УДК 621.37:621.391

В. В. Палагин, канд. техн. наук
Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы

АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА ТИПА НЕЙМАНА-ПИРСОНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

В работе предложено построение нового моментного критерия качества проверки сложных статистических гипотез на основе использования стохастических полиномов в качестве решающих функций и моментно-кумулянтного описания случайных величин. Предложенный подход позволяет эффективно синтезировать нелинейные решающие правила с меньшими вероятностями ошибок при обработке негауссовских случайных величин по сравнению с известными результатами

Ключевые слова: *моментный критерий качества, стохастический полином, моментно-кумулянтное описание.*

Во многих технических системах, в том числе в телекоммуникационных, системах связи и радиомониторинга широкое применение находят статистические методы обработки сигналов, в том числе и для распознавания сигналов на фоне помех. Такие методы обработки сигналов широко используются для решения многих прикладных задач, где в основе их решения лежит решающая функция, представленная в виде сравнения отношения правдоподобия с тем или иным порогом, который выбирается по какому либо из классических критериев качества (критерий Байесса, критерий идеального наблюдателя, критерий Неймана-Пирсона и т.д.) [1]. Такие критерии назовем *вероятностными*, так как в их основе лежат вероятности ошибок первого и второго рода решающей функции.

При практическом использовании вероятностных критериев качества наиболее широкое практическое распространение получило построение алгоритмов обнаружения и распознавания сигналов на фоне гауссовских помех. Это объясняется тем, что, с одной стороны, такой вид распределения помех часто распространенный в каналах связи, а с другой стороны, является удобной математической идеализацией реальный природных процессов. На практике такая постановка задачи не всегда оправдана, и многие помехи могут иметь негауссовский характер [2]. В этом случае использование вероятностных критериев качества вызывает ряд трудностей, связанных как с необходимостью использования плотностей распределения таких помех, так и с реализацией полученных алгоритмов обработки сигналов.

В последнее время интерес к негауссовским сигналам и процессам, как более общих, значительно возрос, о чем свидетельствуют многочисленные научные публикации, как в ближнем, так и в дальнем зарубежье, поэтому возникает необходимость в поисках новых подходов к решению задачи распознавания сигналов на фоне негауссовских помех.

В теории вероятностей и математической статистике случайные величины количественно можно охарактеризовать не только с помощью установления вероятности осуществления того или иного события, но и с помощью более грубой количественной меры числовых характеристик случайных величин, таких как математическое ожидание, дисперсия и т.д. [3, 4]. Критерии, основанные на использовании моментов решающей функции, назовем *моментными критериями качества*.

Данный научный подход с применением моментных критериев качества принципиально отличается от существующих (вероятностных), так как в качестве априорного описания случайных величин используется не плотность распределения, а моментно-кумулянтное описание случайных величин, позволяющее получить более простые алгоритмы обработки сигналов и учесть тонкую структуру негауссовской помехи, что существенно улучшает качественные показатели алгоритмов обработки сигналов по сравнению с гауссовской помехой [5—7].

Целью работы является адаптация моментного критерия качества типа Неймана-Пирсона для проверки сложных статистических гипотез, основанного на использовании моментно-кумулянтного описания случайных величин и стохастических полиномов в качестве решающих функций для построения эффективных алгоритмов распознавания сигналов на фоне негауссовских помех.

Рассмотрим обобщение применения полученного асимптотически нормального критерия качества типа Неймана-Пирсона для проверки сложных статистических гипотез [8]. Для этого проведем его адаптацию на случай рассмотрения N гипотез.

Пусть на интервале времени $(0,T)$ наблюдается случайные сигналы $\xi_i(t)$, $i=1,N$, по которым будут приниматься решения о реализации соответствующей гипотезы H_i, т.е. решения о приеме соответствующего полезного сигнала $s_i(t)$, который подлежит распознаванию. Принимаемые сигналы $\xi_i(t)$ представляют собой аддитивную смесь $\xi_i(t)=s_i(t)+\eta_i$, где $\eta_i(t)$ — негауссовская случайная величина, описываемая последовательность моментов и кумулянтов.

Каждому сигналу $\xi_i(t)$ соответствует свое моментно-кумулянтное описание, представленное в виде конечной последовательности моментов $m_i\left(\{\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{il}\},\{0,\chi_{i2},\gamma_{i3},\gamma_{i4},...,\gamma_{il}\}\right)$, которое будет однозначно интерпретировать представление полезных сигналов и негауссовских помех. Необходимо построить такие решающие правила (РП) по заданному критерию качества, которые бы с заданной точностью различали гипотезы H_i, $i=\overline{0,N}$.

При классическом подходе к построению РП распознавания сигналов решают задачу нахождения максимума вероятности правильного распознавания заданных сигналов, которая в общем случае имеет вид

$$H_i:\ \max_{i=\overline{1,N}}\left\{P_i W\left(\vec{x}\big/H_i,\vec{\alpha}\right)\right\}\geq\lambda,$$

$$P_r W\left(\vec{x}\big/H_r,\vec{\alpha}_i\right)\geq P_m W\left(\vec{x}\big/H_m,\vec{\alpha}_l\right),\ r,m=\overline{1,N},\ r\neq m,$$

где λ — порог, выбираемый по определенному вероятностному критерию качества, r,m — проверяемые гипотезы.

Не смотря на общий подход к постановке данной задачи, широкое распространенное получило предположение о нормальном законе распределения случайных величин, что не всегда является адекватным в реальных условиях. Применение вероятностного подхода в виде использования плотностей распределения, отличных от гауссовских, наталкивается на ряд практических трудностей. Поэтому воспользуемся моментным описанием случайных величин и представления отношений правдоподобия в виде стохастического полинома общего вида

$$\Lambda_{mr}\left(\vec{x}\right)_{sn}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}^{(mr)}x_v^i+k_0^{(mr)}\underset{H_m}{\overset{H_r}{\gtrless}}0,\ r,m=\overline{1,N},\ r\neq m \qquad (1)$$

для различения гипотез H_m и H_r, $r,m=\overline{1,N}$, $r\neq m$, где неизвестные коэффициенты k_i^{mr} и $k_0^{(mr)}$ должны определяться согласно заданного критерия качества.

В предположении наблюдения выборочных значений $\vec{x}=\{x_1,...,x_n\}$ при $n\to\infty$, вероятности ошибок РП согласно центральной предельной теореме будут распределены по нормальному закону. Тогда для разработки и адаптации асимптотически нормального критерия качества проверки сложных статистических гипотез типа Неймана-Пирсона воспользуемся приведенными результатами в [8].

Показано, что оптимальные коэффициенты для РП общего вида (1) для проверки сложных гипотез находятся из условия минимума функционала

$$YuP(T,G)_{(mr)} = \frac{\dfrac{G_{mr}^{(r)}}{C_{mr}{}^{2}} + \dfrac{G_{mr}^{(m)}}{\left(1-C_{mr}\right)^{2}}}{\left[T_{mr}^{(m)} - T_{mr}^{(r)}\right]^{2}}, \; r,m = \overline{1,N}, \; r \neq m, \tag{2}$$

где $G_{mr}^{(r)}$, $G_{mr}^{(m)}$, $T_{mr}^{(r)}$, $T_{mr}^{(m)}$ — дисперсии и математические ожидания решающей функции при гипотезах H_{mr}, а неизвестный коэффициент C_{mr} будет определяться из заданного условия вероятности ошибки первого рода ρ_{mr} каждого mr -го РП и рассчитывается из условия

$$\alpha_{mr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\sqrt{n}C_{mr}\left(\sum\limits_{i=1}^{s} k_{iv}^{(mr)}\left(m_{iv}^{(m)} - m_{iv}^{(r)}\right)\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s} k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{i,j}^{(r)}\right)^{0.5}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right) dx \leq \rho_{mr} . \tag{3}$$

Выбор ρ_{mr} при равновероятном предположении вероятности ошибок первого рода каждого *mr*-го РП рассчитывается из условия, что сумма всех ρ_{mr} для *N* гипотез должна быть равна суммарной вероятности ошибок первого рода всех РП.

Минимизированная ошибка второго рода *mr*-го РП, согласно центральной предельной теореме, будет распределена по нормальному закону и определяется из выражения

$$\beta_{(mr)\min}^{YuP} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-V_{(mr)}^{YuP}} e^{-\frac{z^{2}}{2}} dz , \tag{4}$$

где $V_{(mr)}^{YuP} = \left(1-C_{mr}\right)\dfrac{T_{mr}^{(m)} - T_{mr}^{(r)}}{\sqrt{\mathrm{G}_{mr}^{(m)}}}$.

Показано, что оптимальные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ РП (1) должны быть такими, чтобы обеспечивался минимум функционала (2), т.е. обеспечивался минимум вероятности ошибки второго рода при фиксированном значении вероятности ошибки первого рода (3).

Тогда легко показать, что неизвестные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{s} k_{iv}^{(mr)} \left[\frac{F_{(i,j)v}^{(r)}}{C_{mr}{}^{2}} + \frac{F_{(i,j)v}^{(m)}}{\left(1-C_{mr}\right)^{2}}\right] = m_{iv}^{m} - m_{iv}^{r}, \; v = 1,n , \; j = 1,s . \tag{5}$$

Показано, что с учетом приведенных выражений порог РП (1) выражен через найденные оптимальные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ по асимптотически нормальному критерию в следующем виде

$$k_0^{(mr)} = -\left[C\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(m)} + (1-C)\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(r)} \right]. \qquad (6)$$

Определение 1. Примем функционал $YuP(T,G)_{(mr)}$ (2) за критерий качества выбора РП вида (1) и будем считать наилучшем то правило, которое при $k_0^{(mr)}$ вида (6) и k_i^{mr} найденных из (5) минимизирует правую часть (4) при заданном значении вероятности ошибок первого рода (3). Данный критерий будем называть адаптированным моментным асимптотически нормальным критерием типа Неймана-Пирсона для проверки сложных статистических гипотез.

Общая структура выбора РП распознавания сигналов на фоне помех при использовании стохастических полиномов с оптимальными коэффициентами по данному критерию будет иметь вид

$$H_m : \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} > 0; \quad H_0 : \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{m0} x_v^i + k_0^{m0} \right\} < 0;$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{m0} x_v^i + k_0^{m0} > \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{r0} x_v^i + k_0^{r0}, \ r = \overline{1,N}, \ r \neq m. \qquad (7)$$

Для качественной оценки полученных РП распознавания сигналов на фоне помех введена величина, которая характеризует общую минимизированную асимптотическую ошибку второго рода распознавания гипотезы H_m при заданной вероятности ошибки первого рода (3)

$$YuP(T,G)^{(m)} = \sum_{r=0}^{N} \frac{\dfrac{G_{mr}^{(r)}}{C_{mr}{}^2} + \dfrac{G_{mr}^{(m)}}{(1-C_{mr})^2}}{\left[T_{mr}^{(m)} - T_{mr}^{(r)}\right]^2}, \quad m = 1, N, m \neq r. \qquad (8)$$

Показано, что величина, обратная критерию качества выбора РП характеризует количество извлекаемой информации из выборочных значений о различении гипотез H_m и H_r и имеет вид

$$I_{\mathrm{YuP(mr)}} = \frac{1}{YuP(T,G)_{mr}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{rm} \left(m_{iv}^{m} - m_{iv}^{r}\right), \ r = \overline{1,N}, \quad m \neq r.$$

На основе приведенного математического аппарата и адаптированного критерия качества типа Неймана-Пирсона проверки сложных статистических гипотез можно синтезировать нелинейные РП распознавания сигналов на фоне негауссовских помех с меньшими вероятностями ошибок второго рода при фиксированных вероятностях ошибок первого рода по сравнению с линейными РП при степени полинома $s = 1$, которые являются оптимальными для гауссовских помех. Увеличение эффективности синтезированных РП при степени полинома $s \geq 2$ получается в результате учета тонкой структуры негауссовских помех в виде кумулянтов третьего и выше порядков, что позволяет учесть асимметрию, эксцесс помехи.

Список использованной литературы:

1. Ван Трис. Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 1. : Пер. с англ. / Под ред. В. И. Тихонова. — М. : Сов. радио, 1972. — 744 с.
2. Шелухин О.И. Негауссовские процессы / О.И. Шелухин, И.В. Беляков. — СПб. : Политехника, 1992. — 312 с.
3. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований / А.Н. Малахов. — М. : Сов. радио, 1979. — 376 с.
4. Кунченко Ю.П. Стохастические полиномы / Ю.П. Кунченко. — К. : Наук. Думка, 2006. — 275 с.
5. Кунченко Ю.П. Построение моментного критерия качества типа Неймана-Пирсона для проверки простых статистических гипотез / Ю.П. Кунченко, В.В. Палагин // Вісник Інженерної Академії України, — № 1, — 2005, — С. 26—30.
6. Палагин В.В. Построение полиномиальных решающих правил обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех по моментному критерию типа Неймана-Пирсона / В.В. Палагин // Вісник ЧДТУ — № 4. — 2006. — С. 94—99.
7. Лега Ю.Г. Построение полиномиальных решающих правил по моментному критерию типа Неймана-Пирсона для проверки статистических гипотез / Ю.Г. Лега, В.В. Палагин, С.А. Лелеко // Электроника и системы управления. — 2008. — №4 (18). — С. 71—78.
8. Палагин В.В. Построение моментного критерия проверки статистических гипотез при использовании полиномиальных решающих правил / В. В. Палагин // Электронное моделирование — 2008. — Т. 30. — С. 57—72.

The new moment criterion of quality for test of composite statistical hypotheses on the basis of the use of stochastic polynomials as decision functions and moment-cumulant description of casual sizes is developed. The offered approach allows effectively synthesising nonlinear decision rules with less probability of errors for Non-Gaussian random variable as compared to the known results.

Key words: *moment criterion of quality, stochastic polynomial, moment and cumulant description.*

Отримано: 07.10.2009