики особенностей **первого направления** четко проявляются при рассмотрении общеизвестных и общепринятых публикаций [551] и [161], результаты которых вошли в фундаментальные коллективные издания по разрушению [160] и по композитным материалам [127]; краткие сведения по последовательному анализу и выводам из этого анализа по публикациям [551] и [161] представлены в п. 3.3.3.3 настоящей обзорной статьи. *Фактически исследования в [551] и [161] проводятся в рамках плоской задачи в плоскости  $xOy$*  (Рис. 3.33 соответствует Фиг. 3.22 в [551] и [161]) и *армирующие элементы при этом называются волокнами; в действительности же на Рис. 3.33 (Фиг. 3.22) армирующие элементы (в рамках плоской задачи) являются полосами*, соответствующими поперечному сечению слоистых композитов.

Таким образом, в [551] и [161] рассматривается фактически плоская задача для слоистого композита и полученные конкретные результаты Рис. 3.33 (Фиг. 3.23 и 3.24) также относятся к плоской задаче; при обсуждении результатов применяется терминология, соответствующая *волокнистому композиту*, хотя для волокнистого композита *необходимо* проводить исследования в рамках *трехмерной (пространственной) постановки*, соответствующей, например, Рис. 4.2, *a – e*. Учитывая вышеизложенное, можно считать, что в [551] и [161] предложен **приближенный подход** к исследованию *волокнистых* композитов, который заключается в следующем:

- 1) исследования проводятся в *рамках плоской задачи для слоистых* композитов;
- 2) полученные результаты количественного характера для *слоистых* композитов применяются для анализа явлений, которые возникают в *волокнистых* композитах;
- 3) применяется терминология, характерная для *волокнистых* композитов, называя *волокнами* армирующие элементы в рамках плоской задачи (в рамках плоской задачи армирующие элементы являются *полосами*).

Дополнительно следует отметить, что в вышеуказанном **приближенном подходе** вопрос о существовании *аналогии* между *слоистыми* и *волокнистыми* композитами при их исследовании не ставится и не комментируется. К тому же результаты [551] и [161] в рамках плоской задачи для слоистых композитов, полученные с привлечением **первого подхода** (п. 3.1.2), являются достаточно приближенными; как уже отмечалось, точность обсуждаемых результатов рассмотрена в п. 3.3.3.3.3 настоящей обзорной статьи.

**4.3.2. Модель бесконечно длинных волокон и слоев в рамках второго направления исследований.** Как и в предыдущем п. 4.3.1, рассматриваются достаточно длинные волокна и слои (в качестве наполнителя, при этом в случае слоистых композитов, естественно, рассматриваются и достаточно длинные слои матрицы); в этом случае в расчетных схемах волокна и слои считаются бесконечно длинными и исследуются периодические (синусоидальные) вдоль волокон и слоев формы потери устойчивости, что соответствует результатам экспериментальных исследований (Рис. 3.4 – 3.6). В вышеизложенной ситуации, как уже отмечалось в предыдущем п. 4.3.1, очевидно, в случае волокнистых композитов исследования необходимо проводить в *трехмерной (пространственной)* постановке и в случае слоистых композитов можно ограничиться исследованиями в *двухмерной* постановке (в рамках плоской деформации). С применением обсуждаемой в настоящем п. 4.3.2 модели исследования проводятся в рамках **второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ)**, краткое описание которого с указанием характерных моментов представлено в п. 3.1.3.

Информация о результатах, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела) и ТЛТУДТ для упругих и пластических тел с определяющими соотношениями достаточно общего вида, представлена для *волокнистых* композитов в *трехмерной (пространственной)* постановке в п. 3.3.4 настоящей обзорной статьи; наиболее полное изложение обсуждаемых результатов помещено в главах 4 и 6 монографии [57] (т. 1). Информация о результатах, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды (материала, тела) и ТЛТУДТ для упругих и пластических тел с определяющими соотношениями достаточно общего вида, представлена для *слоистых* композитов в *трехмерной (пространственной)* постановке (Рис. 3.26) и в частном случае (для плоской деформации, Рис. 3.25) в *двухмерной* постановке в п. 3.3.3 настоящей обзорной статьи; наиболее полное изложение обсуждаемых результатов помещено в главах 3 и 5 монографии [57] (т. 1).

Из вышеизложенной информации об обсуждаемых результатах для волокнистых и слоистых композитов, полученных с привлечением модели бесконечно длинных волокон и слоев, а также модели кусочно-однородной среды в рамках **второго направления** (п. 3.1.3) следует, что в рассматриваемой ситуации *не возникает потребность* ставить вопрос о существовании *аналогий* между *волокнистыми* и *слоистыми* композитами при их исследовании. Основанием для вышеизложенного вывода является то положение, что все обсуждаемые в п. 4.3.2 результаты получены в *трехмерной (пространственной)* постановке для волокнистых и слоистых композитов с полимерной и металлической матрицей и с привлечением ТЛТУДТ, что составляет основу **второго направления** (п. 3.1.3); лишь для плоской задачи (плоская деформация) применительно к слоистым композитам (Рис. 3.25) исследования проведены в *двухмерной* постановке, которая в рассматриваемом случае *строго следует из трехмерной (пространственной)* постановки. Как уже отмечалось в п. 3.3.1, исследования в рамках **второго направления** (второго подхода) полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач. Кроме того, модель кусочно-однородной среды и привлечение аппарата ТЛТУДТ, что характерно для **второго направления**, составляют самый строгий подход в механике разрушения композитов при сжатии, который можно представить в рамках механики деформируемого тела.

Вышеизложенные соображения относятся также и ко всем результатам, которые обсуждаются в п. 4.3.2.

**4.3.3. Модель коротких волокон и слоев в рамках второго направления исследования.** В отличие от пп. 4.3.1 и 4.3.2, в настоящем п. 4.3.3 рассматриваются композиты с достаточно короткими армирующими элементами, когда для обсуждаемой ситуации неприменима модель бесконечно длинных волокон и слоев; в этом случае и формы потери устойчивости, как следует из экспериментальных исследований (Рис. 4.2), имеют уже другой характер – они не являются периодическими вдоль оси армирующих элементов при сжатии также вдоль армирующих элементов.

**Примечание 4.1.** Характерной особенностью исследуемых задач в рамках модели п. 4.3.3 является *неоднородное докритическое состояние (трехмерное – в общем случае волокнистых и слоистых композитов и двухмерное – в частном случае плоских задач для слоистых композитов)*.

В рамках модели настоящего пункта исследуются задачи для волокнистых и слоистых композитов.

В случае волокнистых композитов рассматривается бесконечная матрица, армированная короткими волокнами; простейшие расчетные схемы в этом случае для исследования внутреннего разрушения (внутренней неустойчивости) и приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости) приведены на Рис. 4.2, *a – e*. Рассматриваемые задачи сводятся к *трехмерным* статическим задачам ТЛТУДТ (в силу проведения исследования в рамках **второго направления**) на собственные значения; характерной особенностью обсуждаемых задач является зависимость коэффициентов соответствующих систем дифференциальных уравнений от *трех пространственных переменных*.

**Примечание 4.2.** В силу вышеизложенных сведений конкретные результаты для волокнистых композитов, армированных короткими волокнами, для расчетных схем на Рис. 4.2а-е возможны лишь при *привлечении численных методов и компьютерной механики*. В настоящее время конкретные результаты для расчетных схем на Рис. 4.2, *a – e* еще не получены ни для **первого направления**, краткое описание которого представлено в п. 3.1.2, ни для **второго направления**, краткое описание которого представлено в п. 3.1.3.

В случае слоистых композитов возможно рассмотрение *двухмерных* задач, соответствующих плоской деформации в плоскости  $x_1 0x_2$  на Рис. 4.3, *a – e* для композитов ленточной структуры; в этом случае наполнителем являются достаточно длинные ленты плоской формы, которые являются параллельными вдоль оси  $0x_3$  (ось  $0x_3$  направлена по перпендикуляру к плоскости Рис. 4.3, *a – e*) и имеющими форму поперечного сечения постоянной вдоль всей длины. В обсуждаемой ситуации рассматриваются двухмерные задачи в плоскости поперечного сечения для бесконечной двухмерной матрицы, армированной короткими армирующими элементами, соответствующими поперечным сечениям лент; простейшие расчетные схемы в этом случае для исследования внутреннего разрушения (внутренней неустойчивости) и приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости) приведены на Рис. 4.3, *a – e*. Рассматриваемые задачи сводятся к *двухмерным* статическим задачам ТЛТУДТ (в силу проведения исследования в рамках **второго направления**) на собственные значения; характерной особенностью обсуждаемых задач является зависимость коэффициентов соответствующих систем дифференциальных уравнений от *двух пространственных переменных*.

**Примечание 4.3.** В силу вышеизложенных сведений конкретные результаты для слоистых композитов с короткими армирующими элементами в рамках плоской задачи (плоская деформация) применительно к расчетным схемам, представленным на Рис. 4.3, *a – e*, возможно получить лишь с *привлечением численных методов и компьютерной механики*.

**В настоящее время конкретные результаты для простейших расчетных схем, представленных на Рис. 4.3, *a – e*, уже получены для плоской задачи (плоская деформация) в рамках второго направления (модель кусочно-однородной среды и математический аппарат ТЛТУДТ); эти результаты изложены в публикациях (монография, обзорная статья и отдельные статьи), которые указаны во вводной части настоящего §4.**

**Примечание 4.4.** Вышеуказанные результаты получены для плоской задачи (расчетные схемы на Рис. 4.3, *a – e*); все же учитывая **приближенный подход** к исследованию волокнистых композитов, указанный в заключительной части п. 4.3.1 и фактически предложенный в [551] и [161], полученные результаты для плоской задачи [64, 67, 252 – 254, 362 – 368, 504] в рамках постановки и модели настоящего п. 4.3.3 могут применяться для анализа явлений, которые возникают в волокнистых композитах (в рамках пространственных задач для расчетных схем на Рис. 4.2, *a – e*). В связи с вышеизложенной ситуацией в обсуждаемых публикациях, относящихся к плоской задаче (плоская деформация), применяется терминология, характерная для волокнистых композитов; при этом короткими волокнами называются армирующие элементы в рамках плоской задачи, представленные на Рис. 4.3, *a – e*, хотя в действительности на Рис. 4.3, *a – e* армирующие элементы соответствуют поперечным сечениям наполнителя в виде лент в композитах ленточной структуры. Это Примечание 4.4 можно отнести к постановке плоских задач механики хрупкого разрушения композитов с короткими армирующими элементами при сжатии, которая изложена в следующем п. 4.4 настоящего §4.

**4.4. Постановка плоских задач механики хрупкого разрушения композитов с короткими армирующими элементами при сжатии.** В предыдущих пунктах настоящего §4 уделялось достаточно много внимания различным аспектам постановочного характера, относящимся к модели коротких волокон (в общем смысле – коротких подкрепляющих элементов) в теории устойчивости и в механике разрушения композитов при сжатии вдоль вышеуказанных коротких подкрепляющих элементов, которые являются наполнителем в композите. В монографии [64] и в обзорной статье [65] обсуждаемая модель называлась моделью «волокон конечных размеров»; по-видимому, для обсуждаемой модели можно предложить еще ряд равнозначных названий.

**4.4.1. О постановке задач.** Учитывая вышеотмеченные сведения, ниже в настоящем п. 4.4.1 приведем в краткой форме основные позиции, относящиеся к постановке плоских задач и методам их исследования при хрупком разрушении с привлечением простейших расчетных схем, представленных на Рис. 4.3, *a – e*. Основные результаты, относящиеся к постановке задач, методам решения и конкретной информации об исследованных задачах, представлены в публикациях [64 – 67, 252 – 254, 362 – 368, 504] и в ряде других; по-видимому, можно считать, что указанные результаты являются первыми результатами в мире по достаточно строгому исследованию для композитов с короткими армирующими элементами применительно к теории устойчивости и хрупкому разрушению при сжатии.

Основные положения обсуждаемого подхода, которые определяют постановку задач и, естественно, пределы ее применимости, можно определить следующим образом.

1. Анализируется хрупкое разрушение рассматриваемых композитов при сжатии вдоль армирующих элементов, в связи с этим материалы армирующих элементов, в соответствии с **Примечанием 4.4** в дальнейшем будем называть волокнами, и матрицы моделируются линейно-упругими изотропными телами. Целесообразно отметить, что вышеуказанное моделирование при хрупком разрушении композитов можно считать приемлемым при сравнительно краткосрочном действии внешних нагрузок и при умеренных температурах.

2. Исследования проводятся в рамках **теории 3 (второй вариант теории малых докритических деформаций)** по терминологии п. 2.2 настоящей обзорной статьи; для указанной теории принимается, что докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории. Целесообразно отметить, что обсуждаемое допущение можно считать приемлемым для сравнительно жестких волокнистых композитов, которые разрушаются преимущественно при сравнительно малых деформациях.

3. Рассматривается нагружение внешними «мертвыми» нагрузками, в этом случае, как уже неоднократно отмечалось в §§3 и 4 настоящей статьи, выполняются достаточные условия применимости статического метода ТЛУДТ (метода Эйлера) и обсуждаемые задачи сводятся к статическим двухмерным задачам на собственные значения, при этом коэффициенты соответствующей системы дифференциальных уравнений зависят от двух переменных (от  $x_1$  и  $x_2$  в соответствии с Рис. 4.3, *a – e*).



4. На границах раздела наполнителя и матрицы (Рис. 4.3,  $a - e$ ) принимаются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений как при определении докритического состояния, так и при исследовании соответствующих задач устойчивости.

5. Для расчетных схем, представленных на Рис. 4.3,  $a - e$ , применительно к исследованию внутреннего и приповерхностного разрушения принимаются соответствующие условия затухания «на бесконечности», для периодической системы волокон также принимаются соответствующие условия периодичности; обсуждаемые условия достаточно подробно рассмотрены в п. 4.2 применительно к каждой из простейших расчетных схем, представленных на Рис. 4.3,  $a - e$ .

6. Исследование проводится в рамках плоской задачи (плоская деформация) с привлечением вышеуказанного варианта ТЛТУДТ в лагранжевых координатах  $(x_1, x_2)$ , которые в отсчетном состоянии (первом, недеформированном) совпадают с декартовыми координатами.

Вышеизложенные основные положения обсуждаемого подхода приведены в соответствии с монографией [64] и обзорной статьей [65].

**4.4.2. О методе численного исследования задач п. 4.4.** Как уже отмечалось в **Примечании 4.3**, рассматриваемые двухмерные статические задачи на собственные значения с переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях, зависящими от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  (Рис. 4.3,  $a - e$ ), могут быть исследованы лишь с привлечением численных методов и компьютерной механики. В связи с этим ниже приведем краткую информацию о численном исследовании задач, расчетные схемы для которых представлены на Рис. 4.3,  $a - e$  и постановка которых (основные положения подхода) приведены выше в настоящем п. 4.4.1; при этом целесообразно отметить, что вышеуказанные основные положения подхода, изложенные в начале п. 4.4.1, следует рассматривать совместно с обсуждением расчетных схем на Рис. 4.3,  $a - e$ , которое изложено в п. 4.2 после Рис. 4.3,  $a - e$ . Обсуждаемую краткую информацию представим, следуя обзорной статье [65]; более подробная информация изложена в монографии [64].

Численное решение сформулированных задач выполняется методом конечных разностей с применением вариационно-разностного подхода и использованием базовых схем. Указанный общий метод подробно изложен в обзорной статье [504] (применительно к широким классам задач механики композитов). Ниже, следуя [65], рассмотрим основные этапы реализации численного метода [504] применительно к простейшей расчетной схеме, представленной на Рис. 4.3,  $a$ . Для этого вместо бесконечной области (в расчетной схеме) вводится конечная область, ограниченная внешним прямоугольником с размерами  $l_1 \times l_2$ ; отметим, что такой же конечный прямоугольник с размерами  $l_1 \times l_2$  указан на всех простейших расчетных схемах Рис. 4.3. При определении докритического состояния и исследовании соответствующей задачи ТЛТУДТ условия затухания «на бесконечности» заменяются такими же условиями затухания на внешней границе прямоугольника. При этом размеры прямоугольника  $l_1 \times l_2$  выбираются такими, чтобы их дальнейшее увеличение *не влияло* на конечные результаты (величину критической нагрузки), что определяется в результате вычислительного эксперимента. При помощи прямых, параллельных осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , в расчетной области (прямоугольника с размерами  $l_1 \times l_2$ ) вводится *неравномерная по каждому из направлений* разностная сетка  $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ , где  $\omega$  – множество внутренних узлов и  $\gamma$  – множество граничных узлов; на Рис. 4.4,  $a$  показана неравномерная сетка и на Рис. 4.4,  $b$  – ячейка. При этом сетка вводится так, чтобы в пределах каждой ячейки материал (или волокна, или матрицы) был однородным; кроме того, предполагается возможность уплотнения сетки в окрестности резкого изменения свойств материала (например, возле линии разделения матрицы и волокна). Предполагается, что уплотнение сетки возле линий разделения матрицы и волокна можно проводить до такого

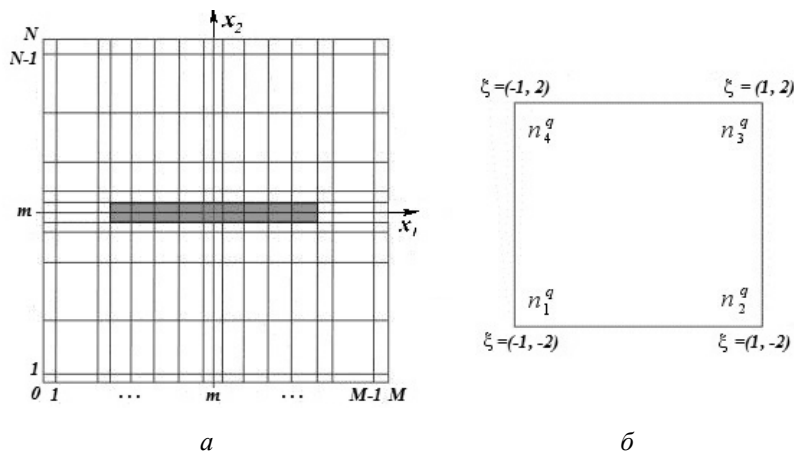


Рис. 4.4

уровня, чтобы дальнейшее уплотнение сетки *не влияло* на конечные результаты (величину критической нагрузки), что определяется в результате вычислительного эксперимента. Таким образом, сеточная область, которая состоит из множества внутренних и граничных узлов, представляет собой совокупность прямоугольных ячеек; каждая из ячеек имеет механические и геометрические характеристики компонента композита (связующего или наполнителя), который содержится в данной ячейке.

Дискретные задачи на сетке  $\bar{\omega}$  получаются вариационно-разностным способом с применением концепции базовых схем. Компоненты базовых схем определяются путем аппроксимации и минимизации соответствующего функционала на шаблоне ячейки сетки. Следует отметить, что при реализации указанной процедуры применительно к исследованию задачи устойчивости используются вариационные принципы ТЛТУДТ, в краткой форме изложенные в п. 2.5 настоящей обзорной статьи. Путем суммирования значений базовых схем в каждом узле сеточной области получают разностные задачи, являющиеся дискретными аналогами соответствующих непрерывных задач.

Указанным выше способом формируются в операторной форме разностные задачи для определения докритического состояния (в рамках классической линейной теории упругости) и для исследования задачи устойчивости (в рамках ТЛТУДТ в виде **теории 3** (второй вариант теории малых докритических деформаций) по терминологии п. 2.2 настоящей обзорной статьи). При этом разностные операторы соответствующих задач устойчивости сохраняют свойства самосопряженности и положительной определенности соответствующих дифференциальных операторов. Таким образом, и задача устойчивости сводится к решению соответствующих сеточных уравнений, что может быть представлено в виде обобщенной алгебраической задачи на собственные значения.

Для получения численных результатов решения алгебраических задач используются известные в теории разностных схем прямые и итерационные методы: метод Холецкого, метод сопряженных градиентов, метод итерирования подпространств, метод градиентного спуска.

Вышеприведенными весьма краткими сведениями ограничимся при информации о численном методе исследования задач, постановка которых представлена в п. 4.4.2 и в п. 4.2 после Рис. 4.3, *a – e*.

**4.5. Результаты исследований плоских задач механики хрупкого разрушения композитов с короткими волокнами при сжатии.** В настоящем п. 4.5 в весьма краткой форме приведем информацию о конкретных результатах по исследованию плоских задач механики хрупкого разрушения композитов, армированных короткими волокнами, при сжатии; обсуждаемые конкретные результаты получены в рамках постановки п. 4.4.1 с привлечением метода исследования, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2, применительно к простейшим расчетным схемам на Рис. 4.3, *a – e*, соответствующим различной структуре рассматриваемых композитов.

**Примечание 4.5.** В публикациях [64 – 67, 252 – 254, 362 – 368, 504] было введено и использовано понятие – «мысленные» формы потери устойчивости; в связи с этим указанное понятие целесообразно четко определить, поскольку оно также будет применяться в настоящем п. 4.5 при анализе конкретных результатов, полученных для расчетных схем на Рис. 4.3, *a – e*.

«Мысленными» формами потери устойчивости называются *заранее* (до проведения вычислительных экспериментов) *представленные* общие картины деформирования волокна и окружающей его окрестности матрицы при потере устойчивости, полученные из физических соображений с учетом относительных жесткостных и геометрических характеристик волокна и матрицы.

Таким образом, «мысленные» формы потери устойчивости *не всегда* соответствуют отдельным собственным функциям обсуждаемой задачи, а характеризуют общую предполагаемую картину деформирования волокна и окружающей его окрестности матрицы. Все же «мысленные» формы потери устойчивости в ряде случаев удобны при анализе конкретных результатов.

**Пример.** Рассмотрим случай, когда жесткость волокна значительно больше жесткости матрицы; в этом случае можно считать, что при совместном деформировании (волокна и матрицы при потере устойчивости) характер деформирования волокна приближается к модели абсолютно твердого тела. В этом случае единственно возможной «мысленной» формой потери устойчивости волокна и окружающей его окрестности матрицы является поворот волокна как абсолютно твердого тела.

Вышеизложенное **Примечание 4.5** целесообразно отнести к вводной части п. 4.5.

#### 4.5.1. Асимптотический переход к модели «бесконечно длинных волокон».

Информацию по обсуждаемому вопросу приведем на основании исследований применительно к расчетной схеме Рис. 4.3, *a* для одного волокна, где введены обозначения:  $L$  – длина волокна;  $D$  – размер в поперечном сечении; более подробно обсуждаемый вопрос рассмотрен в статье [363] и в обзорной статье [65]. Вполне очевидно, что при строгой и последовательной постановке задач в случае  $LD^{-1} \rightarrow \infty$  из результатов для расчетной схемы на Рис. 4.3, *a*, соответствующей модели «коротких волокон», должны следовать результаты для расчетной схемы на Рис. 4.5, соответствующей модели «бесконечно длинных волокон». Заметим, что на Рис. 4.5 представлены верхняя и нижняя полуплоскости (матрица), которые соединены через бесконечную полосу (наполнитель) шириной  $D$ ; рассматривается полоса, которая в соответствии с **Примечанием 4.4** в рамках плоской задачи приближенно моделирует бесконечное волокно. Расчетная модель на Рис. 4.5 соответствует Рис. 3.25 (при  $h_m \rightarrow \infty$  и  $2h_a = D$ ) в п. 3.3.3 настоящей обзорной статьи, где рассматриваются результаты исследований для слоистых композитов с привлечением модели «бесконечно длинных

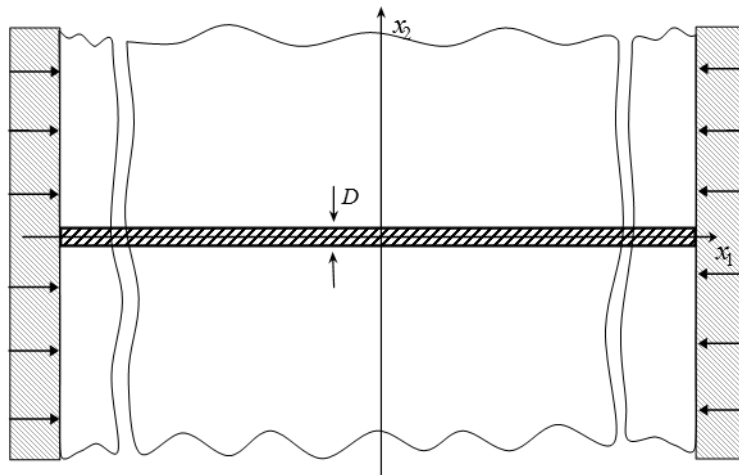


Рис. 4.5

волокон» (в рассматриваемом случае слоистых композитов – с привлечением модели «бесконечно длинных слоев») в рамках **второго направления** по терминологии п. 3.1.3 (модель кусочно-однородной среды, последовательные подходы на основе ТЛТУДТ).

Результаты сравнительного анализа представлены в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{кpa}|$  от геометрического параметра  $LD^{-1}$ . В случае модели «бесконечно длинных волокон» (Рис. 4.5) эта величина соответствует критическому значению деформации вдоль оси  $0x_1$  как для армирующих элементов (волокно, слой), так и для матрицы в силу **Примечания 3.3**.

В случае модели «волокон конечных размеров» или «коротких волокон» величина  $\varepsilon_{11}^{кpa}$  вводится следующим выражением:

$$\varepsilon_{11}^{кpa} = \varepsilon_{11}^{кpa}(x_1, x_2) \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 0 \quad (4.1)$$

применительно к Рис. 4.3, а; следовательно, величина (4.1) соответствует критическому значению деформации вдоль оси  $0x_1$  в средней точке армирующего элемента (Рис. 4.3, а), которая характеризует только критическое значение деформации волокна и не характеризует критическое значение деформации матрицы. При этом критическое значение деформации вдоль оси  $0x_1$  (Рис. 4.3, а) для матрицы, которое определяется «на бесконечности», может достигать существенно отличных значений. Указанную ситуацию следует обязательно учитывать при сравнении результатов, полученных с применением рассматриваемых моделей.

На Рис. 4.6 и 4.7 представлены результаты, которые, соответственно, относятся к микро- и нанокомпозитам с полимерной матрицей со следующими механическими свойствами:  $E_m = 2,68 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_m = 0,4$ ; при этом различие между микро- и нанокомпозитами устанавливается в соответствии со шкалой уровней, приведенной в монографиях [90, 423]. Для микрокомпозитов вычисления проводились при следующих значениях механических параметров  $E_a \cdot E_m^{-1} = 10; 30; 50; 100; 150$  ( $E_a$  и  $E_m$  – модули Юнга для волокон и матрицы) в интервале изменения геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 1510$ ; на Рис. 4.6 соответствующие кривые отмечены числами значений параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$ . Для нанокомпозитов вычисления проводились для более высоких значений параметра  $E_a \cdot E_m^{-1} = 285; 373; 448; 500; 1000$  и в более широком интервале изменения параметра  $LD^{-1}$  ( $10 \leq LD^{-1} \leq 2310$ ); на Рис. 4.7 соответствующие кривые отмечены числами значений параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$ . На Рис. 4.6 и 4.7 сплошными линиями

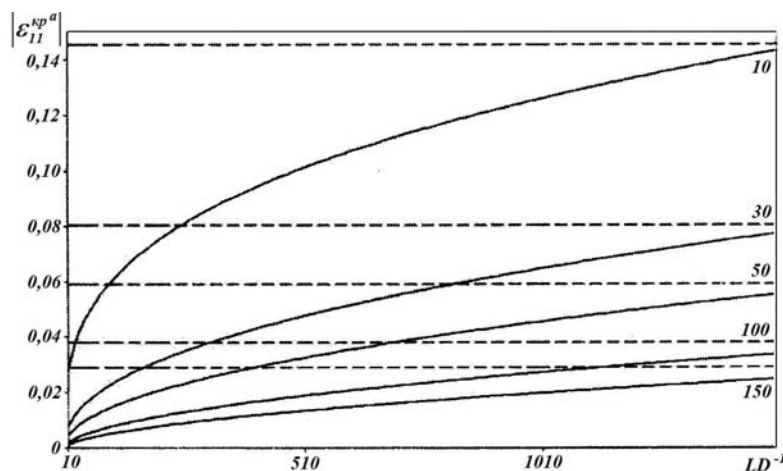


Рис. 4.6

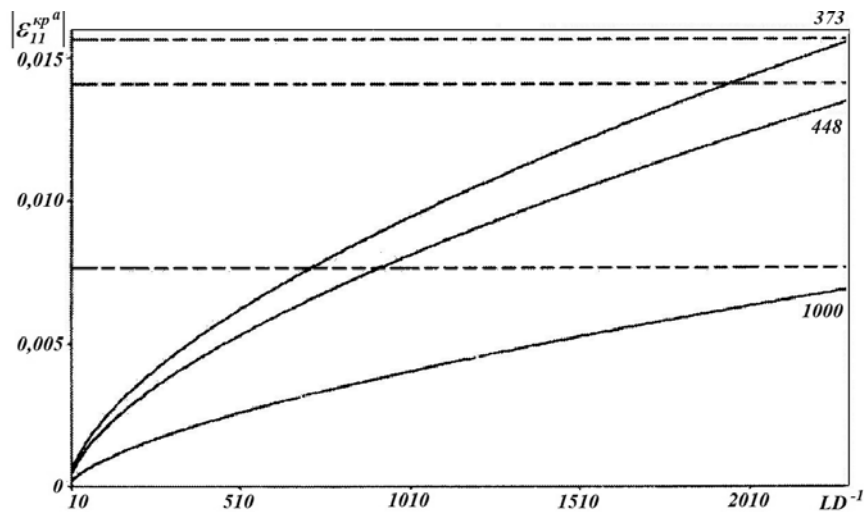


Рис. 4.7

показаны результаты, относящиеся к модели «коротких волокон», пунктирными линиями показаны результаты, относящиеся к модели «бесконечно длинных волокон».

Из анализа результатов, представленных на Рис. 4.6 и 4.7, следует, что для всех рассмотренных значений параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$  при увеличении геометрического параметра  $LD^{-1}$  в рассмотренных интервалах критические значения деформации вдоль оси  $Ox_1$  (Рис. 4.3, а), вычисленные в рамках модели «коротких волокон», асимптотически приближаются к критическим значениям, вычисленным в рамках модели «бесконечно длинных волокон». При этом для верхних значений рассматриваемых интервалов изменения геометрического параметра критические значения вышеуказанных деформаций практически совпадают, что может быть основой для определения пределов применимости модели «бесконечно длинных волокон» в зависимости от значений параметров  $E_a \cdot E_m^{-1}$  и  $LD^{-1}$ . Такого типа результаты анализа приведены в статье [363], обзорной статье [65] и монографии [64]; вышеизложенные результаты настоящего п. 4.5.1 представлены в форме, соответствующей обзорной статье [65].

**4.5.2. Результаты для одного волокна при сжатии вдоль волокна.** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, а. Постановка задач включает позицию 1 после Рис. 4.3, а – е в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследования проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2.

Для более четкого обсуждения полученных результатов указанная расчетная схема (Рис. 4.3, а) представлена на Рис. 4.8 совместно с «мысленными» (по терминологии **Примечания 4.5**) формами потери устойчивости одного короткого волокна (Рис. 4.8) при сжатии вдоль волокна; при этом рассматриваемые «мысленные» формы (а, б, с и d) представлены в нижней части Рис. 4.8.

Необходимо отметить, что на Рис. 4.8, как и на других подобных рисунках п. 4.5, относящихся к «мысленным» формам потери устойчивости, отрезками «темных» линий изображены формы средних линий

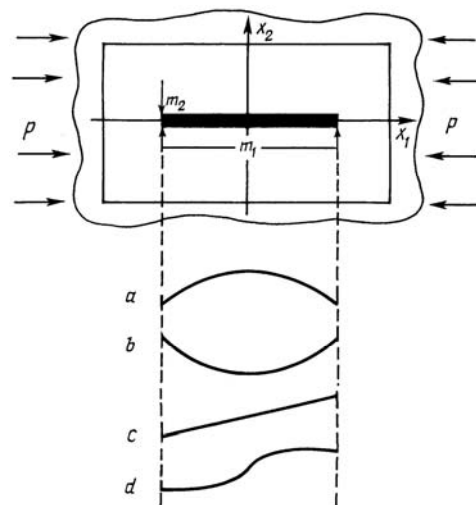


Рис. 4.8

формы волокон (армирующих элементов) после потери устойчивости. При этом подразумевается, что окружающая волокна ближайшая окрестность матрицы деформируется при потере устойчивости соответствующим образом в силу положения 4 (п. 4.4.1) постановки плоских задач механики хрупкого разрушения композитов с короткими армирующими элементами при сжатии. Вышеотмеченное положение 4 (п. 4.4.1) заключается в том, что на границах раздела наполнителя и связующего (матрицы) (Рис. 4.3,  $a - e$ ) принимаются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений как при определении докритического состояния, так и при исследовании соответствующих задач устойчивости.

«Мысленные» формы потери устойчивости (**a** и **b** на Рис. 4.8) можно назвать симметричными относительно вертикальной оси  $Ox_2$ ; необходимо отметить, что формы **a** и **b** являются равнозначными (критические нагрузки совпадают) в силу симметричности расчетной схемы на Рис. 4.8 (верхняя часть рисунка) относительно горизонтальной оси  $Ox_1$ . Симметричные формы потери устойчивости можно назвать изгибными формами по аналогии с соответствующими формами потери устойчивости полосы при осевом сжатии.

«Мысленные» формы потери устойчивости (**c** и **d** на Рис. 4.8) можно назвать антисимметричными формами потери устойчивости относительно вертикальной оси  $Ox_2$ . Антисимметричная форма потери устойчивости **c** соответствует как бы «жесткому» повороту волокна (армирующего элемента), когда материал связующего (матрицы) не обеспечивает достаточного «поддерживающего» действия, вследствие чего при потере устойчивости в близости торцов волокна как бы образуется «шарнир»,

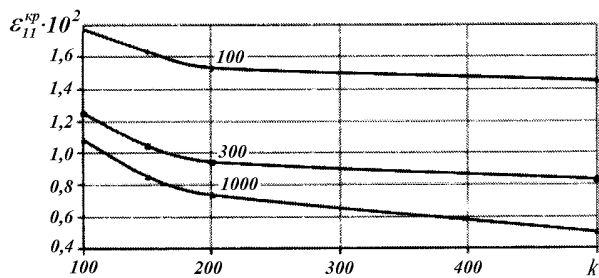


Рис. 4.9

близкий к пластическому шарниру. Очевидно, что обсуждаемая форма потери устойчивости может иметь место, когда армирующие элементы и матрица существенно отличаются по жесткости, что характерно для технологических процессов. Антисимметричная форма потери устойчивости (**d**) как бы соответствует повороту армирующего элемента с изгибом.

Полученные результаты численного решения рассматриваемой задачи устойчивости представлены на Рис. 4.9 в виде зависимости величины  $|\epsilon_{11}^{кр}|$ , которая характеризует критическое значение деформации вдоль оси  $Ox_1$  (Рис. 4.8) для матрицы «на бесконечности», от коэффициента формы армирующего элемента (величины  $k$ )

$$k = m_1 \cdot m_2^{-1} = L \cdot D^{-1} . \quad (4.2)$$

Вычисления проводились для следующих значений параметров:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 100, 200, 300, 500, 1000$ ;  $E_m = 2,76$  ГПа,  $\nu_a = \nu_m = 0,35$ ;  $100 \leq k \leq 500$ . На Рис. 4.9 приведены результаты лишь для трех значений параметра  $E_a \cdot E_m^{-1} = 100; 300; 1000$ , что и отмечено возле каждой кривой. Необходимо отметить, что в рассматриваемых вычислениях для матрицы использовались механические свойства (величины  $E_m$  и  $\nu_m$ ), соответствующие полиамиду литьевому. Для указанного материала предельное укорочение, соответствующее пределу прочности, равно 0,028. На всех кривых на Рис. 4.9 величина критической деформации для матрицы «на бесконечности» (величина  $\epsilon_{11}^{кр}$ ), соответствующая потере устойчивости, существенно меньше вышеуказанного значения предельного укорочения для матрицы. Отмеченная ситуация свидетельствует о возможности разрушения обсуждаемого композита при сжатии за счет потери

устойчивости во внутренней структуре до достижения предела прочности для матрицы.

Рассмотрим примеры определения формы потери устойчивости при численном исследовании обсуждаемой задачи; при этом форму потери устойчивости будем характеризовать безразмерным перемещением  $u_2^*$  вдоль вертикальной оси  $0x_2$  на Рис. 4.8, которое отнесено к амплитудному множителю, согласно следующему выражению

$$u_2^*(x_1) = \left[ u_2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \right] \cdot \left[ \max \left\{ u_2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \right\} \right]^{-1}. \quad (4.3)$$

В верхней части Рис. 4.10 представлены формы потери устойчивости, которые характеризуются функцией  $u_2^*(x_1)$  в виде (4.3), для композита с параметрами  $E_a \cdot E_m^{-1} = 1000$ ;  $E_m = 2,76$  ГПа;  $\nu_a = \nu_m = 0,35$ ; при этом кривая 1 относится к случаю  $k = 10$  и кривая 2 относится к случаю  $k = 30$ , где  $k$  определяется выражением (4.2). В нижней части Рис. 4.10 представлена часть расчетной схемы на Рис. 4.8; причем линейные размеры на верхней и нижней частях Рис. 4.10 вдоль горизонтальной оси  $0x_1$  совпадают, таким образом, торцы волокна соответствуют на верхней части  $x_1 = \pm 0,5$ . Следовательно, на верхней части Рис. 4.10 кривые, иллюстрирующие форму потери устойчивости, относятся:

при  $|x_1| \leq 0,5$  – к короткому волокну;

при  $0,5 \leq |x_1| \leq 1,0$  – к матрице.

Из анализа результатов по численному определению форм потери устойчивости для обсуждаемой задачи, которые представлены на верхней части Рис. 4.10, можно сделать (применительно к части кривых 1 и 2 в пределах короткого волокна, при  $|x_1| \leq 0,5$ ) следующие выводы:

1. При достаточно коротких волокнах (в рассматриваемом случае при  $k = 10$ , где  $k$  определяется выражением (4.2)) реализуется форма потери устойчивости (кривая 1), которая соответствует «мысленной» антисимметричной форме (Рис.4.8 – форма с). В этом случае как бы происходит «жесткий» поворот армирующего элемента; более подробное описание формы с представлено выше в настоящем п. 4.5.2.

2. При более длинных волокнах (в рассматриваемом случае при  $k = 30$ , где  $k$  определяется выражением (4.2); указанная тенденция сохраняется и при  $k \geq 30$ ) реализуется форма потери устойчивости (кривая 2), которая соответствует «мысленной» симметричной или изгибной форме (Рис. 4.8 – форма а); более подробное описание формы а представлено выше в настоящем п. 4.5.2.

Таким образом, вышеприведенный анализ и выводы из него свидетельствуют о том, что «мысленные» формы потери устойчивости, рассмотренные в **Примечании 4.5**, представляются весьма полезными при анализе форм потери устойчивости, полученных при численном исследовании.

Дополнительные сведения о полученных результатах при исследовании задач, расчетная схема для которых представлена на Рис. 4.3, а, изложены в монографии [64], обзорной статье [65], отдельных статьях [66, 366, 368] и в других публикациях.

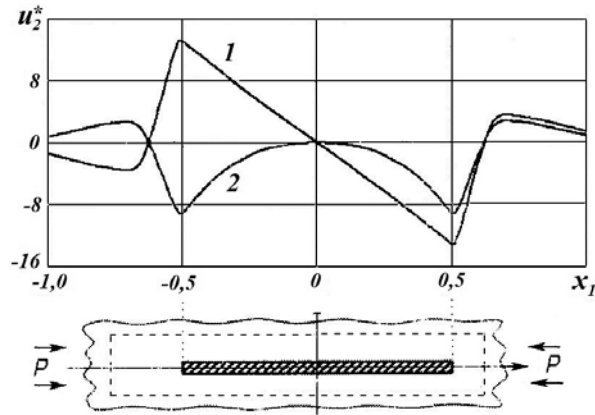


Рис. 4.10

**4.5.3. Результаты для последовательно расположенных двух волокон при сжатии вдоль волокон.** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, б. Постановка задач включает позицию 2 после Рис. 4.3, а – е в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследованию проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2.

Для более четкого обсуждения полученных результатов обсуждаемая расчетная схема (Рис. 4.3, б) представлена на Рис. 4.11 совместно с «мысленными» (по терминологии **Примечания 4.5**) формами потери устойчивости последовательно расположенных двух коротких волокон (Рис. 4.11) при сжатии вдоль волокон; при этом рассматриваемые «мысленные» формы (**a**, **b**, **c** и **d**) представлены в нижней части Рис. 4.11.

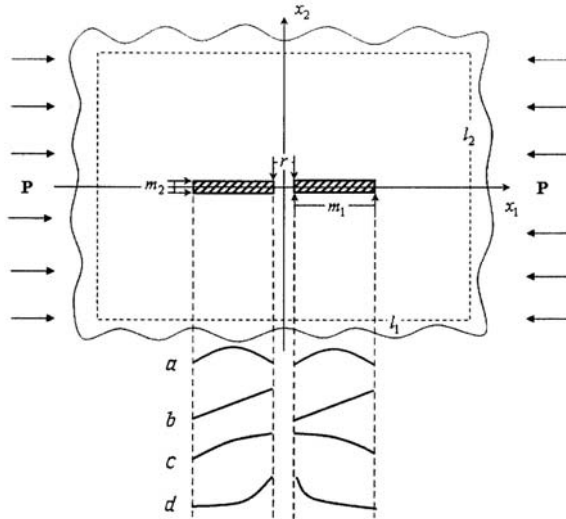


Рис. 4.11

Необходимо отметить, что на Рис. 4.11, как и на других подобных рисунках п. 4.5, относящихся к «мысленным» формам потери устойчивости, отрезками «темных» линий изображены формы средних линий формы волокон (армирующих элементов) после потери устойчивости. При этом подразумевается, что окружающая волокна ближайшая окрестность матрицы деформируется соответствующим образом при потере устойчивости в силу положения 4 (п. 4.4.1) постановки плоских задач механики хрупкого разрушения композитов с короткими армирующими элементами при сжатии. Вышеотмеченное положение 4 (п. 4.4.1) заключается в том, что на границах раздела наполнителя и связующего (матрицы) (Рис. 4.3, а – е) принимаются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений как при определении докритического состояния, так и при исследовании соответствующих задач устойчивости.

«Мысленные» формы потери устойчивости **a**, **b**, **c** и **d**, представленные на нижней части Рис. 4.11 можно характеризовать следующим образом.

Изгибная форма потери устойчивости **a** соответствует случаю, когда каждое короткое волокно (армирующий элемент) теряет устойчивость как бы почти без взаимодействия с другим коротким волокном (армирующим элементом).

Форма потери устойчивости **b** соответствует случаю, когда возникает как бы жесткий поворот каждого волокна независимо друг от друга. Такой случай может реализовываться для достаточно жесткого материала волокон, когда матрица не обеспечивает надлежащего поддерживающего действия и при потере устойчивости на торцах как бы образуется «шарнир», близкий к пластическому шарниру, и когда волокна мало взаимодействуют друг с другом.

Форма потери устойчивости **c** соответствует случаю, когда два волокна теряют устойчивость как бы по «одной изгибной форме» (общая изгибная форма потери устойчивости). Такой случай может реализовываться, по-видимому, для достаточно гибких волокон при весьма малом расстоянии между волокнами.

Форма потери устойчивости **d** соответствует случаю, когда два соседних волокна теряют устойчивость как бы при сравнительно жестком взаимном повороте соседних волокон с некоторым изгибом. Такой случай реализуется, по-видимому, для достаточно жесткого материала волокон, когда матрица между волокнами не обеспечивает надлежащего поддерживающего действия и при потере устойчивости между волокнами как бы возникает «шарнир», близкий к пластическому шарниру.

Построение «мысленных» форм потери устойчивости для расчетной схемы, представленной в верхней части Рис. 4.11, можно продолжить, рассматривая «мысленные» формы потери устойчивости, представленные в нижней части Рис. 4.11, как первые «мысленные» формы потери устойчивости.



При численном исследовании дополнительно вводится безразмерный параметр  $r_1^* = r \cdot m_1^{-1}$ , характеризующий безразмерное расстояние между торцами двух соседних волокон (Рис. 4.3, б); геометрические размеры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на Рис. 4.3, а. Численные исследования проводились для композита со следующими параметрами:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 1000$ ;  $\nu_a = \nu_m = 0,35$ ;  $E_m = 2,76$  ГПа;  $k = m_1 \cdot m_2^{-1} = 100$ ;  $0,001 \leq r_1^* \leq 32$ ; необходимо отметить, что вышеуказанное значение параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$  может возникать в технологических процессах, учитывая существенную зависимость  $E_m$  от температуры.

На Рис. 4.12, а и б (а – при  $r_1^* = 1$ , б – при  $r_1^* = 0,001$ ) представлено распределение вдоль оси  $0x_1$  безразмерного перемещения  $u_2^*$  вдоль вертикальной оси  $0x_2$ , которое определяется выражением (4.3); эти результаты представлены в верхней части Рис. 4.12, а и б. Из результатов, представленных на Рис. 4.12, а (случай  $r_1^* = 1$ ), следует, что соответствующая форма потери устойчивости (верхняя часть Рис. 4.12, а) достаточно близка к «мысленной» форме потери устойчивости с, которая представлена в нижней части Рис. 4.11 и названа «общей изгибной формой потери устойчивости».

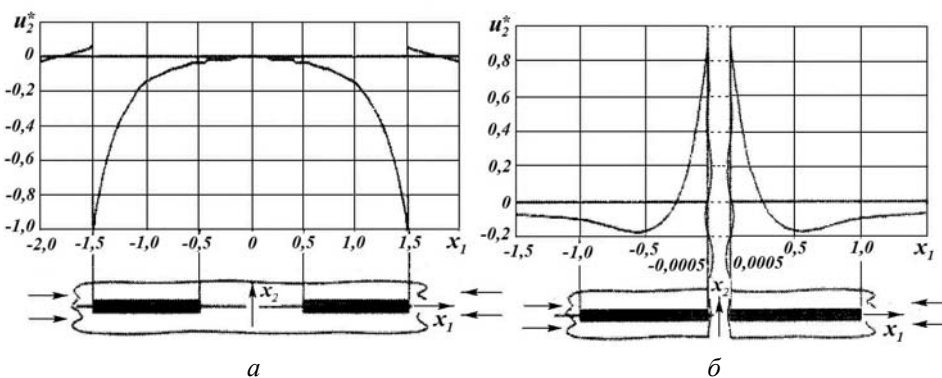


Рис. 4.12

Из результатов, представленных на Рис. 4.12, б (случай  $r_1^* = 0,001$ ), следует, что соответствующая форма потери устойчивости (верхняя часть Рис. 4.12, б) достаточно близка к «мысленной» форме потери устойчивости d, которая представлена в нижней части Рис. 4.11 и названа как «взаимный поворот соседних волокон с изгибом при наличии как бы шарнира между торцами». Целесообразно отметить, что на нижней части Рис. 4.11 «мысленные» формы потери устойчивости a, b, c и d, представленные в виде «темных» отрезков кривых линий, относятся лишь к волокнам («темные» отрезки кривых на Рис. 4.11 ограничены вертикальными пунктирными прямыми, соответствующими линейным размерам волокон). В связи с этим сравнение с линиями, представляющими вычисленные формы потери устойчивости на Рис. 4.12, а и б, можно проводить лишь в пределах линейных размеров, соответствующих волокнам; так, на Рис. 4.12, а указанное сравнение можно проводить при  $0,5 \leq |x_1| \leq 1,5$ , а на Рис. 4.12, б – при  $0,0005 \leq |x_1| \leq 1,0$ .

Результаты численного исследования вопроса о влиянии взаимодействия двух коротких волокон при их последовательном размещении (расчетные схемы на Рис. 4.3, б и 4.11) на величину критической нагрузки в матрице «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ), которая, как и в п. 4.5.2, обозначена через  $\varepsilon_{11}^{kp}$ , представлено на Рис. 4.13 в виде зависимости  $\varepsilon_{11}^{kp}$  от величины  $r_1^*$  – безразмерного расстояния между торцами в интервале изменения  $r_1^*$  в виде  $0,001 \leq r_1^* \leq 32$ . Для более компактного представления обсуждаемых результатов на Рис. 4.13 рассматриваемый интервал  $(0,001 \leq r_1^* \leq 32)$  раз-

делен на две части ( $0,001 \leq r_1^* \leq 0,01$ ) и ( $0,1 \leq r_1^* \leq 32$ ), для которых приняты различные масштабы на оси  $0r_1^*$ . Сближение торцов двух коротких цилиндров на Рис. 4.13

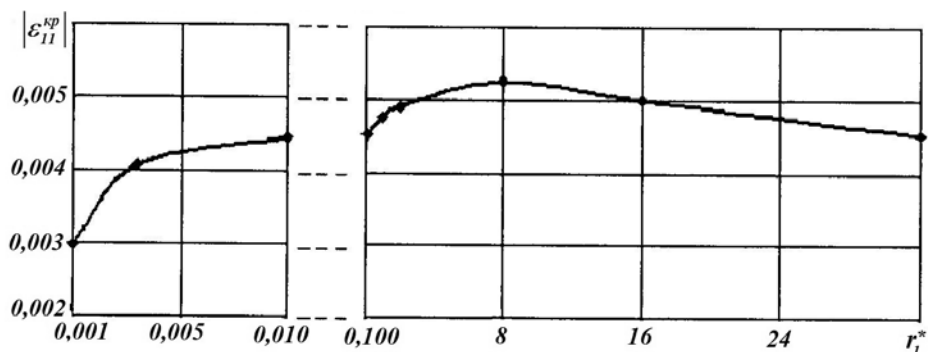


Рис. 4.13

соответствует закономерностям, которые представлены на Рис. 4.13 и наблюдаются при движении по оси  $r_1^*$  справа налево от  $r_1^* = 32$  до  $r_1^* = 0,001$ . Так, на интервале от  $r_1^* = 32$  до  $r_1^* = 8$  происходит *монотонное увеличение* величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ , на интервале от  $r_1^* = 8$  до  $r_1^* = 0,001$  происходит *монотонное уменьшение* величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ . При этом на интервале от  $r_1^* = 32$  до  $r_1^* = 0,005$  форма потери устойчивости соответствует «мысленной» общей изгибной форме **c** на Рис. 4.11 и на интервале от  $r_1^* = 0,005$  до  $r_1^* = 0,001$  форма потери устойчивости соответствует «мысленной» форме «с взаимным поворотом и изгибом при наличии шарнира между торцами волокон» (форма **d** на Рис. 4.11). Таким образом, описан новый механический эффект – *немонотонное изменение критической деформации при сближении армирующих элементов в композите*.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении полученных результатов для последовательно расположенных двух коротких волокон при сжатии вдоль волокон. Дополнительную информацию можно получить из монографии [64], отдельных статей [107, 367] и других публикаций.

**4.5.4. Результаты для параллельно расположенных двух волокон при сжатии вдоль волокон.** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, *в*. Постановка задач включает позицию **3** после Рис. 4.3, *a – e* в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследования проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2. Ниже приведем в качестве примера лишь один результат, полученный указанным численным методом и относящийся к исследованию вопроса о влиянии взаимодействия двух коротких волокон при их параллельном расположении (расчетная схема на Рис. 4.3, *в*) на величину критической нагрузки в матрице «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ), которая, как и в пп. 4.5.2 и 4.5.3, обозначена через  $\varepsilon_{11}^{kp}$ .

Как и в п. 4.5.3, исследования проводились для композита со следующими значениями основных параметров:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 1000$ ;  $\nu_a = \nu_m = 0,35$ ;  $E_m = 2,76$  ГПа;  $k = m_1 \cdot m_2^{-1} = 100$ ; необходимо отметить, что вышеуказанное значение параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$  может возникать в технологических процессах, учитывая существенную зависимость  $E_m$  от температуры. Проводились численные исследования зависимости величины критической нагрузки  $\varepsilon_{11}^{kp}$  от расстояния между двумя параллельно расположенными короткими волокнами при сжатии вдоль волокон; в расчетной схеме на Рис. 4.3, *в* расстояние между параллельно расположенными волокнами характеризуется величиной  $r$ , в связи с этим вводился безразмерный параметр  $r_2^* = r \cdot m_1^{-1}$ . Результаты иссле-

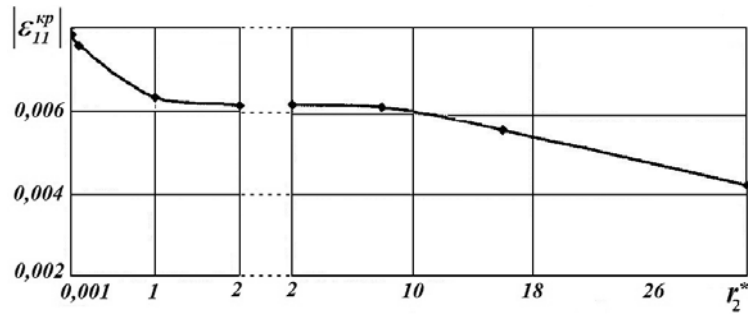


Рис. 4.14

дований для рассматриваемого композита представлены на Рис. 4.14 в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  от параметра  $r_2^*$  на интервале  $0,001 \leq r_2^* \leq 32$ . Как и на Рис. 4.13, относящемся к случаю последовательного расположения двух коротких волокон (расчетная схема на Рис. 4.3, б), так и на Рис. 4.14, относящемся к случаю параллельного расположения двух коротких волокон (расчетная схема на Рис. 4.3, в) для более компактного представления обсуждаемых результатов рассматриваемый интервал ( $0,001 \leq r_2^* \leq 32$ ) разделен на две части ( $0,001 \leq r_2^* \leq 2$ ) и ( $2 \leq r_2^* \leq 32$ ), для которых приняты различные масштабы на оси  $0r_2^*$ .

Следует отметить, что сближение параллельно расположенных двух коротких волокон в соответствии с расчетной схемой на Рис. 4.3, в происходит при уменьшении параметра  $r_2^*$ , т.е. при движении по оси  $0r_2^*$  справа налево от  $r_2^* = 32$  до  $r_2^* = 0,001$ . Из результатов, приведенных на Рис. 4.14, следует, что при сближении волокон (при движении по оси  $0r_2^*$  справа налево) происходит *монотонное увеличение*, что соответствует обычно принятым соображениям инженерного характера. Отмеченная ситуация еще раз подчеркивает, что в предыдущем п. 4.5.3 был обнаружен новый *механический эффект* – **немонотонное изменение величины критической деформации при сближении армирующих элементов в композите**.

**4.5.5. Результаты для одного периодического ряда последовательно расположенных волокон при сжатии вдоль волокон.** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, г. Постановка задач включает позицию 4 после Рис. 4.3, а – е в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследования проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2. Следует подчеркнуть, что позиция 4 после Рис. 4.3, а – е предусматривает, что для расчетной схемы на Рис. 4.3, г ставятся условия затухания «на бесконечности» лишь по координате  $x_2$  (при  $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ), а по координате  $x_1$  ставятся условия периодичности; в связи с этим при реализации численного метода исследования возникает следующая ситуация. Как уже отмечалось в п. 4.4.2, при реализации численного метода бесконечная область заменяется конечной областью в виде прямоугольника  $l_1 \times l_2$ , который на Рис. 4.3, г указан пунктирными линиями. Учитывая вышеизложенное, для периодического ряда (Рис. 4.3, г) в указанном «пунктирном» прямоугольнике фиксируется размер  $l_1$  из условий периодичности и лишь размер  $l_2$  изменяется для обеспечения условий затухания «на бесконечности» (при  $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ), т.е. значение параметра  $l_2$  определяется путем вычислительного эксперимента.

Следует отметить, что для периодической структуры (Рис. 4.3, г) с периодом  $T = m_1 + r$  можно рассматривать периодические (вдоль оси  $0x_1$ ) формы потери устойчивости с периодом, кратным периоду структуры, в виде  $N(m_1 + r)$ , где  $N$  – целое число. В этом случае «пунктирный» прямоугольник на Рис. 4.3, г при использовании его в вычислительном эксперимента имеет размеры  $l_1 \times l_2$ , где  $l_1 = N(m_1 + r)$ ; при этом «пунктирный» прямоугольник уже охватывает  $N$  коротких волокон.

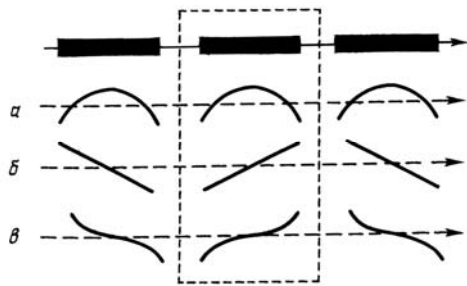


Рис. 4.15

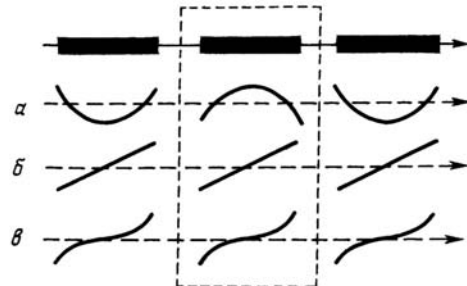


Рис. 4.16

Рассмотрим построение «мысленных» форм потери устойчивости для периодической структуры (Рис. 4.3г), ориентируясь на «пунктирный» прямоугольник на этом рисунке, в который входит одно короткое волокно. На Рис. 4.15 показаны «мысленные» формы (**а**, **б**, **в**) потери устойчивости, которые являются симметричными относительно вертикальных линий, проведенных через середины отрезков между торцами соседних волокон. На Рис. 4.16 показаны «мысленные» формы (**а**, **б**, **в**) потери устойчивости, которые являются антисимметричными относительно указанных вертикальных линий. Вышеуказанные на Рис. 4.15 и 4.16 «мысленные» формы потери устойчивости можно также характеризовать тем, что форма **а** на Рис. 4.15 и формы **б** и **в** на Рис. 4.16 являются периодическими вдоль оси  $0x_1$  с периодом, равным периоду структуры  $T$ , а формы **б** и **в** на Рис. 4.15 и форма **а** на Рис. 4.16 являются периодическими вдоль оси  $0x_1$  с периодом, равным удвоенному периоду структуры  $2T$ . Дополнительно можно ввести безразмерный параметр  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$ , который характеризует расстояние между торцами двух соседних волокон; геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на расчетной схеме (Рис. 4.3, г).

«Мысленные» формы потери устойчивости, представленные на Рис. 4.15 и 4.16, можно также (по аналогии с п. 4.5.3, Рис. 4.11) характеризовать следующим образом.

«Мысленную» форму потери устойчивости **а** на Рис. 4.15 можно назвать достаточно близкой к изгибной форме потери устойчивости, которая реализуется в случае достаточно отдаленных волокон при практически отсутствующем взаимном влиянии.

«Мысленную» форму потери устойчивости **б** на Рис. 4.15 можно назвать близкой к жесткому повороту недалеко расположенных волокон, которая реализуется для достаточно жестких материалов волокон при их сравнительно близком расположении, когда матрица не обеспечивает надлежащего поддерживающего влияния и между торцами соседних волокон возникает «пластический шарнир».

«Мысленную» форму потери устойчивости **в** на Рис. 4.15 можно назвать близкой к повороту с изгибом, которая реализуется для относительно жестких материалов волокон и соответствует форме потери устойчивости **б** на Рис. 4.15, дополненной некоторым изгибом волокон.

Приведенные соображения о «мысленных» формах потери устойчивости удобно использовать при интерпретации конкретных результатов по описанию форм потери устойчивости, полученных путем численного решения задач. Так, на Рис. 4.17 представлена информация о форме потери устойчивости композита с конкретными параметрами применительно к расчетной схеме на Рис. 4.3, г; приведенные результаты получены численным методом, краткие сведения о котором представлены в п. 4.4.2. Обсуждаемая информация на Рис. 4.17 представлена в пределах одного волокна в безразмерных координатах  $x_1$ , отнесенных к длине волокна  $m_1$  на Рис. 4.3, г; в связи с этим на Рис. 4.17  $-0,5 \leq x_1 \leq 0,5$ . На Рис. 4.17 информация о форме потери устойчивости, которая определена в результате численного решения, представлена в виде распределения по оси  $0x_1$  безразмерного вертикального перемещения  $u_2^*$ , вычислен-

ного по выражению (4.3). Результаты на Рис. 4.17 представлены для двух случаев расстояний между торцами соседних волокон, которое характеризуется безразмерным параметром  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (геометрические параметры указаны на расчетной схеме на Рис. 4.3, з): первый случай  $r^* = 1$ , расстояние между торцами двух соседних волокон равно длине волокна, соответствует кривой 1; второй случай  $r^* = 0,2$  соответствует кривой 2. Из анализа результатов на Рис. 4.17 следует, что форма потери устойчивости (кривая 1,  $r^* = 1$ ) практически совпадает с «мысленной» формой потери устойчивости **а** на Рис. 4.15 и форма потери устойчивости (кривая 2,  $r^* = 0,2$ ) практически совпадает с «мысленной» формой потери устойчивости **в** на Рис. 4.15. Кроме того, из анализа результатов на Рис. 4.17 следует, что при сближении последовательно расположенных коротких волокон в периодическом ряду происходит смена форм потери устойчивости; аналогичная ситуация имела место и в случае двух последовательно расположенных волокон, о чем свидетельствуют результаты на Рис. 4.10 и 4.12.

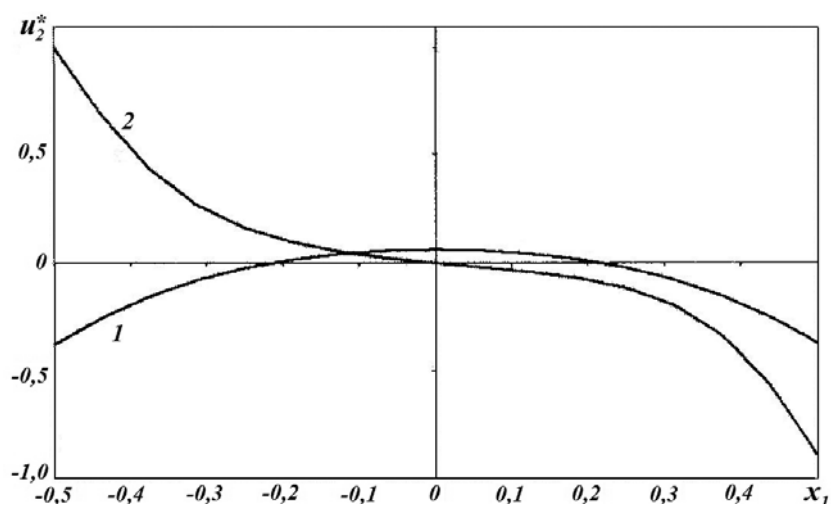


Рис. 4.17

Ниже приведем информацию о результатах исследования зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  (величины критической деформации вдоль оси  $0x_1$  в матрице «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) в соответствии с расчетной схемой на Рис. 4.3, з) от безразмерной величины  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на расчетной схеме на Рис. 4.3, з), характеризующей относительное расстояние между торцами двух соседних волокон в периодическом ряду последовательно расположенных коротких волокон (Рис. 4.3, з). Обсуждаемые результаты получены численным методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2; при этом после получения числового значения соответствующей величины  $\varepsilon_{11}^{кр}$ , являющейся соответствующим собственным значением, численные исследования о получении информации о соответствующей собственной функции, по которой определяется соответствующая форма потери устойчивости, не проводились. Исследования проводились для композита со следующими параметрами  $E_a \cdot E_m^{-1} = 1000$ ;  $\nu_a = \nu_m = 0,35$ ;  $E_m = 2,76$  ГПа;  $k = m_1 \cdot m_2^{-1} = 100; 200; 300; 500$ ; безразмерное расстояние  $r^*$  между торцами двух соседних волокон изменялось в интервале  $0,2 \leq r^* \leq 4,5$ . Полученные результаты представлены на Рис. 4.18, где цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены кривые, соответствующие значениям параметра  $k = 100; 200; 300; 500$ ; при этом штрихпунктирные линии соответ-

ствуют значениям величины  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  для случая *одного* волокна при тех же значениях параметра  $k$ . Из результатов, представленных на Рис. 4.18, можно сделать **вывод** о

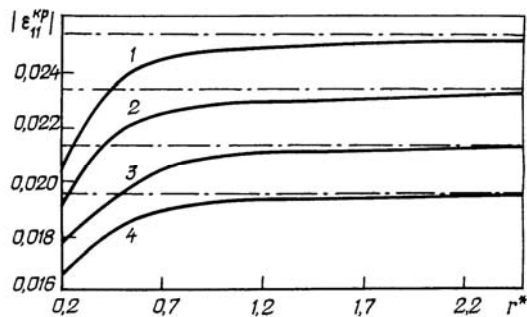


Рис. 4.18

том, что при расстояниях между торцами двух соседних волокон, превышающих длину волокна (при  $r^* > 1$ ), величина критической деформации  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  для периодического ряда последовательно расположенных волокон при сжатии вдоль волокон совпадает практически со значением  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  для одного изолированного волокна таких же размеров при сжатии вдоль волокна.

Из вышеизложенного **вывода**, относящегося к механике взаимодействия коротких волокон в композите, можно сделать **вывод инженерного характера**, относящийся к созданию композитов и который можно сформулировать следующим образом. С точки зрения *критерия прочности при сжатии* композитных материалов (армированных короткими волокнами) *вдоль волокон* **создание композитов при  $S_a \geq 50\%$**  ( $S_a$  – объемная концентрация волокон) **может оказаться не эффективным для указанных материалов с неоднородной структурой**. Дело в том, что из Рис. 4.18 следует, что при  $r^* < 1$  ( $r^* = 1$  соответствует расстоянию между торцами соседних волокон, которое равно длине волокна; в этом случае  $S_a \approx 50\%$ ) происходит существенное уменьшение величины  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$ , т.е. снижение предела прочности при  $S_a > 50\%$ .

В случае композитов с *упорядоченной структурой* (например, двоякопериодической структурой в плоскости поперечного сечения волокнистого композита) поддерживающее влияние соседних периодических рядов коротких волокон может не допустить снижения величины  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  при росте величины  $S_a$ , который возникает (в соответствии с кривыми на Рис. 4.18) на интервале  $(0,2 \leq r^* \leq 1)$  при сближении торцов. Необходимо отметить, что сближение торцов двух соседних волокон в периодическом ряду последовательно расположенных коротких волокон соответствует движению по оси  $Or^*$  на Рис. 4.18 справа налево.

В случае композитов с *неупорядоченной (нерегулярной) структурой* в отдельных частях композита могут возникать ситуации, которым соответствует расчетная схема на Рис. 4.3,  $z$  (один периодический ряд волокон в «бесконечном» пространстве, т.е. без взаимодействия с волокнами соседних рядов). В этом случае в таких частях композита справедлив **вывод**, относящийся к механике взаимодействия коротких волокон в композите, который сформулирован при анализе результатов на Рис. 4.18; следовательно, к таким частям материала относится и **вывод** о неэффективности создания обсуждаемых материалов при  $S_a > 50\%$ .

Безусловно, для обсуждаемого эффекта необходимы еще дополнительные исследования, но обсуждаемое явление существует.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении результатов, относящихся к расчетной схеме на Рис. 4.3,  $z$ ; дополнительную информацию можно получить из монографии [64], обзорной статьи [65], отдельных статей [109, 252, 365] и других публикаций.

**4.5.6. Результаты для одного периодического ряда параллельно расположенных волокон при сжатии вдоль волокон.** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, д. Постановка задач включает позицию **5** после Рис. 4.3, а – е в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследования проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2. Дополнительно вводится безразмерный параметр  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$ ; геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на расчетной схеме на Рис. 4.3, д. Следует подчеркнуть, что позиция **5** после Рис. 4.3, а – е предусматривает, что для расчетной схемы на Рис. 4.3, д ставятся условия затухания «на бесконечности» лишь по координате  $x_1$  (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ), а по координате  $x_2$  ставятся условия периодичности; в связи с этим при реализации численного метода исследования возникает следующая ситуация. Как уже отмечалось в п. 4.4.2, при реализации численного метода бесконечная область заменяется конечной областью в виде прямоугольника  $l_1 \times l_2$ , который на Рис. 4.3, д указан пунктирными линиями. Учитывая вышеизложенное, для периодического ряда (Рис. 4.3, д) в указанном «пунктирном» прямоугольнике фиксируется размер  $l_2$  из условия периодичности и лишь размер  $l_1$  изменяется для обеспечения условий затухания «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ), т.е. значения параметра  $l_1$  определяются путем вычислительного эксперимента.

Следует отметить, что для периодической структуры (Рис. 4.3, д) с периодом  $T = m_2 + r$  можно рассматривать периодические (вдоль оси  $0x_2$ ) формы потери устойчивости с периодом, кратным периоду структуры, в виде  $N(m_2 + r)$ , где  $N$  – целое число; при этом «пунктирный» прямоугольник уже охватывает  $N$  коротких волокон.

Рассмотрим построение «мысленных» форм потери устойчивости для периодической структуры (Рис. 4.3, д), ориентируясь на «пунктирный» прямоугольник на этом рисунке, в который входит одно короткое волокно. Указанное построение осуществляется по аналогии с построением в предыдущем пункте. Для примера на Рис. 4.19 показаны «мысленные» формы потери устойчивости **а, б, в** и **г**, которые можно также характеризовать по аналогии с п. 4.5.5; отметим только, что «мысленные» формы потери устойчивости **а** и **б** на Рис. 4.19 имеют вдоль вертикальной оси период  $T = m_2 + r$ , а формы **в** и **г** на Рис. 4.19 имеют вдоль вертикальной оси период, равный  $2(m_2 + r)$ . Ограничимся вышеприведенными сведениями при обсуждении построения «мысленных» форм потери устойчивости применительно к расчетной схеме на Рис. 4.3, д.

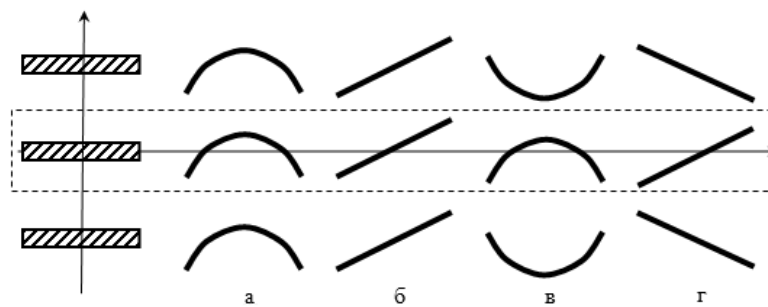


Рис. 4.19

Ниже, следуя [253], приведем информацию о результатах исследования зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{sp}|$  (величины критической деформации вдоль оси  $0x_1$  в матрице «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) в соответствии с расчетной схемой на Рис. 4.3, д) от безразмерной величины  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на расчетной схеме на Рис. 4.3, д), характеризующей относительное расстояние между

соседними параллельными волокнами в бесконечном периодическом ряду волокон, расположенных вдоль оси  $0x_2$ . Исследования проводились для композитов со следующими значениями параметров [253]:  $E_a=1,2$  ТПа;  $E_m=3,5$  ГПа;  $\nu_a=\nu_m=0,4$ ;  $k=m_1 \cdot m_2^{-1}=10; 20; 50; 100; 500$  при изменении  $r^*$  в интервале  $0,2 \leq r^* \leq 4,5$ . Результаты исследований представлены на Рис. 4.20, где цифрами возле каждой кривой указано значение параметра  $k$ .

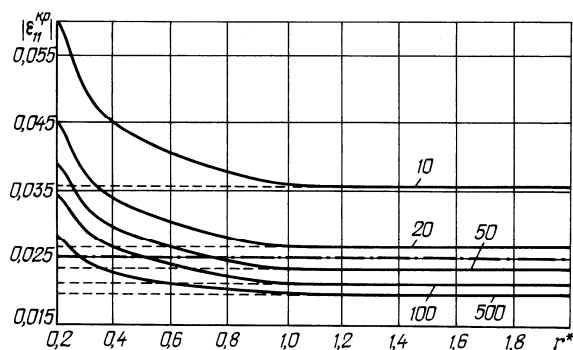


Рис. 4.20

Из результатов, представленных на Рис. 4.20, можно сделать вывод, что с увеличением расстояния между соседними волокнами, величина которого превышает длину волокна (при  $r^* > 1$ ) значение величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  практически не изменяется и соответствует результатам, полученным для одного волокна в матрице (расчетная схема на Рис. 4.3, а). Величина  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  для одного во-

локна в матрице представлена на Рис. 4.20 пунктирной линией для каждого значения параметра  $k$ . При уменьшении расстояния между соседними волокнами в ряду параллельных волокон (расчетная схема на Рис. 4.3, д), т.е. при  $r^* < 1$ , как следует из Рис. 4.20, величина критической деформации вдоль оси  $0x_1$  (величина  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ ) увеличивается для всех случаев, определяемых значением параметра  $k$ . Таким образом, в случае периодического ряда параллельных волокон (расчетная схема Рис. 4.3, д) не возникает ситуация, которая подробно обсуждена в заключительной части п. 4.5.5 применительно к случаю периодического ряда последовательно расположенных волокон (расчетная схема на Рис. 4.3, з) и которая возникла в связи с уменьшением величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  при  $r^* < 1$ , что следует из результатов на Рис. 4.18 для расчетной схемы на Рис. 4.3, з.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении результатов, относящихся к расчетной схеме на Рис. 4.3, д; дополнительную информацию можно получить из монографии [64], обзорной статьи [65], отдельных статей [110, 253] и других публикаций.

**4.5.7. Результаты для одного волокна, расположенного вблизи поверхности, при сжатии вдоль волокна. (Анализ приповерхностной неустойчивости).** Расчетная схема представлена на Рис. 4.3, е. Постановка задач включает позицию 6 после Рис. 4.3, а – е в п. 4.2, п. 4.3.3 и п. 4.4.1; при этом исследования проводились методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2. Дополнительно вводится безразмерный параметр  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$ , который характеризует относительное расстояние от волокна до границы полуплоскости (граничной поверхности материала); геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на расчетной схеме на Рис. 4.3, е.

Как уже отмечалось в п. 4.2 после позиции 6, шестая расчетная схема (Рис. 4.3, е), исследования в рамках которой проводятся в настоящем п. 4.5.7, является *самой простейшей* расчетной схемой при исследовании приповерхностного разрушения в рамках **второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ)**, краткое описание которого представлено в п. 3.1.3, и *модели кусочно-однородной среды* применительно к плоской задаче (плоская деформация). Безусловно, количество простейших расчетных схем при исследовании приповерхностного разрушения в рамках плоской задачи (плоская деформация) можно существенно расширить, если в расчетных схемах, представленных на Рис. 4.3, б – д, предусмотреть введение границы полуплоскости.



При исследовании обсуждаемой проблемы в рамках простейшей расчетной схемы (Рис. 4.3, е), чему и посвящен настоящий п. 4.5.7 исключительно, на границе полуплоскости при  $x_2 = 0$  (Рис. 4.3, е) для плоской задачи (плоская деформация) ставятся определенные граничные условия. В настоящем п. 4.5.7 рассматриваются при  $x_2 = 0$  только граничные условия в напряжениях на незагруженной свободной полуплоскости при определении докритического состояния; в этом случае при исследовании задачи устойчивости при  $x_2 = 0$  ставятся однородные граничные условия в напряжениях. В рассматриваемом случае исследования явления приповерхностной потери устойчивости применительно как к определению докритического состояния, так и к решению соответствующей задачи устойчивости ставятся условия затухания «на бесконечности» при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  и  $x_2 \rightarrow -\infty$ .

Учитывая вышеизложенное, при применении численного метода, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2, полубесконечная область (полуплоскость) заменяется конечной областью в виде прямоугольника с размерами  $l_1 \times l_2$ , который представлен на Рис. 4.3, е. При этом одна из сторон вышеуказанного прямоугольника проходит по границе полуплоскости, а остальные три стороны прямоугольника указаны «пунктирными» линиями на Рис. 4.3, е; на «пунктирных» сторонах прямоугольника ставятся граничные условия, соответствующие условиям затухания при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  и  $x_2 \rightarrow -\infty$ . При применении вышеуказанного численного метода размеры обсуждаемого прямоугольника увеличиваются за счет изменения положения «пунктирных» сторон; при этом размеры  $l_1 \times l_2$  выбираются такими, чтобы их дальнейшее увеличение не влияло на конечные результаты (на величину критического нагружения или величину критической деформации), что определяется в результате вычислительного эксперимента.

**Примечание 4.6.** Необходимо отметить *специфическую ситуацию*, которая возникает при исследовании в рамках механики приповерхностного разрушения, начальным этапом (стартом) которого является приповерхностная потеря устойчивости в композите возле поверхности материала, *когда возле поверхности материала находится армирующий элемент конечных размеров (например, короткое волокно, Рис. 4.3, е)*. Обсуждаемую ситуацию рассмотрим на примере *самой простейшей* расчетной схемы (Рис. 4.3, е), относящейся к исследованию приповерхностного разрушения. В этом случае при нагружении «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) равномерно распределенной по  $x_2$  нагрузкой постоянной интенсивности имеет место возле короткого цилиндра несимметричное (относительно срединной линии цилиндра, при  $x_2 = -(r + 0,5m_2)$ ) на Рис. 4.3, е) распределение материала, так как при  $x_2 > 0$  материал отсутствует вообще. При указанных условиях возле *короткого волокна* возникает локальный изгиб, вызванный отмеченной несимметричностью в распределении материала; причем отмеченный локальный изгиб возрастает с ростом величины сжимающей нагрузки. Обсуждаемая ситуация возникает в докритическом состоянии; следовательно, в рассматриваемом случае имеет место *значительно более сложный механизм* потери устойчивости по сравнению с потерей устойчивости стержня при осевом сжатии. Целесообразно отметить, что применительно к расчетной схеме на Рис. 4.3, е задание «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) равномерно распределенной по  $x_2$  нагрузки постоянной интенсивности эквивалентно заданию «на бесконечности» (при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ) постоянно укорочения вдоль оси  $Ox_1$  (независящего от  $x_2$ ).

**Примечание 4.7.** Необходимо отметить, что ситуация, рассмотренная в **Примечании 4.6**, не имеет места при проведении исследований о приповерхностном разрушении композитов в рамках модели «бесконечно длинных армирующих элементов», которые расположены параллельно свободной поверхности композитов. Такие результаты в рамках **второго направления**, краткое описание которого представлено в

п. 3.1.3, и модели кусочно-однородной среды, в весьма краткой форме изложены для слоистых композитов в п. 3.3.3.2 и для волокнистых однонаправленных композитов в п. 3.3.4.2. Дело в том, что при получении вышеуказанных результатов «на бесконечности» (возле граничной поверхности) задаются *одинаковые укорочения для армирующих элементов и матрицы*, что естественно в рамках модели «бесконечно длинных слоев и волокон» и что приводит к возникновению однородного докритического состояния.

В монографии [64], обзорной статье [65], отдельных статьях [111, 254] и в ряде других публикаций приведены многочисленные результаты количественного характера, относящиеся к описанию локального изгиба короткого волокна применительно к определению докритического состояния в рамках расчетной схемы на Рис. 4.3, *e*; ниже приведем лишь два конкретных примера. Наличие обсуждаемого изгиба в докритическом состоянии для расчетной схемы на Рис. 4.3, *e* удобно характеризовать разностью вертикальных перемещений (перемещений  $u_2^0$ ) в следующей форме

$$u_2^{0*} = u_2^0 \Big|_{x_1=0} - u_2^0 \Big|_{x_1=0,5m_1}, \quad (4.4)$$

где:  $u_2^0 \Big|_{x_1=0}$  – вертикальное перемещение (перемещение  $u_2^0$ ) на вертикальной линии, проходящей через центр армирующего элемента;  $u_2^0 \Big|_{x_1=0,5m_1}$  – вертикальное перемещение (перемещение  $u_2^0$ ) на вертикальной линии, проходящей через торец армирующего элемента. В этом случае, положив в (4.4)  $x_2 = -(r + 0,5m_2)$ , согласно Рис. 4.3, *e* получаем разность вертикальных перемещений центра армирующего элемента и центра торца армирующего элемента в виде

$$u_2^{0*} \Big|_{x_2=-(r+0,5m_2)} = \left( u_2^0 \Big|_{x_1=0} - u_2^0 \Big|_{x_1=0,5m_1} \right) \Big|_{x_2=-(r+0,5m_2)}. \quad (4.5)$$

Положив в (4.4)  $x_2 = 0$ , согласно Рис. 4.3, *e* получаем разность вертикальных перемещений точек, лежащих на свободной поверхности и являющихся проекцией (центра армирующего элемента и центра торца армирующего элемента) на свободную поверхность, в следующем виде

$$u_2^{0*} \Big|_{x_2=0} = \left( u_2^0 \Big|_{x_1=0} - u_2^0 \Big|_{x_1=0,5m_1} \right) \Big|_{x_2=0}. \quad (4.6)$$

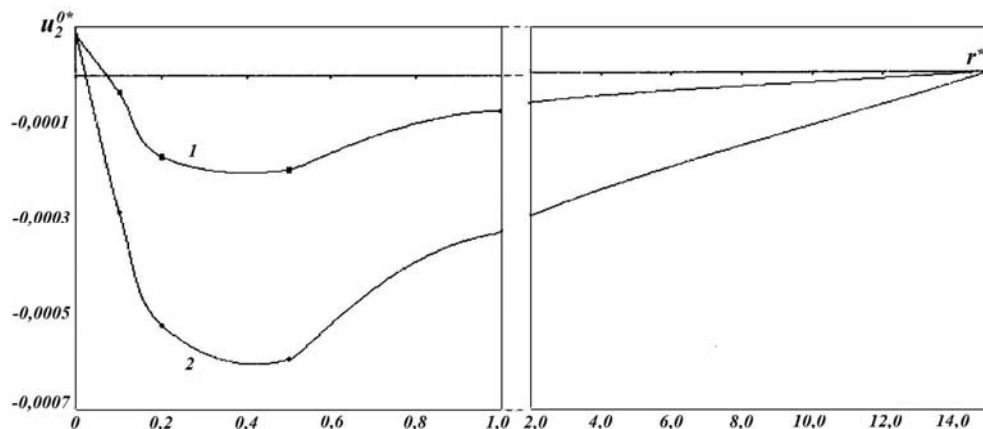


Рис. 4.21

На Рис. 4.21 показана зависимость величины  $u_2^{0*}$  (4.4) (разности вертикальных перемещений) от (безразмерного расстояния от свободной поверхности) величины  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (геометрические параметры указаны на Рис. 4.3, *e*); при этом кривая 1 на

Рис. 4.21 соответствует случаю (4.5) и кривая **2** на Рис. 4.21 соответствует случаю (4.6). Результаты на Рис. 4.21 получены для следующего интервала ( $0,0 \leq r^* \leq 15,0$ ) изменения безразмерного расстояния до свободной поверхности на Рис. 4.3, *е*. Результаты, представленные на Рис. 4.21, получены для конкретного композита со следующими параметрами:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 343$ ;  $E_m = 3,51$  ГПа;  $\nu_a = \nu_m = 0,4$ ;  $k = m_1 \cdot m_2^{-1} = 1000$ .

Из результатов, представленных на Рис. 4.21 следует, что во всем интервале изменения  $r^*$  ( $0 \leq r^* \leq 15$ ) величина разности вертикальных перемещений центра армирующего элемента и торца армирующего элемента (кривая **1**) не равна нулю, что свидетельствует о существовании локального изгиба; лишь при  $r^* \rightarrow 15$  рассматриваемая разность  $\rightarrow 0$ . Таким образом, при  $r^* > 15$  локальный изгиб отсутствует и получаемые числовые результаты соответствуют случаю одного армирующего элемента в бесконечной матрице (расчетная схема на Рис. 4.3, *а*, результаты в п. 4.5.2).

На Рис. 4.22 для докритического состояния в конкретном композите показана (в безразмерных величинах) зависимость величины разности вертикальных перемещений центра армирующего элемента и центра торца армирующего элемента (величины (4.5)) от величины сжимающей нагрузки «на бесконечности» в соответствии с расчетной схемой на Рис. 4.3, *е*; при этом на Рис. 4.22 пунктирной линией представлено значение  $P^{кр}$ , соответствующее потере устойчивости.

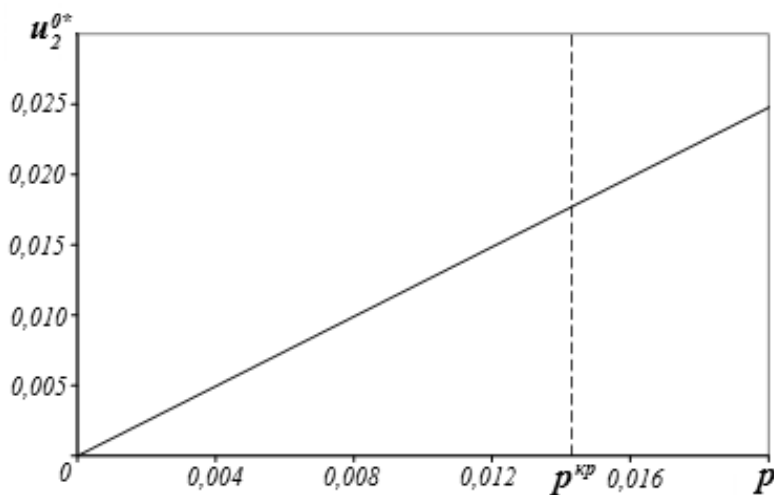


Рис. 4.22

На Рис. 4.23 представлены результаты, относящиеся к исследованию приповерхностной потери устойчивости для расчетной схемы на Рис. 4.3, *е*. Обсуждаемые результаты получены для композитов со следующими значениями параметров:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 343$ ;  $1000$ ;  $E_m = 3,51$  ГПа;  $\nu_a = \nu_m = 0,4$ ;  $k = m_1 \cdot m_2^{-1} = 200, 1000$  и для следующего интервала изменения ( $0 \leq r^* \leq 15$ ) безразмерного параметра  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$ ; при этом геометрические параметры  $m_1, m_2$  и  $r$  указаны на Рис. 4.3, *е*. Следует отметить, что на Рис. 4.23 пунктирными линиями показаны значения  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  для одного волокна в «бесконечной» матрице (расчетная схема на Рис. 4.3, *а*, внутренняя потеря устойчивости) при соответствующих значениях геометрических и механических параметров композита. Кривые **1**, **2** и **3** на Рис. 4.23 соответствуют композитам со следующими значениями параметров: кривая **1**  $\sim E_a \cdot E_m^{-1} = 1000, k = 1000$ ; кривая **2**  $\sim E_a \cdot E_m^{-1} = 343, k = 200$ ; кривая **3**  $\sim E_a \cdot E_m^{-1} = 1000, k = 200$ . Кривые **1**, **2** и **3** на Рис. 4.23 при росте параметра  $r^*$  (при удалении волокна от свободной поверхности на Рис. 4.3, *е*) асимпто-

тически приближаются снизу к соответствующим пунктирным линиям и при  $r^* = 1$  практически совпадают с ними. Заметим, что случай  $r^* = 1$  соответствует расстоянию волокна от свободной поверхности материала (Рис. 4.3, e), равной длине волокна.

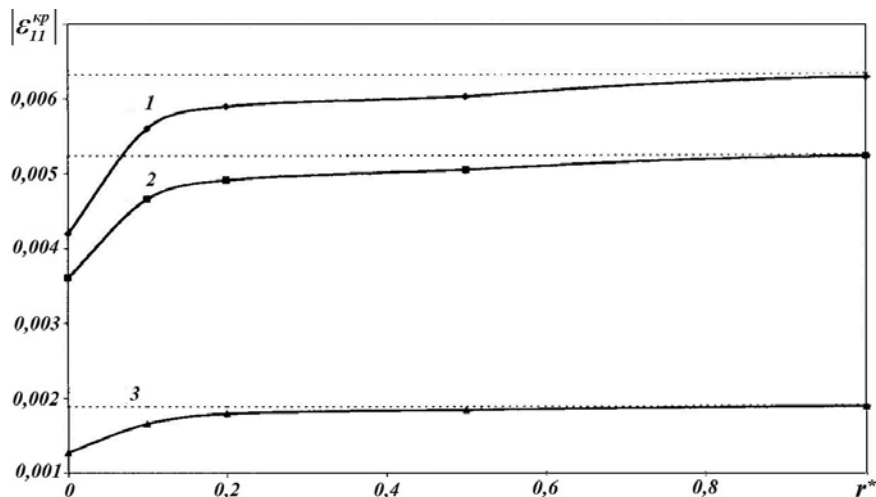


Рис. 4.23

Таким образом, из вышеизложенного анализа следует, что для рассмотренных композитов имеют место два следующих вывода.

1. При  $r^* \geq 1$  нет необходимости исследовать приповерхностную неустойчивость, так как для нее величина  $|\epsilon_{11}^{кр}|$  практически совпадает с соответствующим значением  $|\epsilon_{11}^{кр}|$ , вычисленным для внутренней неустойчивости (расчетная схема на Рис. 4.3, a, волокно в «бесконечной» матрице).

2. При  $r^* \leq 1$  исследование приповерхностной неустойчивости является целесообразным, так как при  $r^* \rightarrow 0$  возможно уменьшение величины  $|\epsilon_{11}^{кр}|$  до 30% по сравнению со значением  $|\epsilon_{11}^{кр}|$ , вычисленным для внутренней неустойчивости (расчетная схема на Рис. 4.3, a, волокно в «бесконечной» матрице).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении результатов, относящихся к расчетной схеме на Рис. 4.3, e; дополнительную информацию можно получить из монографии [64], обзорной статьи [65], отдельных статей [111, 254, 368] и других публикаций.

**4.6. Заключение к §4.** Прежде всего, целесообразно отметить, что **Проблема 2** «Модель коротких волокон в теории устойчивости и в механике разрушения композитных материалов при сжатии», анализу которой посвящен §4 настоящей обзорной статьи, начала активно разрабатываться лишь с начала XXI-го века. В связи с этим в обсуждаемом параграфе существенное внимание уделено аспектам постановочного характера, что в свою очередь и привело к расширению объема представленного материала.

В настоящем параграфе для модели коротких волокон, как и в предыдущем параграфе для модели «бесконечно длинных» волокон и слоев, принята **Общая концепция**, заключающаяся в том, что при сжатии обсуждаемых композитов вдоль волокон и слоев *начало (старт) разрушения определяется потерей устойчивости во внутренней структуре композитов* по типу внутренней или приповерхностной неустойчивости. Следует отметить, что вышеуказанный механизм начала разрушения получил определенное экспериментальное подтверждение, соответствующие результаты представлены в обсуждаемых параграфах.

Изложенные в §4 сведения по обсуждаемой **Проблеме 2**, относящиеся к постановке задач, подходам и конкретным результатам, основаны на модели *кусочно-однородной среды* с привлечением *аппарата ТЛТУДТ*; отмеченный общий подход, по-видимому, является наиболее строгим в рамках механики деформируемых тел применительно к исследуемой проблеме. Конкретные результаты по **Проблеме 2** при вышеуказанном общем подходе могут быть получены *лишь с привлечением численных методов*, так как во всех задачах, относящихся к **Проблеме 2**, приходим к *неоднородным докритическим напряженно-деформированным состояниям*.

В §4 по **Проблеме 2** анализировались пространственные (трехмерные) задачи и плоские (двухмерные в случае плоской деформации) задачи. Пространственные (трехмерные) задачи относятся к композитам, которые армированы наполнителем в виде коротких цилиндров кругового поперечного сечения. Плоские (двухмерные) задачи при строгом рассмотрении относятся к ленточным композитам; при приближенном рассмотрении результаты указанных задач можно использовать при анализе явлений, которые возникают в композитах, армированных короткими волокнами.

В настоящее время по **Проблеме 2** исследованы задачи лишь применительно к *хрупкому разрушению*. При исследовании (в рамках вышеизложенных постановок) соответствующих задач применительно к *пластическому разрушению* возникают дополнительные сложности, связанные с определением докритического неоднородного состояния с учетом зон разгрузки, изменяющихся в процессе нагружения.

Актуальным для **Проблемы 2** является исследование влияния формы торцов коротких волокон на величину критической деформации при сжатии; при этом следует учесть, что величина  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  (критическое укорочение при потере устойчивости) является критерием разрушения, начальный этап (старт) которого определяется потерей устойчивости. Отмеченный критерий разрушения является критерием разрушения интегрального характера, поскольку величина  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  определяется через собственное число соответствующей задачи на собственные значения в рамках ТЛТУДТ. В силу интегрального характера применяемого критерия разрушения, по-видимому, можно считать, что влияние формы торцов коротких волокон на величину  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  будет менее ощутимым по сравнению с применением локальных критериев разрушения, которые определяются значениями некоторых инвариантов тензора напряжений в рассматриваемой точке материала. Все же, несмотря на вышеизложенное соображение, *исследование влияния формы торцов коротких волокон на величину  $|\varepsilon_{11}^{кр}|$  (критическое укорочение, соответствующее потере устойчивости) является достаточно актуальным для рассматриваемой в настоящем §4 Проблемы 2.*

#### **§5. Проблема 3. Разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов.**

В настоящем параграфе в весьма краткой форме (по сравнению с **Проблемой 1**, §3 настоящей статьи и **Проблемой 2**, §4 настоящей статьи) излагаются основные результаты по обсуждаемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; при этом изложение рассматриваемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении в настоящую статью (без привлечения аспектов математического характера). Также приведена информация о некоторых результатах экспериментальных исследований, соответствующих формированию обсуждаемой проблемы.

**5.1. Введение.** Основные результаты по рассматриваемой проблеме, полученные сотрудниками отдела динамики и устойчивости сплошных сред, представлены в монографиях [54] (глава 7, §4, с. 568 – 589) и [57] (т. 2, глава 11, §4, с. 529 – 551), обзорных статьях [329, 336, 347, 350] и [21] (в списке литературы к [336]), отдельных статьях [51, 76, 304, 305, 317, 325] и в докладах на международных конференциях [312, 314, 316, 320, 321, 323, 324], а также в ряде других публикаций, которые не вошли в список литературы к настоящей обзорной статье. Необходимо отметить, что название

явления «смятие торцов при сжатии композитов», которое исследуется в рамках обсуждаемой **Проблемы 3**, переводилось на английский язык как «buckling of the ends» – в [304, 305], «bearing strain in end faces» – в [312, 314] и «end-crush fracture of compressed composites» – в [347, 350]. В русскоязычной литературе явление «смятия торцов при сжатии композитов» также называется «метелкованием».

Следует отметить, что диссертация на степень доктора физико-математических наук (DSc) Ю.В.Коханенко также, частично, относится к рассматриваемому научному направлению. В целом же вышеуказанная диссертационная работа Ю.В.Коханенко посвящена разработке численного метода исследования задач, основанного на методе конечных разностей с привлечением вариационно-разностного подхода и использованием базовых схем, краткое описание которого приведено в п. 4.4.2; обсуждаемый метод предназначен для кусочно-однородных сред, что соответствует модели кусочно-однородных материалов в механике композитов, в том числе в исследованиях с привлечением аппарата ГЛТУДТ. В связи с вышеизложенным следует отметить, что в список литературы к настоящей обзорной статье включены публикации, результаты которых получены с привлечением обсуждаемого метода, например [64, 65, 76, 128, 129, 503, 504] и ряд других.

Вышеизложенными сведениями общего характера ограничимся при формировании Введения к §5 настоящей обзорной статьи.

**5.2. Экспериментальные исследования.** Предметом исследований в рассматриваемой **Проблеме 3** является анализ явлений, которые возникают возле торцов композитов в виде однонаправленных волокнистых или слоистых материалов при сжатии вдоль волокон и слоев или в композитах другой структуры при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала. В связи с вышеотмеченным, в настоящем п. 5.2 при рассмотрении результатов экспериментальных исследований основное внимание будем уделять анализу характера разрушений возле торцов в образцах из композитов.

Рассмотрим характер разрушения возле торцов образцов из металлокомпозита, экспериментальные результаты для которого представлены в **Примере** в заключительной части п. 3.3.4.1. Обсуждаемые экспериментальные результаты относятся к одноосному сжатию вдоль волокон для металлокомпозита (однонаправленный волокнистый бороалюминиевый композит с 50% содержанием волокон бора,  $S_a = S_m = 0,5$ ) ВКА-1 с волокнами бора диаметром 140 мкм. Общий вид образцов из бороалюминия *до разрушения* представлен на Рис. 3.37 и на Рис. 3.38 представлена (при значительном увеличении) внутренняя структура бороалюминиевого борокомпозита в поперечном сечении. На Рис. 5.1 представлен общий вид *разрушенного образца при пластическом разрушении*; из Рис. 5.1 следует, что *левый торец образца разрушился в виде смятия торца, когда разрушение имеет локальный характер (возле левого торца) и не распространяется на всю длину образца*. Целесообразно отметить, что общий вид разрушенной части образца на Рис. 5.1 визуально имеет вид «метелки», в связи с чем и появился термин разрушения в виде «метелкования».

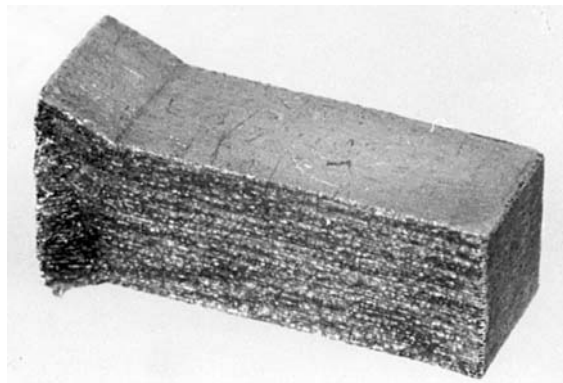


Рис. 5.1

Вышеизложенные результаты (Рис. 5.1) наряду с другими результатами по пластическому разрушению при одноосном сжатии бороалюминиевого композита *в виде смятия торцов*, как уже отмечалось в п. 3.3.4.1 настоящей обзорной статьи, опубликованы в статье [95] и сравнительно подробно изложены в монографии [57] (т.1, глава 4, с. 486 – 488), где можно получить более подробную информацию.

Целесообразно отметить, что среди разнообразных механизмов, реализуемых при разрушении композитов, достаточно распространенными являются механизмы, связанные с разрушением при смятии торцов для образцов и элементов конструкций из композитов в случае сжатия, в рассмотренном примере – в случае одноосного сжатия. В общих чертах явление разрушения *при смятии торцов* состоит в том, что (для образцов и элементов конструкций из композитов) *происходит местное разрушение материала возле торцов, при этом указанное разрушение не распространяется далеко от торцов и уменьшается при удалении от них*. В связи с этим пределы прочности материала, соответствующие разрушению при смятии торцов, несколько меньше пределов прочности, соответствующих разрушению всего материала (вдали от торцов, внутреннего разрушения – по терминологии п. 3.3). Учитывая вышеизложенное, обычно при экспериментальном определении пределов прочности *при сжатии* (имеются в виду пределы прочности, соответствующие разрушению материала вдали от торцов) на образцах при помощи различных конструктивных и технологических приемов *исключают возможность проявления смятия торцов*. В частности, проявление смятия торцов исключается с помощью приматывания концов образцов по боковым поверхностям вблизи торцов или посредством помещения торцов образцов в обоймы из более жесткого материала. Применение последнего приема для образцов из стеклопластика реализовано в исследованиях, результаты которых представлены на Рис. 3.8 – 3.10, где торцы образцов из стеклопластика помещались в специально изготовленные металлические оправки. Непринятие вышеуказанных приемов может привести к явлению разрушения в виде смятия торцов, что и показано на Рис. 5.1.

Исключение явления смятия торцов в случае экспериментальных исследований образцов в лабораторных условиях (посредством применения различных конструктивных или технологических приемов) не исключает проявления этого и других аналогичных явлений в натуральных элементах конструкций. Явления, аналогичные разрушению при смятии торцов, наблюдаются в различных элементах конструкций, например, в различных соединениях и стыковочных узлах. Применительно к древесине (как конструкционному материалу) эти явления известны давно и неоднократно наблюдались и описывались многими исследователями. Необходимо также отметить, что явление разрушения посредством смятия торцов наблюдается также при сложном напряженном состоянии, когда внешние сжимающие нагрузки, приложенные к торцам, достигают определенных значений.

Отметим, что экспериментальное исследование явления разрушения при смятии торцов довольно сложное и не всегда приводит к однозначным результатам. Это связано с тем, что при экспериментальных исследованиях обычно получают результат (снимок разрушенного возле торца образца или значение предела прочности), соответствующий уже закончившемуся процессу разрушения при смятии торца. Для исследования или описания рассматриваемого явления необходимо иметь сведения о первоначальном этапе разрушения (с целью выявления причин и механизма соответствующего явления); по сложной же картине разрушенного возле торца образца (соответствующего заключительному этапу разрушения) трудно провести идентификацию процессов на первоначальном этапе разрушения. Аналогичная ситуация возникает и в §3 настоящей статьи при анализе результатов экспериментальных исследований применительно к **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*).

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, представляется целесообразным и актуальным развитие теории, которая описывала бы разрушение при смятии торцов в континуальном приближении или в рамках модели кусочно-однородной среды.

**5.3. Теоретические исследования.** Применительно к обсуждаемой **Проблеме 3** результаты теоретических исследований представлены в публикациях, которые указаны во Введении (п. 5.1) в настоящей §5. Все указанные результаты теоретических исследований получены *исключительно* в рамках **второго направления (строгие последовательные подходы на основе ТЛТУДТ)**, краткая характеристика которого приведены в п. 3.1.3. Ниже в настоящем п. 5.3 в весьма краткой форме представлены теоретические результаты отдельно для: формулировки общей концепции, для модели кусочно-однородной среды и для континуального приближения (для континуальной модели).

**5.3.1. Общая концепция.** В общем случае рассматриваются композиты различной структуры, которые в континуальном приближении моделируются *ортотропными материалами*; при этом принимается, что *указанные материалы или образцы из таких материалов имеют торец, совпадающий с одной из плоскостей ортотропии, и к торцу приложена нормальная сжимающая нагрузка*. Вышеизложенную ситуацию можно рассматривать как расчетную схему, к которой относится и образец (Рис. 5.1, после разрушения) из однонаправленного волокнистого композита, когда поперечное сечение загружено внешней нормальной сжимающей нагрузкой.

**Общая концепция.** В вышеуказанной ситуации (внутренняя структура композита позволяет в континуальном приближении моделировать рассматриваемый композит ортотропным материалом; торец расположен в одной из плоскостей ортотропии материала; на торце приложена нормальная сжимающая нагрузка – сжатие осуществляется вдоль одной из осей симметрии свойств материала и геометрической формы элемента конструкции) *начальным этапом (стартом) разрушения при смятии торцов является приповерхностная потеря устойчивости возле загруженного торца*. При анализе дальнейшего развития рассматриваемого механизма разрушения необходимо учитывать его возможное взаимодействие с другими механизмами разрушения. *Теоретическим пределом прочности и теоретическим значением предельного укорочения при приповерхностном разрушении возле загруженного нормальным сжатием торца (разрушение при смятии торцов) являются величина критической нагрузки и величина критического укорочения, вычисленные в рамках применяемого варианта ТЛТУДТ.*

Высшеформулированная **Общая концепция** дает возможность разрабатывать механику разрушения при смятии загруженных торцов при сжатии, исследуя приповерхностную неустойчивость возле загруженного сжатием торца, как в рамках модели кусочно-однородной среды, так и в рамках континуальной теории. В обсуждаемых исследованиях принимается, что нагружение торца осуществляется «мертвыми» нагрузками, в связи с этим для хрупкого и пластического разрушений выполняются, в соответствии с п. 2.4.2, достаточные условия применимости статического метода исследования соответствующих задач ТЛТУДТ; таким образом, исследования по смятию торцов полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач.

**Примечание 5.1.** По-видимому, можно считать, что *определяющим фактором, обеспечивающим возникновение разрушения в виде смятия торцов, является реализация определенных граничных условий на торцах*. Дело в том, что сжатие на торцах реализуется: в случае образцов – через достаточно жесткие опорные плиты; в случае элементов конструкций – через достаточно жесткие стыковочные узлы. В вышеуказанных двух случаях нагружения сжатием на торцах в силу достаточной жесткости опорных плит и стыковочных узлов обеспечивается *на торце одинаковое укорочение армирующих элементов* (например, волокон или слоев) *и матрицы* (связывающего); отмеченная ситуация соответствует случаю, когда на всей поверхности торца композита заданы одинаковые нормальные перемещения в виде граничных условий. Если в силу конструктивных или технологических особенностей (например, полировка поверхности опорной плиты), на торце при нагружении сжатием обеспечивается весьма малое трение или его полное отсутствие, то отдельные части композита на торце могут достаточно свободно скользить вдоль плоскости опорной плиты; в обсуждаемой ситуации, по-видимому, и возникает разрушение в *виде смятия торцов*.

Таким образом, для возникновения явления разрушения в виде смятия торцов: «наиболее благоприятными» являются граничные условия на поверхности торца, когда на поверхности торца заданы постоянные нормальные перемещения и *нулевые касательные напряжения*; «наименее благоприятными» являются граничные условия на поверхности торца, когда на поверхности торца заданы постоянные нормальные перемещения и *нулевые касательные перемещения*. Следует отметить, что «наименее благоприятные» граничные условия соответствуют закреплению торцов в абсолютно жесткие обоймы (типа результатов эксперимента, представленных на Рис. 3.9 и 3.10), когда разрушение в виде смятия торцов не происходит.



**Примечание 5.2.** При исследовании задач механики разрушения при смятии торцов в рамках модели кусочно-однородной среды можно рассматривать *двухмерные* (плоские) задачи и *трехмерные* (пространственные) задачи. Плоские задачи (для плоской деформации) при строгом и последовательном рассмотрении и истолковании относятся к композитам *ленточной* структуры, в которых армирующими элементами являются параллельные бесконечные ленты постоянного поперечного сечения, направленные перпендикулярно к плоскости рассматриваемого рисунка (как и в п. 4.2 применительно к Рис. 4.3, *a – e*), и к композитам *слоистой* структуры (типа представленных на Рис. 3.2). При приближенном истолковании результаты для плоских задач (для плоской деформации) можно использовать при анализе явлений, которые возникают в однонаправленных волокнистых композитах, по аналогии с приближенным подходом, который в краткой форме описан в заключительной части п. 4.3.1. Пространственные задачи при последовательном рассмотрении относятся к *однонаправленным волокнистым* композитам (типа представленных на Рис. 3.1).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при формулировке и обсуждении **Общей концепции**, а также при рассмотрении отдельных моментов, относящихся к постановке и анализу задач механики разрушения при смятии торцов композитных материалов в случае сжатия.

**5.3.2. Об исследованиях в рамках модели кусочно-однородной среды.** В качестве примера исследования разрушения при смятии торцов, выполненного в рамках модели кусочно-однородной среды с привлечением аппарата ТЛТУДТ, в краткой форме рассмотрим результаты статьи [76], где обсуждаемые результаты получены для простейшей модели механики разрушения при смятии торцов; при этом изменим обозначения статьи [76] на обозначения, принятые в настоящей обзорной статье. Исследования проводятся в соответствии с **Общей концепцией**, изложенной в предыдущем п. 5.3.1, для *хрупкого разрушения при смятии торцов* с привлечением **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) в соответствии с терминологией п. 2.2 применительно к *слоистым композитам* (Рис. 3.2, модель «бесконечно длинных» слоев) в случае *малой концентрации* армирующих элементов (слоев наполнителя), когда взаимодействия двух соседних армирующих элементов (слоев) при потере устойчивости *можно не учитывать*; при этом анализ проводится *только для одного торца* (на Рис. 5.2 – для верхнего торца).

Простейшая расчетная схема, соответствующая вышеизложенной постановке задачи, представлена на Рис. 5.2 применительно к плоской задаче (плоская деформация) в плоскости  $x_1 0x_2$ , где ось  $0x_3$  направлена по перпендикуляру к плоскости Рис. 5.2. Поскольку явление смятия торца наблюдается только возле торца, затухая при удалении от торца, и в рассматриваемом случае анализируется ситуация, когда соседние армирующие элементы не взаимодействуют между собой (в силу их малой концентрации), то простейшая расчетная схема на Рис. 5.2 сводится к нижней полуплоскости  $x_2 \leq 0$  с одним армирующим элементом в виде полуполосы. Таким образом, исследование необходимо провести для части нижней полуплоскости, содержащей армирующий элемент, задавая граничные условия при  $x_2 = 0$  и условия затухания при  $x_2 \rightarrow -\infty$  и  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ; условно обсуждаемая часть полуплоскости выделена «волнистой линией» и границей при  $x_2 = 0$ , где через  $2h_a$ , как и на Рис. 3.2, обозначена толщина армирующего элемента (слоя).

При анализе *хрупкого разрушения при смятии торцов* свойства материалов наполнителя и связующего моделируются линейно-упругим изотропным телом; в связи с этим соотношения упругости будем использовать в

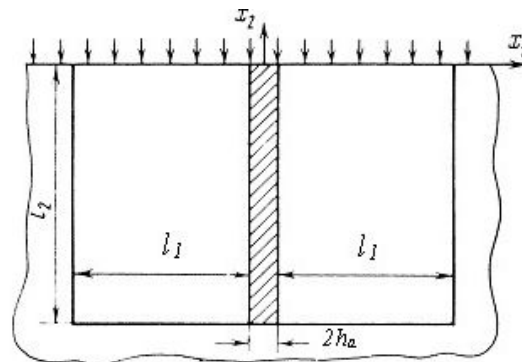


Рис. 5.2

традиционной форме, учитывая использование **теории 3** (второй вариант теории малых докритических деформаций)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^a &= \delta_{ij} \lambda_a \varepsilon_{mm}^a + 2\mu_a \varepsilon_{ij}^a; \quad \sigma_{ij}^m = \delta_{ij} \lambda_m \varepsilon_{mm}^m + 2\mu_m \varepsilon_{ij}^m; \\ 2\varepsilon_{ij}^a &= u_{i,j}^a + u_{j,i}^a; \quad 2\varepsilon_{ij}^m = u_{i,j}^m + u_{j,i}^m.\end{aligned}\quad (5.1)$$

В (5.1), как и во всей настоящей обзорной статье, применяются обозначения для упругих постоянных в виде:  $\lambda_a, \mu_a, E_a$  и  $\nu_a$  – для армирующих элементов (для наполнителя);  $\lambda_m, \mu_m, E_m$  и  $\nu_m$  – для матрицы (связующего).

В краткой форме рассмотрим определение докритического состояния согласно вышеизложенной постановке. Ограничимся анализом сжатия торца через жесткую опорную плиту, что на Рис. 5.2 условно показано системой вертикальных стрелок; в этом случае в соответствии с **Примечанием 5.1** на поверхности торца (на Рис. 5.2 при  $x_2 = 0$ ) возникает одинаковое укорочение наполнителя и связующего ( $\varepsilon_{22}^{a0} = \varepsilon_{22}^{m0}$ ). Все величины докритического состояния, как и во всей настоящей обзорной статье, отмечаются дополнительно индексом «ноль». Примем также на торце (при  $x_2 = 0$  на Рис. 5.2) отсутствует трение между образцом и опорной плитой; указанное условие согласно **Примечанию 5.1** соответствует «наиболее благоприятным» граничным условиям для возникновения явления разрушения в виде смятия торцов. Таким образом, на торце (при  $x_2 = 0$ ) для определения докритического состояния получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22}^{a0} &= c, \quad \sigma_{12}^{a0} = 0 \quad \text{при } |x_1| \leq h_a \quad \text{и } x_2 = 0; \\ \varepsilon_{22}^{m0} &= c, \quad \sigma_{12}^{m0} = 0 \quad \text{при } |x_1| \geq h_a \quad \text{и } x_2 = 0; \quad c = \text{const}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

При граничных условиях в виде (5.2) на торце (при  $x_2 = 0$  на Рис. 5.2) с учетом соотношений (5.1) для плоской деформации в плоскости  $x_3 = 0$  (Рис. 5.2,  $\varepsilon_{33} \equiv 0$ ) докритическое состояние определяется в аналитической форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{a0} &= 0; \quad \sigma_{12}^{a0} = 0; \quad \sigma_{22}^{a0} = 4\mu_a (\lambda_a + \mu_a) (\lambda_a + 2\mu_a)^{-1} \varepsilon_{22}^{a0}; \\ \sigma_{11}^{m0} &= 0; \quad \sigma_{12}^{m0} = 0; \quad \sigma_{22}^{m0} = 4\mu_m (\lambda_m + \mu_m) (\lambda_m + 2\mu_m)^{-1} \varepsilon_{22}^{m0}; \\ \varepsilon_{22}^{a0} &= \varepsilon_{22}^{m0} = c = \text{const}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

В краткой форме рассмотрим результаты исследования задачи устойчивости в соответствии с вышеизложенной постановкой задачи применительно к докритическому состоянию в виде (5.3), следуя статье [76]; обсуждаемая задача устойчивости имеет локальный характер возле торца при  $x_2 = 0$  на Рис. 5.2. Граничные условия на поверхности торца для задачи устойчивости, согласованные с условиями (5.2) для докритического состояния, имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22}^a &= 0; \quad \sigma_{12}^a = 0 \quad \text{при } |x_1| \leq h_a \quad \text{и } x_2 = 0; \\ \varepsilon_{22}^m &= 0; \quad \sigma_{12}^m = 0 \quad \text{при } |x_1| \geq h_a \quad \text{и } x_2 = 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

В силу локального характера рассматриваемой задачи устойчивости также ставятся условия затухания при удалении от торца (при  $x_2 \rightarrow -\infty$ ) и условия затухания при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  в силу анализа случая слоистых композитов с весьма малой концентрацией наполнителя (случай, когда два соседних слоя наполнителя не взаимодействуют между собой при потере устойчивости); обсуждаемые условия затухания представляются в следующей форме:

$$\mathbf{u}^a \rightarrow 0 \text{ при } x_2 \rightarrow -\infty; \mathbf{u}^m \rightarrow 0 \text{ при } x_2 \rightarrow -\infty \text{ или } x_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (5.5)$$

Для задачи устойчивости в рамках соотношений (2.21) – (2.27) и (2.10) – (2.13) применяемой **теории 3** (второй вариант теории малых докритических деформаций) также формулируются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений при  $x_1 = \pm h_a$  с учетом выражений (2.10) и (2.23).

Задача устойчивости для нижней полуплоскости  $x_2 \leq 0$  (Рис. 5.2) в рамках вышеуказанной применяемой теории при определяющих уравнениях в виде (5.1), граничных условиях в виде (5.4) на границе полуплоскости при  $x_2 = 0$ , условиях затухания в виде (5.5) и вышеуказанных условиях непрерывности векторов напряжений и перемещений при  $x_1 = \pm h_a$  исследовалась численным методом, краткая информация о котором представлена в п. 4.4.2. При численном исследовании рассматриваемой задачи полубесконечная область (нижняя полуплоскость) заменялась конечной областью в виде прямоугольника со сторонами  $2(l_1 + h_a) \times l_2$ , который указан на Рис. 5.2; при этом значения величин  $l_1 \cdot h_a^{-1}$  и  $l_2 \cdot h_a^{-1}$  выбирались из условия независимости конечного результата (критических значений укорочений или напряжений) от значений указанных величин. Было установлено, что при  $l_1 \cdot h_a^{-1} \geq 10$  и  $l_2 \cdot h_a^{-1} \geq 20$  дальнейшее увеличение этих величин не приводит к изменению конечных результатов; в связи с этим все нижеприведенные результаты были получены при следующих значениях указанных величин  $l_1 \cdot h_a^{-1} = 10$  и  $l_2 \cdot h_a^{-1} = 20$ . Результаты были получены как применительно к определению форм потери устойчивости для задачи, расчетная схема для которой представлена на Рис. 5.2, так и применительно к определению критического значения сжимающих напряжений  $\sigma_{22}^{a0}$  (в наполнителе) или  $\sigma_{22}^{m0}$  (в матрице) через критическое значение укорочения  $\varepsilon_{22}^{a0} = \varepsilon_{22}^{m0}$  на торце; отмеченные результаты по определению форм потери устойчивости и критических значений параметров нагружения рассмотрим отдельно.

Вначале рассмотрим *результаты по определению форм потери устойчивости* в обсуждаемой задаче, расчетная схема для которой представлена на Рис. 5.2. В обсуждаемой задаче форму потери устойчивости удобно характеризовать горизонтальными перемещениями (перемещениями вдоль оси  $0x_1$  на Рис. 5.2); в этом случае особенно характерным является горизонтальное перемещение точек срединной линии армирующего элемента, т.е. перемещение  $u_1^a(0, x_2)$ . На Рис. 5.3 показано изменение безразмерного перемещения  $u_1^* = u_1^a(0, x_2) \cdot h_a^{-1}$  вдоль оси  $0x_2^*$ , где  $x_2^* = -x_2 \cdot h_a^{-1}$ ; таким образом, на Рис. 5.3 показано *изменение* безразмерного горизонтального перемещения  $u_1^*$  точек срединной линии армирующего элемента *при удалении от торца*. Результаты на Рис. 5.3 представлены для композитов при  $\nu_a = \nu_m = 0,3$  для следующих случаев:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 25$  в виде сплошной линии;  $E_a \cdot E_m^{-1} = 100$  в виде пунктирной линии;  $E_a \cdot E_m^{-1} = 1600$  в виде штрихпунктирной линии. Из Рис. 5.3 следует, что затухание горизонтального перемещения  $u_1^*$  при удалении от торца имеет вид «быстро затухающей волны» и практически полное затухание достигается при  $x_2^* \approx 15$ , что соответствует 7,5 толщин наполнителя; при этом  $\max u_1^*$  достигается при  $x_2^* \approx 5$  (2,5 толщины наполнителя) и составляет 5 толщин наполнителя. Необходимо отметить, что вышеприведенные числовые характеристики явления затухания горизонтальных перемещений в форме потери устойчивости относятся лишь к рассмотренным примерам композитов с учетом рассмотренной в настоящем п. 5.3.2 постановки задач.

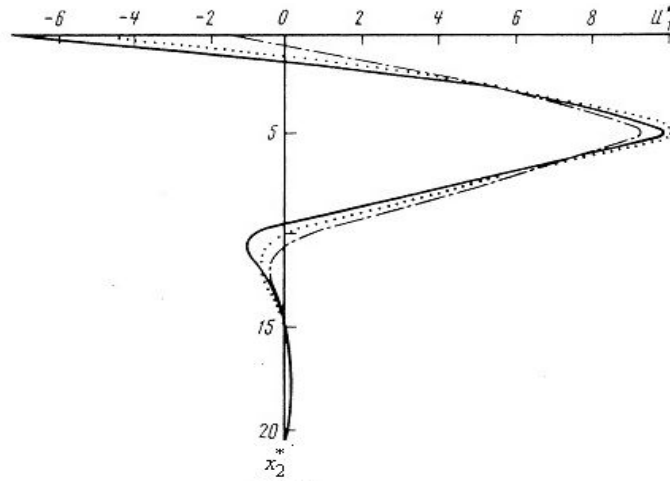


Рис. 5.3

Ниже рассмотрим результаты по определению критических значений параметров нагружения, соответствующих потере устойчивости. Из выражений (5.3) для критических значений получаем следующие соотношения

$$\left(\sigma_{22}^{a0}\right)^{кр} = E_a \left(1 - \nu_a^2\right)^{-1} \left(\varepsilon_{22}^{a0}\right)^{кр}; \quad \left(\sigma_{22}^{m0}\right)^{кр} = E_m \left(1 - \nu_m^2\right)^{-1} \left(\varepsilon_{22}^{m0}\right)^{кр}; \quad \left(\varepsilon_{22}^{a0}\right)^{кр} = \left(\varepsilon_{22}^{m0}\right)^{кр}. \quad (5.6)$$

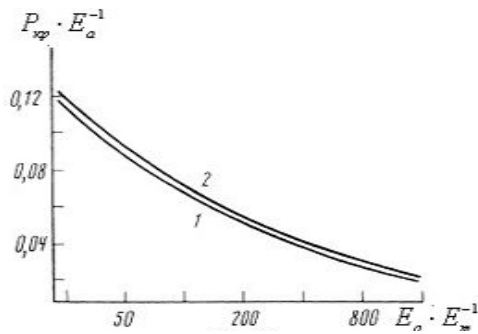


Рис. 5.4

В (5.6) через  $\left(\varepsilon_{22}^{a0}\right)^{кр}$  и  $\left(\varepsilon_{22}^{m0}\right)^{кр}$  обозначены критические укорочения для армирующего элемента и матрицы на торце (Рис. 5.2), которые равны между собой в силу рассматриваемого способа нагружения торца через опорную плиту. На Рис. 5.4 приведена зависимость величины

$$P_{кр} \cdot E_a^{-1} = \left| \left(\sigma_{22}^{a0}\right)^{кр} \right| \cdot E_a^{-1} \quad (5.7)$$

от параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$  (кривая 1 для  $\nu_a = \nu_m = 0,3$ ; кривая 2 для  $\nu_a = 0,3$  и  $\nu_m = 0,4$ ); причем на горизонтальной оси применена логарифмическая шкала  $\ln(E_a \cdot E_m^{-1})$ .

**Примечание 5.3.** Необходимо отметить, что в настоящем пункте 5.3.2 сравнительно подробно обсуждены результаты, которые изложены в статье [76], в связи со следующей ситуацией. В статье [76], по-видимому, впервые были представлены результаты по исследованию краевых эффектов в теории устойчивости композитов в рамках модели кусочно-однородной среды с привлечением аппарата ГЛТУДТ. В случае задач статики композитов результаты многочисленных исследований краевых эффектов в трехмерной постановке с привлечением модели кусочно-однородной среды изложены в 12-томной монографии [145] (т. 1, раздел III, главы 10 – 12, с. 313 – 445), где также достаточно подробно изложен разработанный численный метод исследования.

**5.3.3. Об исследованиях в рамках континуальной среды (континуальное приближение).** В настоящем пункте в достаточно краткой форме обсудим результаты исследования явления разрушения при смятии торцов образцов или элементов конструкций из композитов, когда композиты моделируются однородными материалами с усредненными параметрами, применительно к хрупкому и пластическому разрушениям; при этом отметим, что в п. 5.3.2 в рамках модели кусочно-однородного тела обсуждены соответствующие результаты только применительно к хрупкому разрушению.

Обсуждаемые результаты представлены в ряде статей, которые указаны во Введении (п. 5.1) в настоящий §5; кроме того, обсуждаемые результаты достаточно последовательно изложены в монографии [57] (т. 2, глава 11, §4, с. 529 – 551), что и будет использовано в настоящем п. 5.3.3 при кратком изложении соответствующих результатов.

Основные положения континуальной теории разрушения в виде смятия торцов при сжатии композитов сводятся к следующим положениям.

1. Принимается **Общая концепция**, изложенная в п. 5.3.1, в соответствии с которой *начальным этапом (стартом) разрушения при смятии торцов является приповерхностная потеря устойчивости возле нагруженного торца. Теоретическим пределом прочности и теоретическим значением предельного укорочения при приповерхностном разрушении возле нагруженного нормальным сжатием торца (разрушение при смятии торцов) является величина критической нагрузки и величина критического укорочения, вычисленные в рамках применяемого варианта ТЛТУДТ.*

2. Принимаются сведения и соображения о роли граничных условий при реализации разрушения при смятии торцов, которые изложены в **Примечании 5.1**.

3. При исследовании явления смятия торцов не будем учитывать влияния боковых поверхностей образца или элемента конструкции, а также взаимовлияния двух противоположных торцов (достаточно длинный образец), что дает возможность проводить исследование для нижнего полупространства  $x_3 \leq 0$  (Рис. 5.5), где торец отмечен «сеткой».

4. При исследовании поверхностной неустойчивости вблизи нагруженного торца докритическое состояние будем считать однородным. Если докритическое состояние является неоднородным, то применительно к каждой точке торцевой поверхности будем рассматривать локальную поверхностную неустойчивость (как бы выделяя малую окрестность этой точки); таким образом, снова приходим к однородному докритическому состоянию.

5. Внешнюю нормальную сжимающую нагрузку, приложенную к торцу при  $x_3 = 0$  (Рис. 5.5), будем считать «мертвой»; таким образом, для хрупкого и пластического разрушения выполняются, в соответствии с п. 2.4.2, достаточные условия применимости статического метода исследования (метода Эйлера).

6. Будем рассматривать слоистые и волокнистые композиты. Для слоистых композитов будем считать, что слои направлены перпендикулярно к торцевой поверхности  $x_3 = 0$ . Применительно к волокнистым композитам будем рассматривать однонаправленные или ортогонально-армированные материалы при условии, что направление преимущественного армирования совпадает с осью  $0x_3$  (Рис. 5.5), т.е. направлено перпендикулярно к торцевой поверхности  $x_3 = 0$ .

7. В континуальном приближении вышеуказанные композиты с полимерной или металлической матрицей будем моделировать однородным сжимаемым ортотропным упругим или упруго-пластическим материалом с усредненными постоянными, оси симметрии свойств которого совпадают с осями выбранной системы координат (Рис. 5.5); в случае трансверсального материала будем считать, что плоскости  $x_3 = \text{const}$  являются плоскостями изотропии.

8. Будем исследовать только приповерхностную неустойчивость возле нагруженного торца (на Рис. 5.5 нагруженный торец отмечен «сеткой»), когда напряжения и перемещения затухают при  $x_3 \rightarrow -\infty$ .

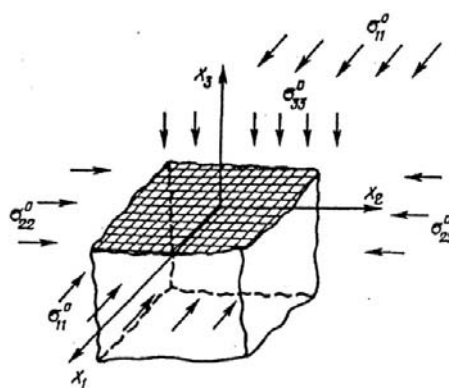


Рис. 5.5

9. Исследования будем проводить в рамках одного из вариантов ТЛТУДТ – в рамках **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) в соответствии с терминологией п. 2.2 настоящей обзорной статьи.

С привлечением *основных положений 1 – 9* развита континуальная теория разрушения *при смятии торцов при хрупком и пластическом разрушении*, разработан метод исследования плоских и пространственных задач, основанный на применении интегралов Фурье, а также получены конкретные результаты. Достаточно последовательно и подробно вышеуказанные результаты, как уже отмечалось во вводной части настоящего п. 5.1.3, изложены в монографии [57] (т. 2, глава 11, §4, с. 529 – 551); ниже в весьма краткой форме лишь приведем заключительные результаты.

Предварительно рассмотрим следующие обозначения:

$(\Pi_3^-)_{\text{T}}^{\text{см}}$  – теоретический предел прочности при одноосном сжатии вдоль оси  $0x_3$

(Рис. 5.5) при разрушении в виде смятия торца;

$(\Pi_3^-)_{\text{T}}$  – теоретический предел прочности при одноосном сжатии вдоль оси  $0x_3$

(без возникновения явления разрушения в виде смятия торца) при внутреннем разрушении (вдали от торца); такое же обозначение применялось в континуальной теории разрушения, изложенной в п. 3.3.2.

В результате строгого анализа получен заключительный результат, который с привлечением вышеприведенных обозначений можно представить в следующей форме

$$(\Pi_3^-)_{\text{T}}^{\text{см}} < (\Pi_3^-)_{\text{T}} . \quad (5.8)$$

Неравенство (5.8) соответствует соображениям физического характера и неоднократно наблюдаемым результатам экспериментальных исследований, свидетельствующих о том, что разрушение *однородных* материалов, как правило, начинается с поверхности материала. В связи с этим следует отметить, что, хотя в §5 рассматриваются композитные материалы, но в п. 5.3.3 рассматривается континуальное приближение для композитов и в континуальном приближении композиты являются *однородными* материалами.

Несмотря на строго доказанное неравенство (5.8), входящие в него величины отличаются между собой незначительно, что также доказано в монографии [57] (т. 2, глава 11, §4, с. 529 – 551) для *хрупкого и пластического* разрушения в виде смятия торцов; для иллюстрации вышеуказанной ситуации рассмотрим пример для случая *хрупкого* разрушения.

**Пример.** Рассмотрим волокнистый однонаправленный композит, в котором волокна направлены вдоль оси  $0x_3$  на Рис. 5.5 и который в плоскости поперечного сечения (при  $x_3 = \text{const}$  на Рис. 5.5) имеет неупорядоченную структуру. Обсуждаемый композитный материал при хрупком разрушении моделируется упругим трансверсально-изотропным материалом, в котором плоскостями изотропии являются плоскости  $x_3 = \text{const}$  на Рис. 5.5. При вышеуказанном моделировании в монографии [57] (т. 2, глава 11, §4, с. 542 – 543) получено выражение (11.276), которое можно представить в следующем виде

$$(\Pi_3^-)_{\text{T}}^{\text{см}} = (\Pi_3^-)_{\text{T}} \left[ 1 - \frac{G'^2}{E E'} (1 - \nu^2) \left( 1 - \nu'^2 \frac{E}{E'} \right) \right] . \quad (5.9)$$

В (5.9) дополнительно введены обозначения:  $E'$  – модуль Юнга вдоль оси  $0x_3$ ;  $E$  – модуль Юнга в плоскости изотропии (при  $x_3 = \text{const}$ );  $G'$  – модуль сдвига при сдвиге вдоль волокон,  $G' = G_{31} = G_{32}$ . Для обсуждаемого волокнистого однонаправленного композита в континуальном приближении выполняются (как для материала с пониженной сдвиговой жесткостью) следующие условия

$$G' \ll E' ; G' \approx E . \quad (5.10)$$

Из (5.9) и (5.10) получаем соотношение

$$\left(\Pi_3^-\right)_T^{CM} \approx \left(\Pi_3^-\right)_T. \quad (5.11)$$

Аналогичное соотношение имеет место и при *пластическом* разрушении, однако доказательство имеет значительно более громоздкий вид.

**Вывод.** Соотношение (5.11) можно использовать при приближенном сравнении величины  $\left(\Pi_3^-\right)_{\text{экспер}}^{CM}$  (экспериментальное значение предела прочности при одноосном сжатии вдоль оси  $Ox_3$  в случае разрушения в виде смятия торцов) со значением величины  $\left(\Pi_3^-\right)_T^{CM}$ , включая две позиции.

*Первая* позиция заключается в *визуальном подтверждении* принадлежности экспериментально наблюдаемого разрушения к *разрушению при смятии торцов* (типа фотографии на Рис. 5.1).

*Вторая* позиция заключается в сравнении значения величины  $\left(\Pi_3^-\right)_{\text{экспер}}^{CM}$  со значением величины  $\left(\Pi_3^-\right)_T$  в соответствии с соотношением (5.11).

Рассмотрим предложенную процедуру сравнения, которая представлена в вышеизложенном **Выводе**, применительно к отоженному и неотоженному бороалюминиевому однонаправленному композиту ВКА-1, который обсуждался в **Примере** в п. 3.3.4.1. В этом случае *первая* позиция реализуется анализом фотографии на Рис. 5.1; *вторая* позиция определяется анализом результатов, представленных в Табл. 5.1. Необходимо отметить, что Табл. 5.1 соответствует монографии [57] (т. 2, с. 551, Табл. 11.8). Также следует отметить, что числовые значения для  $\left(\Pi_3^-\right)_{\text{экспер}}^{CM}$  в Табл. 5.1 соответствуют средним значениям для 32 образцов в случае отоженного и для 14 образцов в случае неотоженного материала; более подробные сведения о вышеизложенных результатах представлены в статье [95].

Таблица 5.1

Материал ВКА – 1	Предел прочности, МПа	
	$\left(\Pi_3^-\right)_{\text{экспер}}^{CM}$	$\left(\Pi_3^-\right)_T^{CM}$
Отоженный	665	736
Неотоженный	1282	1467

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком анализе результатов по **Проблеме 3** (*Разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов*), которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

**РЕЗЮМЕ.** Оглядова стаття присвячена короткому опису та відповідному аналізу основних результатів по неklasичним проблемам механіки руйнування, які одержані автором статті та його учнями за останні 50 років у відділі динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім.С.П.Тимошенка НАНУ. Оглядова стаття розділена на три частини. Перша частина має підзаголовок «Загальні питання» і опублікована в журналі «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в першу частину включені Вступ та §§1 і 2. Друга частина має підзаголовок «Руйнування композитних матеріалів при стиску» і публікується в журналі «Прикладная механика» (55, № 3, 2019); в другу частину включені §§3 – 5. Третя частина має підзаголовок «Інші неklasичні проблеми механіки руйнування»; в третю частину включені §§6 – 10 та список літератури, який є загальним для всіх трьох частин.

Поступила 26.03.2018

Утверждена в печать 05.03.2019