УДК 517.443

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук, професор
Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ R ≥ R$_0$ > 0

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь (Конторовича-Лєбєдєва), Ейлера та Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку, методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функція Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, умова однозначної розв'язності, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу знаходяться, як правило, в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростішому випадку величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються параметричним невласним інтегралом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана робота.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty);\ R_0 > 0\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку (Конторовича-Лєбєдєва), Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (R_0, R_1)\ ,$$

$$\left(B^*_{\alpha_2} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2)\ , \tag{1}$$

$$(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2)u_3(r) = -g_3(r),\ r \in (R_2, \infty)$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr} + \beta^0_{11}\right)u_1(r)\right|_{r=R_0} = g_0\ ,\ \lim_{r\to\infty}[r^\gamma u_3(r)] = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}\right)u_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{jk}\ ,\ j,k = 1,2\ . \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори:

$$B_{\alpha_1} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2,$$

$$B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2\ .$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0$, $\alpha^0_{11} \le 0$, $\beta^0_{11} \ge 0$, $|\alpha^0_{11}| + \beta^0_{11} \ne 0|$, $\alpha^k_{jm} \ge 0$, $\beta^k_{jm} \ge 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k} > 0$, $2\alpha + 1 > 0$, $c_{jk} = \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $\lambda \in (0, \infty)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B^*_{\alpha_2} - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2 - q_2}$ та $v_2 = r^{-\alpha_2 + q_2}$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \exp[-q_3(r - R_2)]$ та $v_2 = \exp\left[+q_3(r - R_2)\right]$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$u_1(r) = A_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + B_1 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho)g_1^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2^*(\rho) \rho^{2\alpha_2+1} d\rho, \qquad (4)$$

$$u_3(r) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) d\rho, \quad g_m^*(r) = r^{-2} g_m(r).$$

Тут $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [2, 3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \qquad (5)$$

$\varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_2(\rho) = \rho^{2\alpha_2+1}$, $\varphi_3(\rho) = 1$, $2\alpha_j + 1 > 0$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_1 \equiv C_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + D_1 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+}{E}_1 \equiv C_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + D_2 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r), & R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші для визначення величин C_j й D_j $(j = 1, 2)$ дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1) I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) = 0,$$

$$(C_2 - C_1) I'_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K'_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) = -\frac{1}{\lambda\rho^{2\alpha_1+1}}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\lambda^{2\alpha_1} K_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho), \; D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha_1} I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho). \qquad (6)$$

Доповнимо систему рівностей (6) алгебраїчними рівняннями

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) \overset{-}{E}_1 \Big|_{r=R_0} = 0 : U_{q_1,\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0) C_1 + U_{q_1,\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0) D_1 = 0,$$

$$\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{+}{E}_1 \Big|_{r=R_1} = 0 : U_{q_1,\alpha_1;11}^{11}(\lambda R_1) C_2 + U_{q_1,\alpha_1;11}^{12}(\lambda R_1) D_2 = 0. \qquad (7)$$

Внаслідок рівностей (6) система (7) набуває вигляду

$$U_{q_1,\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0) C_1 + U_{q_1,\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0) D_1 = 0,$$
$$U_{q_1,\alpha_1;11}^{11}(\lambda R_1) C_1 + U_{q_1,\alpha_1;11}^{12}(\lambda R_1) D_1 = \lambda^{2\alpha_1} \Psi_{q_1,\alpha_1;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda\rho). \qquad (8)$$

Систему (8) розв’язуємо за правилами Крамера [4]. Маємо:

$$C_1 = -\frac{\lambda^{2\alpha_1} U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} \Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho),$$

$$D_1 = \frac{\lambda^{2\alpha_1} U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} \Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho).$$

Цим функція Коші $E_1(r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho) = \\ = \frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} \begin{cases} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda r)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho), R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda\rho)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda r), R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{9}$$

У рівностях (7)—(9) беруть участь функції:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;j_1}(\lambda R_m) = \left(\alpha^m_{j_1}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{j_1}\right) I_{\nu,\alpha}(\lambda R_m) + \alpha^m_{j_1}\lambda^2 R_m I_{\nu+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;j_1}(\lambda R_m) = \left(\alpha^m_{j_1}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{j_1}\right) K_{\nu,\alpha}(\lambda R_m) - \alpha^m_{j_1}\lambda^2 R_m K_{\nu+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;j_1}(\lambda R_m, \lambda r) = U^{m1}_{\nu,\alpha;j_1}(\lambda R_m) K_{\nu,\alpha}(\lambda r) - U^{m2}_{\nu,\alpha;j_1}(\lambda R_m) I_{\nu,\alpha}(\lambda r),\ j = 1,2,$$

$$\Delta_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_0, \lambda R_1) = U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) U^{12}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1) - \\ - U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) U^{11}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1).$$

Нехай функція Коші

$$E_2(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_2 \equiv C_1 r^{-\alpha_2-q_2} + D_1 r^{-\alpha_2+q_2}, & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \overset{+}{E}_2 \equiv C_2 r^{-\alpha_2-q_2} + D_2 r^{-\alpha_2+q_2}, & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_2-q_2} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_2+q_2} = 0,$$

$$(\alpha_2 + q_2)\rho^{-\alpha_2-q_2}(C_2 - C_1) + (-\alpha_2 + q_2)(D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_2+q_2} = \rho^{-2\alpha_2}.$$

Звідси маємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = (2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2+q_2},\ D_2 - D_1 = -(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2-q_2}. \tag{10}$$

Доповнимо систему (10) алгебраїчними рівняннями

$$\begin{aligned} \left(\alpha^1_{12}\frac{d}{dr} + \beta^1_{12}\right)\overset{-}{E}_2(r,\rho)\Big|_{r=R_1} &= 0: \\ \left(\alpha^2_{11}\frac{d}{dr} + \beta^2_{11}\right)\overset{+}{E}_2(r,\rho)\Big|_{r=R_2} &= 0: \end{aligned} \begin{cases} Z^{11}_{\alpha_2;12}(q_2, R_1)C_1 + Z^{12}_{\alpha_2;12}(q_2, R_1)D_1 = 0, \\ Z^{21}_{\alpha_2;11}(q_2, R_2)C_2 + Z^{22}_{\alpha_2;11}(q_2, R_2)D_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Алгебраїчна система (11) внаслідок рівностей (10) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)C_1+Z^{12}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)D_1=0,\\ &Z^{21}_{\alpha_2,11}(q_2,R_2)C_1+Z^{22}_{\alpha_2,11}(q_2,R_2)D_1=\frac{1}{2q_2}\psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho). \end{aligned} \qquad (12)$$

Систему (12) розв'язуємо за правилами Крамера [4]. Маємо:

$$C_1=-\frac{Z^{12}_{\alpha_2;12}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho),$$

$$D_1=\frac{Z^{11}_{\alpha_2;12}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2,11}}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \qquad (13)$$

У рівностях (11), (13) беруть участь функції:

$$Z^{m1}_{\alpha_2,jk}(q_2,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk})-\alpha_2R_m^{-1}q_2]R_m^{-\alpha_2-q_2},$$

$$Z^{m2}_{\alpha_2,jk}(q_2,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk})+\alpha_2R_m^{-1}q_2]R_m^{-\alpha_2+q_2},$$

$$\Delta_{\alpha_2,jk}(q_2,R_1,R_2)=Z^{11}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{22}_{\alpha_2,k1}(q_2,R_2)-$$

$$-Z^{12}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{21}_{\alpha_2,k1}(q_2,R_2);\quad j,k=1,2,$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_2;jk}(q_2,r)=Z^{m2}_{\alpha_2;jk}(q_2,R_m)r^{-\alpha_2-q_2}-Z^{m1}_{\alpha_2;jk}(q_2,R_m)r^{-\alpha_2+q_2}.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_3\equiv C_1e^{q_3(r-R_2)}+D_1e^{-q_3(r-R_2)}, & R_2<r<\rho<\infty,\\ \overset{+}{E}_3\equiv C_2e^{q_3(r-R_2)}+D_2e^{-q_3(r-R_2)}, & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$-C_1e^{q_3(\rho-R_2)}+(D_2-D_1)e^{-q_3(\rho-R_2)}=0,$$

$$+C_1e^{q_3(\rho-R_2)}+(D_2-D_1)e^{-q_3(\rho-R_2)}=q_3^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_1=(2q_3)^{-1}e^{-q_3(\rho-R_2)},(D_2-D_1)=(2q_3)^{-1}e^{q_3(\rho-R_2)}. \qquad (14)$$

Додамо алгебраїчне рівняння

$$\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)\overset{-}{E}_2\Bigg|_{r=R_2}=0:(\alpha_{12}^2q_3+\beta_{12}^2)C_1-(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)D_1=0. \qquad (15)$$

Із алгебраїчної системи (14), (15) знаходимо, що

$$D_2 = \frac{\Phi_{12}^2(q_3R_2q_3\rho)}{q_3(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)}, \Phi_{j2}^2(q_3R_2q_3\rho) =$$
$$= \alpha_{j2}^2 q_3\, ch\, q_3(\rho - R_2) - \beta_{j2}^2\, sh\, q_3(\rho - R_2). \tag{16}$$

Цим функція Коші $E_3(r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho) = \frac{1}{q_3(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)}\begin{cases} e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3r), & R_2 < r < \rho < \infty, \\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3\rho), & R_2 < \rho < r < \infty, \end{cases}$$

Повернемося до формули (4). Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення п’яти величин A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему з п’яти рівнянь:

$$U_{q_1,\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0)A_1 + U_{q_1,\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0)B_1 = g_0,$$
$$\begin{aligned} U_{q_1,\alpha_1;j1}^{11}(\lambda R_1)A_1 + U_{q_1,\alpha_1;j1}^{12}(\lambda R_1)B_1 - Z_{\alpha_2,j2}^{11}(q_2,R_1)A_2 - \\ -Z_{\alpha_2,j2}^{12}(q_2,R_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12}, j=1,2, \end{aligned} \tag{17}$$
$$Z_{\alpha_2,j1}^{21}(q_2,R_2)A_2 + Z_{\alpha_2;j1}^{22}(q_2,R_2)B_2 + (\alpha_{j2}^2q_2 - \beta_{j2}^2)B_3 = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23}.$$

У системі (17) беруть участь функції

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi_{q_1,\alpha_1;11}^{0*}(\lambda R_0,\lambda\rho)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$
$$+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G_{23} = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho -$$
$$-c_{22}\int_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2}g_3(\rho)d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\ \delta_{22}=1)$ [4].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\alpha);j}(q) = \Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Delta_{\alpha_2;2j}(q_2,R_1,R_2) -$$
$$-\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Delta_{\alpha_2;1j}(q_2,R_1,R_2),$$
$$B_{\alpha_2;j}(q) = (\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)\Delta_{\alpha_2;2j}(q_2,R_1,R_2) - (\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2)\Delta_{\alpha_2;1j}(q_2,R_1,R_2),$$
$$j=1,2,$$

$$\theta_{(\alpha);1}(r,q)=\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}(q_2,r)-$$
$$-\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r),$$
$$\theta_{(\alpha);2}(r,q)=(\alpha_{22}^2 q_3-\beta_{22}^2)\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,r)-(\alpha_{12}^2 q_3-\beta_{12}^2)\Psi^{2*}_{\alpha_2;21}(q_2,r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3): визначник алгебраїчної системи (17) для будь-якого вектора $\vec{q}=\{q_1;\, q_2;\, q_3\}\neq\vec{0}$ відмінний від нуля, тобто

$$\Delta_{(\alpha)}(q)\equiv(\alpha_{12}^2 q_3-\beta_{12}^2)A_{(\alpha);2}(q)-(\alpha_{22}^2 q_3-\beta_{22}^2)A_{(\alpha);1}(q)=$$
$$=\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)B_{\alpha_2;2}(q)-\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)B_{\alpha_2;1}(q)\neq 0. \quad (18)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$\mathrm{W}_{(\alpha);11}(r,q)=$$
$$=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[B_{\alpha_2;1}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda r)-B_{\alpha_2;2}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r)\right],$$

$$\mathrm{W}_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q), \quad (19)$$

$$\mathrm{W}_{(\alpha);13}(r,q)=-\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{B_{\alpha_2;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);21}(r,q)=-\frac{B_{\alpha_2;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{2c_{21}q_2}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{\alpha_{22}^2 q_3-\beta_{22}^2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{2c_{21}q_2}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{\alpha_{12}^2 q_3-\beta_{12}^2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q);$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{\alpha_{22}^2 q_3-\beta_{22}^2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{(\alpha);1}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{\alpha_{12}^2 q_3-\beta_{12}^2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{(\alpha);1}(r,q)$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{2c_{12}q_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)};$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{A_{(\alpha);2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\alpha);22}(r,q)=-\frac{A_{(\alpha);1}(q)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)}; \tag{20}$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\alpha);11}(r,\rho,q)=-\lambda^{2\alpha_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)W_{(\alpha);11}(\rho,q), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)W_{(\alpha);11}(r,q), & R_1<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\Theta_{\alpha_2;2}(\rho,q),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);13}(r,\rho,q)=\frac{2q_2c_{21}c_{22}}{R_1^{2\alpha_2+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1;\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r)\exp[-q_3(\rho-R_2)],$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\theta_{\alpha_2,2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{(\alpha);1}(r,q)\theta_{\alpha_2,2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{(\alpha);1}(\rho,q)\theta_{\alpha_2,2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{(\alpha),1}(r,q)\exp[-q_3(\rho-R_2)],$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}2q_2c_{12}}{R_1^{2\alpha_1+1}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\exp[-q_3(r-R_2)],$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);32}(r,\beta,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{(\alpha);1}(\rho,q)\exp[-q_3(r-R_2)],$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_3\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\exp[-q_3(\rho-R_2)][A_{(\alpha);2}(q)\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r)-\\ -A_{(\alpha);1}(q)\Phi_{22}^2(q_3R_2,q_3r)], \quad R_2<r<\rho<\infty,\\ \exp[-q_3(r-R_2)][A_{(\alpha);2}(q)\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho)-\\ -A_{(\alpha);1}(q)\Phi_{22}^2(q_3R_2,q_3\rho)], \quad R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{21}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (17) й підстановки одержаних значень A_1, A_3, B_1, B_2, B_3 у формули (4), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$u_j(r)=W_{(\alpha),1j}(r,q)g_0+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}_{(\alpha);km}^{j}(r,q)\omega_{km}+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}. \tag{22}$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathrm{M}_{(\alpha)}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_2}^*+\theta(r-R_2)\frac{d^2}{dr^2}, \tag{23}$$

де $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ самоспряжений і має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр дійсний й неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)+$$
$$+\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)+\Theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta).$$

Функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ знайдемо як розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha_1}+b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(R_0,R_1),\\ \left(B_{\alpha_2}^*+b_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty),\ b_j^2=\beta^2+k_j^2, k_j^2\ge 0\end{gathered} \tag{24}$$

з однорідними крайовими умовами (2) та однорідними умовами спряження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ та $v_2 = D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [2].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta_n) = A_1 C_{\alpha_1}(\lambda r, \beta_1) + B_1 D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) + B_2 r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r), \qquad (25)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r,$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ й умови спряження в точках $r = R_1$ та $r = R_2$ для визначення величин A_i, B_j дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)A_1 + X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0, b_1)B_1 = 0,$$
$$X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1)A_1 + X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1, b_1)B_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)A_2 -$$
$$-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)B_2 = 0, \qquad (26)$$
$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2, R_2)A_2 + Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2, R_2)B_2 - v^{21}_{j2}(b_3 R_1)A_3 - v^{22}_{j2}(b_3 R_2)B_3 = 0,$$
$$j = 1, 2.$$

У системі (26) беруть участь функції:

$$X^{m1}_{\alpha_1;jk} = \left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk}\right)C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\,|_{r=R_m},\, X^{m2}_{\alpha_1;jk} =$$
$$= \left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk}\right)D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\,|_{r=R_m},$$
$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_2, R_m) = [(\beta^m_{jk} - \alpha^m_{jk}\alpha_2 R_m^{-1})\cos(b_2 \ln R_m) -$$
$$-b_2 R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin(b_2 \ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$
$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_2, R_m) = [(\beta^m_{jk} - \alpha^m_{jk}\alpha_2 R_m^{-1})\sin(b_2 \ln R_m) +$$
$$+b_2 R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos(b_2 \ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$

$v_{j2}^{21}(b_3R_2) = -\alpha_{j2}^2 b_3 \sin b_3R_2 + \beta_{j2}^2 \cos b_3R_2; v_{j2}^{22}(b_3R_2) = \alpha_{j2}^2 b_3 \cos b_3R_2 +$
$+\beta_{j2}^2 \sin b_3R_2.$

Припустимо, що $A_1 = -A_0 X_{\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0, b_1),\ B_1 = A_0 X_{\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0, b_1)$, де A_0 підлягає визначенню. Перше рівняння системи (26) стає тотожністю. Решта рівнянь утворюють дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній.

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\alpha_1;j1}(\beta) = X_{\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0, b_1) X_{\alpha_1;j1}^{12}(\lambda R_1, b_1) - X_{\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0, b_1) X_{\alpha_1;j1}^{11}(\lambda R_1, b_1),$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\beta) = Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2;k1}^{22}(b_2, R_2) - Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2;k1}^{21}(b_2, R_2),$$

$$a_{(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;21}(\beta)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta) - \delta_{\alpha_1;11}(\beta)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta);\ j,k = 1,2$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = a_{(\alpha);1}(\beta) v_{22}^{2j}(b_3, R_2) - a_{(\alpha);2}(\beta) v_{12}^{2j}(b_3, R_2),\ j = 1,2$$

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (26) й підстановки одержаних значень A_j, $B_j\,(j = \overline{1,3})$ у формули (25) одержуємо функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \frac{c_{21}b_2c_{22}b_3}{R_1^{2\alpha_2+1}}\Big[X_{\alpha_1;11}^{01}(\lambda R_0, b_1) D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) -$$
$$-X_{\alpha_1;11}^{02}(\lambda R_0, b_1) C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)\Big]$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{22}b_3\left[\delta_{\alpha_1;11}(\beta)\Psi_{\alpha_2;22}^1(b_2, r) - \delta_{\alpha_1;21}(\beta)\Psi_{\alpha_2;22}^1(b_2, r)\right],$$

$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos b_3 r - \omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin b_3 r,$$

$$\Psi_{\alpha_2;j2}^1\left(b_2, r\right) = Y_{\alpha_2;j2}^{12}\left(b_2, R_2\right) r^{-\alpha_2}\cos\left(b_2 \ln r\right) - Y_{\alpha_2;j2}^{11}\left(b_2, R_1\right) r^{-\alpha_2} \times$$
$$\times \sin\left(b_2 \ln r\right),\ j = 1,2.$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$, спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$ та вагової функції $\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} + \theta(r - R_2)\sigma_3$, де $\sigma_1 = c_{11}c_{12}R_1^{2\alpha_2+1}(c_{21}c_{22}R_1^{2\alpha_1+1}R_2^{2\alpha_2+1})^{-1}$, $\sigma_2 = \ = c_{12}(c_{22}R_2^{2\alpha_2+1})^{-1}$, $\sigma_3 = 1$, дає можливість визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ ГІП, породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ [5]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{28}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta) V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \qquad (29)$$

Тут функція $g(r)$ — будь-яка функція з області G визначення ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$.

При цьому має місце основна тотожність ГІП ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[q]] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2 \tilde{g}_j + \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\alpha);1}(R_0,\beta) g_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k [Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (30)$$

У рівності (30) прийняті позначення :

$$\tilde{g}_1 = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr;$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr;$$

$$\tilde{g}_3 = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{(\alpha);3}(r,\beta) dr;$$

$$h_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1}, \; h_2 = \sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} c_{12}^{-1};$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta) = (\alpha_{i2}^k d/dr + \beta_{i2}^k) V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)|_{r=R_k}.$$

Побудований за відомою логічною схемою [6] методом запровадженого формулами (28), (29) ГІП, єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3) має структуру:

$$u_j(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\alpha);1}(R_0,\beta) S_{(\alpha);j}(\beta) d\beta\, \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k [\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_{(\alpha);12}^k(\beta) S_{(\alpha);j}(\beta) d\beta\, \omega_{2k} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_{(\alpha);22}^k(\beta) S_{(\alpha);j}(\beta) d\beta\, \omega_{1k}] +$$

$$+\int_{R_0}^{R_1} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty S_{(\alpha);j}(r,\beta) V_{(\alpha);1}(\rho,\beta) d\beta \right) g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}\sigma_1 d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty S_{(\alpha);j}(r,\beta) V_{(\alpha);2}(\rho,\beta) d\beta \right) g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}\sigma_2 d\rho +$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}S_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)d\beta\right)g_3(\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}, \tag{31}$$

де

$$S_{(\alpha);j}(r,\beta)=\left(\beta^2+q^2\right)^{-1}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta),\quad q^2=\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}.$$

Порівнюючи розв'язки (22) та (31) в силу теореми єдиності, маємо формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}S_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)d\beta=\sigma_k^{-1}H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3}, \tag{32}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta^2+q^2\right)}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta=\frac{1}{\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}}W_{(\alpha);1j}(r,q),\ j=\overline{1,3}, \tag{33}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Z_{(\alpha);12}^k(\beta)S_{(\alpha);j}(\beta)d\beta=h_k^{-1}R_{(\alpha);2k}^j(r,q);\ k=1,2;\ j=\overline{1,3}, \tag{34}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Z_{(\alpha);22}^k(\beta)S_{(\alpha);j}(\beta)d\beta=-h_k^{-1}R_{(\alpha);1k}^j(r,q);\ k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \tag{35}$$

Функції впливу $H_{(\alpha);jk}(r,\rho,\beta)$ визначені формулами (21), функції Гріна $W_{(\alpha);1j}(r,q)$ визначені формулами (19), а функції Гріна $R_{(\alpha);ik}^j(r,q)$ — формулами (20).

Зауваження 1. Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\ge 0$. У цьому випадку $b_1=\beta, b_2=(\beta^2+q_1^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_3=(\beta^2+q_1^2-q_3^2)^{1/2}$, $\beta^2+q^2=\beta^2+q_1^2$.

Зауваження 2. Якщо $q^2=q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0, k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\ge 0$. У цьому випадку $b_1=(\beta^2+q_2^2-q_1^2)^{1/2}, b_2=\beta$, $b_3=(\beta^2+q_2^2-q_3^2)^{1/2}, \beta^2+q^2=\beta^2+q_2^2$.

Зауваження 3. Якщо $q^2=q_3^2$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\ge 0, k_2^2=q_3^2-q_2^2$, $k_3^2=0$. У цьому випадку $b_1=(\beta^2+q_3^2-q_1^2)^{1/2}, b_2=(\beta^2+q_3^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_3=\beta,\ \beta^2+q^2=\beta^2+q_3^2$.

Зауваження 4. Оскільки праві частини у формулах (32)—(35) не залежать від нерівностей $q_j^2 - q_m^2 \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 \equiv q_2^2 \equiv$ $\equiv q_3^2 \equiv q^2 > 0$, звужуючи при цьому клас невласних інтегралів.

Підсумком наведених в роботі досліджень є твердження.

Теорема. Якщо функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)], g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайову умову в точці R_0, умову обмеження

$$\lim_{r\to\infty}\left(V_{(\alpha);3}(r,\beta)\frac{dg_3}{dr} - g_3(r)\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}(r,\beta) \right) = 0,$$

та умови спряження (3) і виконується умова (18) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то справджуються формули (32)—(35) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{(\alpha)}$ визначеного рівністю (23).

Висновок. Одержані формули (32)—(35) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики різного характеру.

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва)-Лежандра / М. П. Ленюк, М. Л. Янчишин. — Чернівці : Прут, 2002. — 76 с.
6. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том V / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2005. — 368 с.

By the method of comparison of solution of boundary-value problem for the system of differential (Kontorovich-Lebedev), Eiler and Fourier equations on the polar axis with two contact points, built, from one side, by the method of Cauchy functions, and from other side, by the method of the corresponding hybrid integral transform, polyparametric family of infinite integrals is calculated by the own elements of the corresponding hybrid differential operator.

Key words: *infinite integrals, Cauchy function, main solutions, hybrid integral transform, condition of simple solvability, basic identity, logical chart.*

Отримано 16.06.2009