

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.044>

УДК 539.3

**О. Ю. Чирков**, <https://orcid.org/0000-0003-1916-0277>

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, Київ

E-mail: [chirkale82@gmail.com](mailto:chirkale82@gmail.com)

## Аналіз коректності рівнянь радіаційної повзучості, в яких враховується зростання пор у матеріалі за модифікованим рівнянням Хуанга

*Представлено академіком НАН України В.В. Харченком*

*Досліджено умови коректності визначальних рівнянь радіаційної повзучості, в яких враховується зростання об'єму зароджених пор у матеріалі за модифікованим рівнянням Хуанга. Це рівняння, в якому вводиться додаткова безперервна функція більша за нуль, що залежить від жорсткості напруженого стану і має невід'ємну похідну, об'єднує класичні моделі Райса—Трейсі—Хуанга. За такої модифікації класичного рівняння Хуанга покращуються властивості визначальних рівнянь для аналізу пористості опроміненого матеріалу, що сприяє ослабленню обмежень на вихідні дані, пов'язані з жорсткістю напруженого стану. Розглядаються сучасні моделі радіаційного розпухання і радіаційної повзучості, в яких враховується пошкоджуюча доза, температура опромінення і вплив напруженого стану на процеси розпухання і повзучості опроміненого матеріалу. Для аналізу поведінки пористого матеріалу, що знаходиться під впливом нейтронного опромінення, застосовуються рівняння радіаційної повзучості, в яких незворотні деформації включають миттєві пластичні деформації, деформації радіаційного розпухання, радіаційної повзучості та структурні об'ємні деформації, що враховують концентрацію пор у матеріалі за модифікованим рівнянням Хуанга. За результатами аналізу властивостей визначальних рівнянь сформульовано умови, за яких потужність дисипації та потужність, що розвивається додатковими напруженнями на спричинених ними додаткових деформаціях, не зменшуються в процесі навантаження пористого матеріалу, що перебуває під впливом нейтронного опромінення. На основі одержаних енергетичних нерівностей, що узагальнюють постулат зміцнення Друкера стосовно опроміненого пористого матеріалу, встановлено умови, що забезпечують коректність визначальних рівнянь радіаційної повзучості, в яких враховується зростання концентрації пор в'язкого руйнування за модифікованим рівнянням Хуанга.*

**Ключові слова:** *напружений стан, непружне деформування, радіаційне розпухання, радіаційна повзучість, зростання пор, рівняння Хуанга.*

Важливим етапом діагностики стану елементів конструкцій, що піддаються в процесі експлуатації інтенсивному нейтронному опроміненню, є прогнозування їх залишкового ресурсу на основі розрахунків на міцність з урахуванням докритичного пошкодження опроміненого матеріалу. Достовірність розрахункового обґрунтування міцності та роботоздатності

Ц и т у в а н н я: Чирков О.Ю. Аналіз коректності рівнянь радіаційної повзучості, в яких враховується зростання пор у матеріалі за модифікованим рівнянням Хуанга. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 4. С. 44–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.044>

конструкцій зумовлено застосуванням у розрахунках напружено-деформованого стану математичних моделей, які дають змогу описувати неізотермічні процеси непружного деформування з урахуванням радіаційних ефектів розпухання і повзучості, а також зародження та зростання пор в'язкого руйнування в матеріалі за умов тривалого опромінення та інтенсивного термосилового навантаження.

Зазначимо, що умови, які забезпечують коректність рівнянь непружного деформування опроміненого матеріалу з урахуванням зростання пор в'язкого руйнування, недостатньо досліджені. Водночас питання, пов'язані з формулюванням необхідних і достатніх умов коректності визначальних рівнянь, в яких враховується пористість опроміненого матеріалу, досить актуальні, тому що їх вирішення дає змогу довести однозначний розв'язок нелінійної крайової задачі, яка відповідає прийнятій моделі непружного деформування, а також обґрунтувати збіжність і точність наближених методів її розв'язання.

Нижче розглядаються сучасні моделі радіаційного розпухання і радіаційної повзучості, в яких враховується пошкоджуюча доза, температура опромінення і вплив напруженого стану на процеси розпухання і повзучості опроміненого матеріалу. Для аналізу поведінки пористого матеріалу, що піддається впливу нейтронного опромінення, застосовуються рівняння радіаційної повзучості, в яких незворотні деформації включають миттєві пластичні деформації, деформації радіаційного розпухання, радіаційної повзучості та структурні об'ємні деформації, що враховують концентрацію пор у матеріалі. На основі одержаних енергетичних нерівностей, що узагальнюють постулат Друкера стосовно опроміненого пористого матеріалу, встановлено умови, що забезпечують коректність визначальних рівнянь радіаційної повзучості, в яких враховується зростання концентрації пор за модифікованим рівнянням Хуанга.

**Математична модель радіаційного розпухання.** Залежність величини вільного розпухання  $R_0$  від пошкоджуючої дози  $Z$  і температури опромінення  $T$  приймається на основі експериментальних досліджень радіаційної пористості опромінених аустенітних сталей [1]:

$$R_0 = c_0 Z^\beta \exp(-r(T - T_{\max})^2), \quad (1)$$

де  $T_{\max}$  — температура максимального розпухання;  $c_0, \beta, r$  — константи матеріалу.

Рівняння, що описує вплив напружень на розпухання  $R$ , запропоновано в [2] на основі аналізу експериментальних даних із визначення радіаційного розпухання аустенітних сталей для різних видів напруженого стану. Залежність величини розпухання  $R$  за умов, що спричиняють напруження в тілі, приймається у вигляді

$$R = R_0 (1 + C_R (\omega \sigma_m + (1 - \omega) \bar{\sigma})), \quad (2)$$

$\sigma_m$  — середнє нормальне напруження;  $\bar{\sigma}$  — інтенсивність напружень;  $C_R$  — константа матеріалу, в загальному випадку вона залежить від пошкоджуючої дози та температури опромінення;  $\omega$  — ваговий множник, за яким визначається ступінь впливу напружень  $\sigma_m$  та  $\bar{\sigma}$  на розпухання  $R$ .

З аналізу відомих експериментальних даних та їх фізичної інтерпретації випливає, що коефіцієнт  $\omega$  залежить від рівня пошкоджуючої дози та температури опромінення, тобто в загальному випадку від величини розпухання [2]. Якщо  $R < 1\%$ , основний вплив на розпухання виявляє інтенсивність напружень  $\bar{\sigma}$ , тоді як за умов опромінення  $R > 1\%$  домінує

середнє нормальне напруження  $\sigma_m$ . Отже, у разі  $R < 1\%$  коефіцієнт  $\omega$  близький до нуля, а для  $R > 1\%$  він значно збільшується і наближається до величини  $\omega_0 = 0,85$ . Використовуючи коефіцієнт  $0 < \omega \leq \omega_0$ , який залежить від розпухання, можна більш детально описувати поведінку матеріалу порівняно з вибором  $\omega = \omega_0$ , особливо на початку опромінення. Проте необхідно стежити за тим, щоб не порушувалися умови коректності визначальних рівнянь внаслідок малих значень коефіцієнта  $\omega$ .

**Математична модель радіаційної повзучості.** У загальному випадку для опису сталої швидкості радіаційної повзучості використовується рівняння [2]

$$\frac{d\bar{\epsilon}^c}{dt} = \left( B_0 \frac{dZ}{dt} + C_0 \frac{dR}{dt} \right) \bar{\sigma}, \quad (3)$$

де  $d\bar{\epsilon}^c$  – інтенсивність приросту деформації повзучості;  $B_0, C_0$  – константи матеріалу, які слабо залежать від температури;  $dZ/dt$  – швидкість набору пошкоджуючої дози;  $dR/dt$  – швидкість розпухання;  $t$  – час або будь-який інший параметр, що характеризує зміну навантаження.

**Модифіковане рівняння Хуанга.** Вважаємо, що зростання концентрації пор  $K$  у матеріалі зумовлене непружною деформацією, яка включає миттєву пластичну деформацію і деформацію радіаційної повзучості. Тоді приріст концентрації пор  $dK$  можна описати рівнянням, що об'єднує моделі Райса–Трейсі–Хуанга [3, 4]:

$$dK = 3h_1 \Phi(g) \exp(h_2 g) d\bar{\epsilon}^n, \quad (4)$$

де  $h_1, h_2$  – коефіцієнти, що дорівнюють 0,427 і 1,5 відповідно;  $g = \sigma_m / \bar{\sigma}$  – жорсткість напруженого стану;  $d\bar{\epsilon}^n$  – інтенсивність приростів накопичених непружних деформацій;  $\Phi(g)$  – безперервна функція, для якої виконується умова  $\Phi'(g) > 0$ .

Відзначимо, що в рівнянні Райса–Трейсі  $h_1 = 0,283$ , а функція  $\Phi(g)$  дорівнює одиниці [3], проте у класичному рівнянні Хуанга вона визначається так:  $\Phi(g) = g^\alpha$ , де  $\alpha = 0,25$  у разі  $g \leq 1$  і  $\alpha = 0$  для  $g > 1$  [4].

У модифікованому рівнянні Хуанга функція  $\Phi(g)$  задається відповідно до формули, запропонованої в [5]:  $\Phi(g) = \text{th}^\alpha(g)$ , де  $\alpha = 0,25$ .

**Формулювання визначальних рівнянь.** Вважаємо, що напружено-деформований стан у точці тіла у будь-який момент часу визначається симетричними тензорами напружень  $\sigma = (\sigma_{ij})$  і малих деформацій  $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , які можна записати у вигляді двох складових:  $\sigma = \sigma_S + \sigma_D$ ;  $\epsilon = \epsilon_S + \epsilon_D$ , де  $\sigma_S, \epsilon_S$  – кульові тензори;  $\sigma_D, \epsilon_D$  – девіатори тензорів напружень і деформацій.

Завдяки інтегруванню рівнянь пластичної течії, радіаційної повзучості та рівняння зростання концентрації пор за етап навантаження визначальні рівняння мають такий вигляд [6]:

$$\sigma = k_0^R (\epsilon_S - \xi_S) + 2G_S^R (\epsilon_D - \xi_D), \quad (5)$$

де  $\xi$  – тензор початкових деформацій,

$$\xi(t) = \epsilon_S^T(t) + \epsilon_S^R(t) + \epsilon_D^p(t') + \epsilon_D^c(t') + \frac{1}{3}K(t)\mathbf{s}_1; \quad (6)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_S^T(t)$  – термічна деформація;  $\boldsymbol{\varepsilon}_S^R(t)$  – структурна деформація, яка враховує вплив інтенсивності напружень  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  на розпухання  $R(t)$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_D^n(t')$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_D^c(t')$  – пластична деформація і деформація радіаційної повзучості наприкінці попереднього етапу навантаження;  $K(t) = K(t') + \Delta K$  – концентрація пор для поточного етапу навантаження;  $\mathbf{s}_1$  – одиничний кульбовий тензор, його модуль дорівнює  $\sqrt{3}$ .

Рівняння (5) включає механічні характеристики опроміненого пористого матеріалу:  $k_0^R$  – модуль всебічного об'ємного розширення з урахуванням поправки на розпухання;  $G_s^R$  – січний модуль зсуву, що враховує вплив радіаційної повзучості за етап навантаження. Для опроміненого матеріалу модулі  $k_0^R$  і  $G_s^R$  визначаються за співвідношеннями [6]

$$k_0^R = \frac{k_0}{1 + \frac{1}{3}k_0 R_0 C_R \omega}; \quad G_s^R = \frac{G_s}{1 + 3G_s(B_0 \Delta Z + C_0 \Delta R)}, \quad (7)$$

де  $k_0$  – початковий модуль всебічного об'ємного розширення;  $G_s$  – січний модуль зсуву без урахування радіаційної повзучості;  $\Delta Z > 0$ ,  $\Delta R > 0$  – приріст пошкоджуючої дози і розпухання за етап навантаження відповідно; модулі  $k_0$ ,  $G_s$  залежать від дози і температури опромінення.

Беручи до уваги припущення про сталу жорсткість напруженого стану  $g$  в межах етапу навантаження, приріст концентрації пор  $\Delta K$  за етап навантаження визначається так [5, 6]:

$$\Delta K = h_1 \Phi(g) \exp(h_2 g) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (8)$$

де  $G_0$  – початковий модуль зсуву на пружній ділянці діаграми деформування опроміненого матеріалу без урахування радіаційної повзучості.

Рівняння (5) доповнюються функціональною залежністю деформування опроміненого пористого матеріалу з урахуванням накопиченої незворотної деформації до початку етапу навантаження  $Q(t')$  і приросту деформації радіаційної повзучості  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c$  за етап навантаження [6]:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \Psi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a(t), Q(t'), \bar{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}^c, K(t), Z(t), T(t)), \quad (9)$$

де  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a$  – інтенсивність девіатора активних деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}_D^a$ , що виникають у точці тіла додатково до початкових незворотних деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}_D^n(t')$  наприкінці попереднього етапу навантаження,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D^a(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_D(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_D^n(t'), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D^n(t') = \boldsymbol{\varepsilon}_D^n(t') + \boldsymbol{\varepsilon}_D^c(t'). \quad (10)$$

Зазначимо, що визначальні рівняння (5), які враховують радіаційне розпухання і радіаційну повзучість опроміненого пористого матеріалу в умовах, що спричиняють напруження в тілі, а також конкретизацію функціональної залежності (9) більш детально викладено в [5, 6]. Одним з підходів для опису функціональної залежності (9) є застосування моделі Гурсона–Твергаарда–Ніделмана [7, 8], що враховує наявність пор у матеріалі. В рамках цієї моделі модифікується поверхня текучості залежно від об'ємної рівномірно розподіленої несутцільності у матеріалі.

**Аналіз визначальних рівнянь.** В основу теоретичного дослідження властивостей визначальних рівнянь (5) покладено таку концепцію. Визначальні рівняння (5) будуть коректними тільки в тому разі, якщо не порушуються деякі загальні принципи механіки непружного деформування, на яких базуються феноменологічні моделі пластичності та повзучості будь-якого виду. Отже, якщо в процесі довантаження елементи середовища зазнають радіаційного розпухання, радіаційної повзучості та зростання концентрації пор, вимагатимемо, щоб потужність дисипації додаткових впливів була невід'ємною:

$$L = (d\boldsymbol{\sigma}, d\boldsymbol{\varepsilon}^n) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n \geq 0. \quad (11)$$

По суті, умова (11) є перефразуванням постулату Друкера [9] стосовно пористого матеріалу, що знаходиться під впливом нейтронного опромінення. Відзначимо, що обмеження у вигляді (11) сформульовано в приростах для повних компонентів напружень і деформацій, на відміну від класичних теорій пластичності та повзучості, в яких це обмеження визначено лише для девіаторних компонент. Ця особливість зумовлена урахуванням у формулі (11) не тільки незворотних деформацій радіаційної повзучості, а й об'ємних структурних деформацій, що враховують радіаційне розпухання і зростання концентрації пор у матеріалі.

Отже, вважаємо, що елемент середовища перебуває в деякому початковому напруженому стані, який визначається напруженнями  $\boldsymbol{\sigma}$ . Додамо останнім нескінченно малі прирости  $d\boldsymbol{\sigma}$ , які призводять до додаткових деформацій  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Припускаємо, що зміна напружень відбувається досить повільно, що дає змогу розглядати процес довантаження елемента для заданої дози і температури опромінення. Крім того, криві деформування спрямовані опуклістю вгору і не мають точок перегину, і тому виконуються умови

$$0 < G_{\tau}^R \leq G_s^R \leq G_0, \quad (12)$$

де  $G_{\tau}^R$  — дотичний модуль зсуву, що характеризує деформаційне зміцнення опроміненого пористого матеріалу.

З'ясуємо умови, за яких потужність дисипації  $L$  в процесі навантаження не спадає. Для цього використовуємо розкладання

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^n = d\boldsymbol{\varepsilon}_S^n + d\boldsymbol{\varepsilon}_D^n, \quad (13)$$

де кульова складова незворотних деформацій  $d\boldsymbol{\varepsilon}_S^n$  обчислюється за допомогою співвідношення

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_S^n = \frac{1}{3}(dR + dK)\mathbf{s}_1. \quad (14)$$

На підставі формул (1), (2) одержимо

$$dR = R_0 C_R (\omega d\sigma_m + (1 - \omega)d\bar{\sigma}). \quad (15)$$

Крім того, з урахуванням співвідношення (8) та правил диференціювання складних функцій, знаходимо

$$dK = h_1 \exp(h_2 g) ((\Phi'(g) + h_2 \Phi(g)) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right)) \times \\ \times (d\sigma_m - g d\bar{\sigma}) + \Phi(g) \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_0} \right) d\bar{\sigma}. \quad (16)$$

За аналогією з перетвореннями, наведеними в [10], приходимо до виразу приростів дев'яторних компонент незворотних деформацій:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_D^n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_s^R} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_D + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) d\boldsymbol{\sigma}_D. \quad (17)$$

На підставі (13)–(17) знаходимо

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^n = \frac{1}{3} R_0 C_R (\omega d\sigma_m + (1-\omega) d\bar{\sigma}) \mathbf{s}_1 + \\ + \frac{1}{3} h_1 \exp(h_2 g) ((\Phi'(g) + h_2 \Phi(g)) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right)) \times \\ \times (d\sigma_m - g d\bar{\sigma}) + \Phi(g) \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_0} \right) d\bar{\sigma} \mathbf{s}_1 + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_s^R} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_D + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) d\boldsymbol{\sigma}_D. \quad (18)$$

Якщо підставити у формулу (11) вираз для приросту незворотних деформацій (18), то одержимо

$$L = L_{11} (d\sigma_m)^2 + 2L_{12} d\sigma_m d\bar{\sigma} + L_{22} (d\bar{\sigma})^2, \quad (19)$$

де коефіцієнти квадратичної форми (19) визначаються таким чином:

$$L_{11} = R_0 C_R \omega + h_1 \exp(h_2 g) (\Phi'(g) + h_2 \Phi(g)) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) \geq 0; \\ L_{12} = \frac{1}{2} (R_0 C_R (1-\omega) + h_1 \exp(h_2 g) (\Phi(g) \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_0} \right) - (\Phi'(g) + h_2 \Phi(g)) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) g)) \cos \psi; \quad (20) \\ L_{22} = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_0} \right) \cos^2 \psi + \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) \sin^2 \psi \right) \geq 0.$$

У формулах (19), (20) враховано, що

$$(d\boldsymbol{\sigma}_S, \mathbf{s}_1) = 3d\sigma_m; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}_D, \boldsymbol{\sigma}_D)}; \quad d\bar{\sigma} = \frac{2}{3\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}_D, d\boldsymbol{\sigma}_D); \quad (21)$$

$\psi$  — кут довантаження, який визначається співвідношенням

$$d\bar{\sigma} = \overline{d\sigma} \cos \psi; \quad \overline{d\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(d\sigma_D, d\sigma_D)}. \quad (22)$$

Якщо квадратична форма (19) матиме властивість додатної напіввизначеності, одержимо необхідну і достатню умову для виконання нерівності  $L \geq 0$ :

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \geq 0. \quad (23)$$

На підставі (20), (23) знаходимо

$$2p(\lambda \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) \geq (\lambda - q)^2 \cos^2 \psi, \quad (24)$$

де  $\lambda$  — додатний числовий параметр, який визначається виразом

$$\lambda = \left( \frac{1}{G_\tau^R} - \frac{1}{G_0} \right) / \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right) \geq 1; \quad (25)$$

$p, q$  — додатні коефіцієнти:

$$p = \frac{2}{3h_1\Phi^2(g)} (\Phi'(g) + h_2\Phi(g) + \omega H) \exp(-h_2g) > 0, \quad (26)$$

$$q = \frac{(\Phi'(g) + h_2\Phi(g))g - (1 - \omega)H}{\Phi(g)};$$

$H$  — параметр, що враховує розпухання,

$$H = \frac{1}{h_1} R_0 C_R \exp(-h_2g) \left( \frac{1}{G_s^R} - \frac{1}{G_0} \right)^{-1} > 0. \quad (27)$$

Отже, для заданого  $g$  маємо квадратну нерівність стосовно параметра  $\lambda$ :

$$2p\lambda \geq (\lambda - q)^2. \quad (28)$$

Квадратне рівняння, що відповідає нерівності (28), має вигляд

$$\lambda^2 - 2\lambda(p + q) + q^2 = 0. \quad (29)$$

Корені квадратного рівняння (29) визначаються таким чином:

$$\lambda_{\min, \max} = p(1 + \theta \mp \sqrt{1 + 2\theta}), \quad \theta = \frac{q}{p} > 0. \quad (30)$$

З нерівності (28) випливає умова, яка обмежує зверху і знизу можливі значення параметра  $\lambda$  залежно від жорсткості напруженого стану  $g$ :

$$\max(1, \lambda_{\min}(g)) \leq \lambda(g) \leq \lambda_{\max}(g). \quad (31)$$

З'ясуємо умову виконання нерівності, що узагальнює постулат Друкера для опроміненого пористого матеріалу і полягає в тому, що потужність, яка розвивається додатковими напруженнями на викликаних ними додаткових деформаціях, повинна бути додатна:

$$A = (d\sigma, d\varepsilon) > 0. \quad (32)$$

Для цього використаємо розкладання приросту повних деформацій  $d\varepsilon$  у вигляді

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^n, \quad (33)$$

де деформації  $d\varepsilon^n$  визначаються формулою (18), а пружна складова  $d\varepsilon^e$  обчислюється за допомогою узагальненого закону Гука:

$$d\varepsilon = \frac{1}{0} \sigma_S + \frac{1}{0} d\sigma_D \quad (34)$$

На підставі (18), (32)–(34) маємо

$$A = A_{11}(d\sigma_m)^2 + 2A_{12}d\sigma_m \overline{d\sigma} + A_{22}(\overline{d\sigma})^2, \quad (35)$$

де коефіцієнти квадратичної форми (35) визначаються так:

$$A_{11} = \frac{3}{k_0} + L_{11} > 0; \quad A_{12} = L_{12}; \quad A_{22} = \frac{1}{2G_0} + L_{22} > 0. \quad (36)$$

У формулах (35), (36) використані співвідношення (23), (24) і враховано, що

$$(d\sigma_S, d\sigma_S) = 3(d\sigma_m)^2. \quad (37)$$

Квадратична форма (35) подана стосовно змінних  $d\sigma_m$ ,  $\overline{d\sigma}$ , і тому умова її додатної визначеності полягає у виконанні нерівності

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0. \quad (38)$$

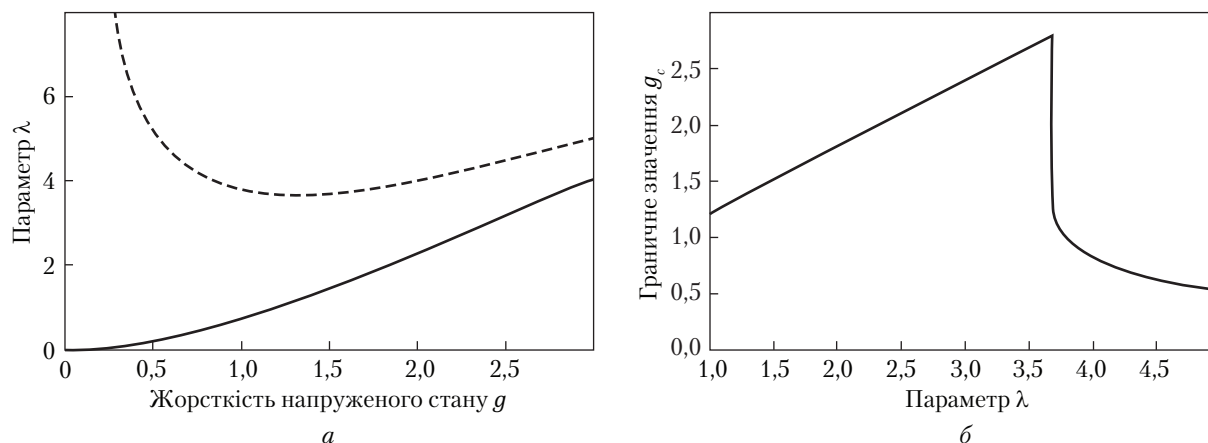
Зазначимо, що виконання нерівності (38) вимагає менш жорстких обмежень на вихідні дані та пористість матеріалу порівняно з умовою (23), тому що згідно з формулами (36) маємо

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 > -\left(\frac{3}{2k_0G_0} + \frac{1}{2G_0}L_{11} + \frac{3}{k_0}L_{22}\right). \quad (39)$$

Права частина цієї нерівності не може бути додатною через властивості матеріалу, а ліва частина невід'ємна внаслідок виконання умови (23). Отже, з умови (23) випливає нерівність (38), тобто якщо справедлива умова (23), то нерівність (38) тим більше справедлива.

Відзначимо, що нерівність (38) забезпечує однозначний розв'язок визначальних рівнянь (5) з урахуванням обмеження (28), згідно з яким потужність дисипації додаткових впливів внаслідок зростання концентрації пор і непружного деформування опроміненого





Визначення граничних значень жорсткості напруженого стану  $g_c(\lambda)$ :  $a$  – залежність коренів квадратного рівняння (29) від параметра  $g$  (суцільна лінія – дані  $\lambda_{\min}$ , штрихова –  $\lambda_{\max}$ );  $b$  – залежність граничних значень  $g_c$  від параметра  $\lambda$

матеріалу повинна бути невід’ємною. Інакше розв’язок цих рівнянь не буде повною мірою коректним, що може призвести до порушення стійкості результатів розрахунків, які можуть виявитися суперечливими або фізично неприйнятними.

Зазначимо, що неврахування пористості матеріалу, що перебуває під впливом нейтронного опромінення, спрощує аналіз коректності визначальних рівнянь, тому що нерівність (28) перетворюється до такого вигляду

$$4\omega\left(\frac{1}{G^R_\tau} - \frac{1}{G_0}\right) \geq 3R_0 C_R (1 - \omega)^2. \tag{40}$$

Проте урахування пористості навіть для неопроміненого матеріалу пов’язано із виконанням нерівності (28). Як приклад на рисунку,  $a$  наведено криві залежностей коренів квадратного рівняння (29) від жорсткості напруженого стану  $g$ , що обчислені за формулами (30) для неопроміненого пористого матеріалу з використанням модифікованого рівняння Хуанга. Згідно з умовою (31), можливі значення параметра  $\lambda$  розташовано між двома цими кривими. Отже, якщо зафіксувати  $\lambda$ , то отримаємо граничне значення  $g_c(\lambda)$  внаслідок перетину горизонтальної прямої, що відповідає величині  $\lambda$  на осі ординат, з кривою, що описує залежність одного з коренів квадратного рівняння (29). Звідси випливає, що для кожного  $\lambda$  існує граничне значення  $g_c(\lambda)$ , що обмежує зверху параметр жорсткості напруженого стану  $g(\lambda)$ .

На рисунку,  $b$  наведено результати визначення граничних значень  $g_c$  залежно від параметра  $\lambda$ . Величині  $\lambda = 1$  відповідає найменше значення  $g_c \approx 1,208$ , яке збільшується до максимального  $g_c \approx 2,79$  у разі вибору  $\lambda = 3,682$ . Ці дані отримано з використанням нижньої кривої, наведеної на рисунку,  $a$  для опису залежності кореня  $\lambda_{\min}(g)$ . Якщо  $\lambda = 3,683$ , граничні значення  $g_c(\lambda)$  стрімко зменшуються, тому що для їх визначення використовується верхня крива  $\lambda_{\max}(g)$ . У разі вибору  $\lambda = 3,683$  знаходимо  $g_c \approx 1,263$ , для  $\lambda = 4$  маємо  $g_c \approx 0,831$ .

У практичних розрахунках з використанням методу скінченних елементів максимальний рівень параметра  $g$  може сягати досить високих значень. Зокрема, це стосується окре-

мих кутових та особливих точок на поверхні тіла, в яких числовий розв'язок втрачає фізичний сенс, а також точок всередині тіла, в околі яких сітка скінченних елементів не має достатньої регулярності внаслідок нерівномірного розбиття та наявності гострих кутів у елементах. Це може призвести до порушення стійкості та збіжності обчислювальних процесів у разі моделювання умов з високим рівнем навантаження конструкції та використання дрібного розбиття. Проте урахування в цих точках умови  $g \leq g_c$  дає змогу обмежити рівень розрахункових значень параметра  $g$  або вилучити окремі кутові точки з аналізу пористості матеріалу. Отже, завдяки обмеженню  $g \leq g_c$  забезпечується не лише виконання нерівності (23), а й стійкість та збіжність обчислювальних процесів розв'язку дискретної задачі.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васина Н.К., Марголин Б.З., Гуленко А.Г., Курсевич И.П. Радиационное распухание аустенитных сталей. Влияние различных факторов, обработка экспериментальных данных и формулировка определяющих уравнений. *Вопр. материаловедения*. 2006. № 4. С. 69–88.
2. Марголин Б.З., Мурашова А.И., Неустроев В.С. Анализ влияния вида напряженного состояния на радиационное распухание и радиационную ползучесть аустенитных сталей. *Пробл. прочности*. 2012. № 3. С. 5–24.
3. Rice J.R., Tracey D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*. 1969. **17**. P. 201–217. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90033-7)
4. Huang Y. Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *J. Appl. Mech.* 1991. **58**. P. 1084–1086. <https://doi.org/10.1115/1.2897686>
5. Чирков О.Ю. Аналіз коректності задач механіки пружно-пластичного деформування, в яких враховується зростання пор у матеріалі за моделями Райса-Трейсі-Хуанга. Повідомлення 3. Узагальнене рівняння Райса-Трейсі-Хуанга. *Пробл. міцності* (у друці).
6. Чирков О.Ю. Аналіз моделей радіаційного розпухання і радіаційної повзучості, в яких враховується вплив напружень, у задачах механіки непружного деформування. Повідомлення 1. Формулювання визначальних рівнянь. *Пробл. міцності*. 2021. № 2. С. 5–17.
7. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.* 1977. **99**. P. 2–15. <https://doi.org/10.1115/1.3443401>
8. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.* 1984. **32**. P. 157–169. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X)
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
10. Чирков О.Ю. Аналіз моделей радіаційного розпухання і радіаційної повзучості, в яких враховується вплив напружень, у задачах механіки непружного деформування. Повідомлення 2. Дослідження умов коректності визначальних рівнянь. *Пробл. міцності*. 2021. № 3. С. 5–14.

Надійшло до редакції 10.11.2021

#### REFERENCES

1. Vasina, N. K., Margolin, B. Z., Gulenko, A. G. & Kursevich, I. P. (2006). Radiation swelling of austenitic steels. Influence of various factors, processing of experimental data and formulation of constitutive equations. *Mater. Sci.*, No. 4, pp. 69-88 (in Russian).
2. Margolin, B., Murashova, A. & Neustroiev, V. (2012). Analysis of the influence of type stress state on radiation swelling and radiation creep of austenitic steels. *Strength Mater.*, 44, pp. 227-240. <https://doi.org/10.1007/s11223-012-9376-3>
3. Rice, J. R. & Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17, pp. 201-217. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90033-7)
4. Huang, Y. (1991). Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *J. Appl. Mech.*, 58, pp. 1084-1086. <https://doi.org/10.1115/1.2897686>

5. Chirkov, O. Yu. (2022). Analysis of the correctness of problems in the mechanics of elastic-plastic deformation, which take into account the voids growth in the material according to the Rice-Tracy-Huang models. Part 3. Rice-Tracey-Huang generalized equation. *Strength Mater.* (in press).
6. Chirkov, O.Yu. (2021). Analysis of irradiation swelling and irradiation creep models with the stress effect account in the problems of inelastic strain mechanics. Part 1. Formulation of constitutive equations. *Strength of Mater.*, 53, pp. 199-212. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00276-0>
7. Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.*, 99, pp. 2-15. <https://doi.org/10.1115/1.3443401>
8. Tvergaard, V. & Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32, pp. 157-169. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X)
9. Kachanov, L. M. (1969). *Fundamentals of the theory of plasticity*. Moscow: Nauka (in Russian).
10. Chirkov, O. Yu. (2021). Analysis of irradiation swelling and irradiation creep models with the stress effect account in the problems of inelastic strain mechanics. Part 2. Correctness check of conditions of the constitutive equations. *Strength Mater.*, 53, pp. 377-387. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00297-9>

Received 10.11.2021

O. Yu. Chirkov, <https://orcid.org/0000-0003-1916-0277>

Pisarenko Institute of Problems of Strength of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: [chirkale82@gmail.com](mailto:chirkale82@gmail.com)

#### CORRECTNESS ANALYSIS OF THE IRRADIATION CREEP EQUATIONS CONSIDERING THE VOIDS GROWTH IN THE MATERIAL USING THE MODIFIED HUANG EQUATION

The authors have investigated the correctness conditions of the defining equations of irradiation creep that consider the voids volume increase in the material by the modified Huang equation. The equation involves the Rice-Tracey-Huang models, where the additional continuous function is introduced depending on the stress state stiffness, and it has a continuous derivative greater than zero. Using the modified Huang equation allows one to enhance the properties of the defining equations to analyze the porosity of irradiated material facilitating the relaxation of constraints on the initial data related to the stress state stiffness. The modern models of irradiation swelling and creep are considered. They account for the damaging dose, irradiation temperature, and stress state effect on the processes of swelling and creep of the irradiated material. To analyze the behavior of the porous material under neutron irradiation, the equations of irradiation creep are used. In the equations, irreversible deformations include instantaneous plastic deformations, radiation swelling deformations, radiation creep deformations, and structural volume deformations considering the voids concentration in the material according to the modified Huang equation. The analysis of the properties of the defining equations allows one to formulate the conditions under which the dissipation intensity and the power which is developed by the additional stresses on the additional deformations do not decrease during the loading of the porous material exposed to the neutron irradiation. Based on the obtained energy inequalities generalizing the Drucker strengthening postulate for the irradiated porous material, the conditions are established that ensure the correctness of the defining equations of irradiation creep, which consider the growth of porous fracture concentration according to the modified Huang equation.

**Keywords:** *stress state, inelastic deformation, irradiation swelling, irradiation creep, voids growth, Huang equation.*