УДК 517.984.5

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец

О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

Розглянуто квазідиференціальні оператори непарного порядку, задані на скінченному інтервалі. За допомогою канонічних однорідних крайових умов описано всі самоспряжені і максимальні дисипативні розширення мінімального квазідиференціального оператора в гільбертовому просторі $L_2([a,b],\mathbb{C})$, а також його узагальнені резольвенти.

В последнее время существенно усилился интерес к дифференциальным операторам с сингулярными коэффициентами (см., напр., [1, 2] и приведенную там библиогр.). Как выяснилось, некоторые из таких операторов можно интерпретировать как *квази*дифференциальные. Они естественным образом содержат в себе дифференциальные операторы (см. [3]). В связи с этим в данном сообщении исследуются симметрические в гильбертовом пространстве $L_2([a,b],\mathbb{C}) =: L_2$ квазидифференциальные операторы. Они не охватываются рассмотренными ранее в [4–6].

В работе авторов [7] были изучены операторы четного порядка. Основной результат этой работы состоял в *биективном* описании посредством краевых условий канонического вида всех самосопряженных, максимальных диссипативных расширений минимального оператора и его обобщенных резольвент. При этом существенно использовались результаты из [8, 10, 11]. В этом сообщении рассмотрен случай операторов произвольного нечетного порядка, который имеет некоторые особенности (см. теорему 5).

1. Квазидифференциальные уравнения. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и на замкнутом интервале $[a,b]$ задана двойная последовательность функций

$$p_{k,s}(x) \in L_1([a,b],\mathbb{C}), \qquad k = 1,2,\ldots,m, \qquad s = 0,1,\ldots,k-1.$$

Определим квазипроизводные функции $y(x)$ порядка $k \leqslant m$ следующим образом:

$$D_0 y := y, \qquad D := -i\frac{d}{dx},$$

$$D_k y := D(D_{k-1}y) + \sum_{s=0}^{k-1} p_{k,s}(x) D_s y, \qquad k = 1,2,\ldots,m.$$

Если квазипроизводные $D_k y \in W_1^1([a,b],\mathbb{C})$, $k \leqslant m-1$, то квазипроизводная $D_m y$ существует и является суммируемой функцией.

Обозначим через $W_2^{[m]}([a,b],\mathbb{C}) =: W_2^{[m]}$ комплексное линейное пространство тех функций $y(x) \in L_2$, для которых

$$D_k y(x) \in W_1^1([a,b],\mathbb{C}), \qquad k = 1,\ldots,m-1, \qquad D_m y(x) \in L_2.$$

В гильбертовом пространстве L_2 квазидифференциальное выражение $l(y) := D_m y$ порождает *максимальный* квазидифференциальный оператор:

$$L_{\max}\colon y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \to L_{\max} y = l(y), \qquad \mathrm{Dom}(L_{\max}) := W_2^{[m]}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение $L_{\max}$ на линейное многообразие

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \{y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})\colon D_k y(a) = D_k y(b) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Будем предполагать далее, что почти всюду на $[a, b]$

$$\overline{p_{k,s}(x)} = p_{m-s,m-k}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad s = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Это условие обеспечивает симметричность минимального оператора. Тогда (см. [7]) оператор $L_{\min}$ является плотно заданным замкнутым симметрическим оператором в пространстве L_2 с индексом дефекта (m, m),

$$L_{\min}^* = L_{\max}, \qquad L_{\max}^* = L_{\min}.$$

2. Самосопряженные расширения. Из сказанного выше следует, что содержателен вопрос об описании (в терминах однородных краевых условий) самосопряженных расширений в пространстве L_2 симметрического оператора $L_{\min}$. Для ответа на него удобно использовать аппарат пространств граничных значений (ПГЗ).

Пусть L — замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами.

Определение (см. [8]). Тройка (H, Γ_1, Γ_2), где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 — линейные отображения $\mathrm{Dom}(L^*)$ в H, называется ПГЗ симметрического оператора L, если:

1) для любых $f, g \in \mathrm{Dom}(L^*)$

$$(L^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H;$$

2) для любых векторов f_1, $f_2 \in H$ существует вектор $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$ такой, что $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f = f_2$.

Из определения ПГЗ следует, что $f \in \mathrm{Dom}(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. ПГЗ существует для любого симметрического оператора с равными дефектными числами. Оно не единственно. Для случая $m = 2n$ явный вид ПГЗ был найден авторами в работе [7]. Рассмотрим теперь случай нечетного порядка $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Удобный для приложений явный вид ПГЗ симметрического в гильбертовом пространстве L_2 оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 1. *Тройка* $(\mathbb{C}^{2n+1}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* Γ_1, Γ_2 — *линейные отображения из* $W_2^{[2n+1]}$ *в* $\mathbb{C}^{2n+1}$ *такие, что*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 y &= (-iD_{2n}y(b), iD_{2n}y(a), \ldots, iD_{n+1}y(a), \alpha D_n y(b) + \beta D_n y(a)), \\ \Gamma_2 y &= (D_0 y(b), D_0 y(a), \ldots, D_{n-1}y(b), D_{n-1}y(a), \gamma D_n y(b) + \delta D_n y(a)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha = i$, $\beta = 1$, $\gamma = -1/2 + i$, $\delta = 1 - 1/2i$, *является пространством граничных значений оператора* $L_{\min}$.

Замечание. Приведенные значения коэффициентов можно заменить произвольными числами, которые удовлетворяют системе: $\alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma = -i$, $\beta\overline{\delta} - \overline{\beta}\delta = i$, $\alpha\overline{\delta} - \overline{\beta}\gamma = 0$, $\beta\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\delta = 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Из теоремы 3 и результатов работы [8] следует, что справедлива

Теорема 2. *Сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(x) \in W_2^{[2n+1]}$, удовлетворяющих однородному краевому условию*

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0, \tag{2}$$

где K — унитарный оператор в пространстве $\mathbb{C}^{2n+1}$, является самосопряженным расширением L_K оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого самосопряженного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется унитарный оператор K такой, что $\widetilde{L} = L_K$. Соответствие между унитарными операторами $\{K\}$ и расширениями $\{\widetilde{L}\}$ биективно.

Как известно (см., напр., [9]), краевые условия, выделяющие сужение $\widetilde{L}$ оператора $L_{\max}$, называются *разделенными*, если из принадлежности к $\mathrm{Dom}(\widetilde{L})$ функции f следует принадлежность к $\mathrm{Dom}(\widetilde{L})$ всякой функции $g \in \mathrm{Dom}(L_{\max})$, которая совпадает с f вблизи a и равна нулю вблизи b (или наоборот, совпадающей с f вблизи b и равной нулю вблизи a).

Теорема 3. *Для квазидифференциальных операторов нечетного порядка не существует самосопряженных расширений, заданных разделенными краевыми условиями.*

Для операторов четного порядка такие расширения существуют и описаны в [7] (см. также [13]).

3. Диссипативные расширения и обобщенные резольвенты. Напомним, что плотно заданный линейный оператор L в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называют *диссипативным*, если

$$\Im(Lf, f)_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \qquad f \in \mathrm{Dom}(L),$$

и *максимальным диссипативным*, если, кроме того, у L нет нетривиальных диссипативных расширений в пространстве $\mathcal{H}$. В частности, каждый симметрический оператор — диссипативный, а самосопряженный — максимальный диссипативный.

Описание всех максимальных диссипативных расширений симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 4. *Сужение оператора $L_{\max}$ на множество функций $y(x) \in W_2^{[2n+1]}$, удовлетворяющих однородному краевому условию* (2), *где K — сжатие в пространстве $\mathbb{C}^{2n+1}$, является максимально диссипативным расширением L_K оператора $L_{\min}$. Обратно, для каждого максимального диссипативного расширения $\widetilde{L}$ оператора $L_{\min}$ найдется сжатие K такое, что $\widetilde{L} = L_K$. Соответствие между сжатиями $\{K\}$ и расширениями $\{\widetilde{L}\}$ биективно.*

Обобщенной резольвентой (см., напр., [12]) замкнутого симметрического оператора L называют операторную функцию R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, допускающую представление вида

$$R_\lambda f = P^+(L^+ - \lambda I^+)^{-1} f, \qquad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ — какое-либо самосопряженное расширение оператора L с выходом, вообще говоря, в более широкое, чем $\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{H}^+$, I^+ — единичный оператор в $\mathcal{H}^+$, P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$. Операторная функция R_λ ($\Im\lambda \neq 0$) является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \qquad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ — обобщенная спектральная функция оператора L. Это означает, что операторная функция F_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами [12]:

1^0. При $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором.

2^0. $F_{\mu+0} = F_\mu$ при всех вещественных μ.

3^0. При любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu \to -\infty} \|F_\mu x\||_{\mathcal{H}} = 0, \qquad \lim_{\mu \to +\infty} \|F_\mu x - x\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Конструктивное описание всех обобщенных резольвент симметрического в пространстве L_2 квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами оператора $L_{\min}$ и краевыми задачами*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\Gamma_1 f + i(K(\lambda) + I)\Gamma_2 f = 0,$$

где λ — комплексное число, $\Im\lambda < 0$, $h(x) \in L_2$, $K(\lambda)$ — регулярная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве $\mathbb{C}^{2n+1}$ такая, что $\|K(\lambda)\| \leqslant 1$. Оно задается формулой $R_\lambda h = y$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Исследование поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 28.1/017.

1. *Михайлец В. А., Молибога В. Н.* Возмущение периодических и полупериодических операторов распределениями Шварца // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 26–31.
2. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Singular perturbed periodic and semiperiodic differential operators // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, No 6. – С. 785–797.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
4. *Шин Д.* Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 8. – С. 515–518.
5. *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Мат. сб. – 1940. – **7(49)**, № 3. – С. 479–532.
6. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Там же. – 1943. – **13(55)**, № 1. – С. 39–70.
7. *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доп. НАН України. – 2009. – № 4. – С. 19–24.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
9. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – Москва: Физматгиз, 1963. – 340 с.
10. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100 (142)**, № 2(6). – С. 210–216.

11. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1954. – **18**, № 1. – С. 51–86.
12. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.
13. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1969. – № 8. – С. 3–24.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 25.12.2008

A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets

On extensions of symmetric quasidifferential operators of odd order

The quasidifferential operators of an odd order on a compact interval are studied. The classes of all self-adjoint and maximal dissipative extensions of the minimal quasidifferential operator in the Hilbert space $L_2([a,b],\mathbb{C})$ and its generalized resolvents are described by means of the canonical boundary conditions.