УДК 517.9

С. С. Борисенко

Інтегро-функціональні нерівності типу Беллмана–Біхарі для розривних функцій та їх застосування

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Наведено нові нелінійні інтегральні нерівності типу Беллмана–Біхарі для розривних функцій (інтегро-сумарні нерівності; імпульсні інтегральні нерівності). Розглянуто застосування отриманих результатів: умови обмеженості (рівномірної), стійкості за Ляпуновим (рівномірної), практичної стійкості за Четаєвим (рівномірної) для розв'язків імпульсних диференціальних та інтегро-диференціальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Дана робота присвячена подальшому розвитку методу інтегральних нерівностей для розривних функцій як ефективному методу дослідження якісних характеристик розв'язків різноманітних типів рівнянь: функціонально-диференціальних, різницевих, з частинними похідними, імпульсних диференціальних [1–15].

Використовуючи відомі результати для неперервних та дискретних узагальнень нерівностей типу Гронуолла–Беллмана–Біхарі та результатів Н. В. Азбелєва, З. Б. Цалюка, Л. Ф. Рахматулліної для дослідження умов розв'язуваності задачі Чаплигіна для інтегральних рівнянь (нерівностей) типу Вольтерра (одновимірний, неперервний випадок), ми розглянемо нові інтегро-функціональні нерівності для розривних функцій типу Біхарі (див. [15]).

З отриманих результатів будуть знайдені як наслідки попередні відомі результати А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [1–3], М. О. Перестюка, О. С. Чернікової [5], А. М. Самойленка, С. Д. Борисенка, К. Каттані та ін. [6], А. М. Самойленка, С. Д. Борисенка, Дж. Матараццо та ін. [4], Дж. Іоване [8], С. Д. Борисенка, Дж. Іоване, П. Гіордано [9], С. Д. Борисенка, Дж. Матараццо, М. Пекораро [10], Д. С. Борисенка, А. Галло, Р. Тоскано [7], Ю. О. Митропольського, Дж. Іоване, С. Д. Борисенка [14] для інтегро-сумарних нерівностей.

Відзначимо, що в роботах [1–6] були досліджені інтегро-сумарні нерівності для кусково-неперервних функцій вигляду

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s,\phi(s))ds + \sum_{t_0<t_i<t} \mu(t,t_i)\sigma_i(\phi(t_i-0)), \tag{1}$$

де $\psi(t)$, $\mu(t,t_i)$, $\sigma_i(t)$ — неперервні невід'ємні функції $(i=1,2,\ldots)$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\phi(t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant t_0$ та має розриви 1-го роду в точках $\{t_k\}$, $k=\overline{1,\infty}$: $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$.

Припускалось, що ядро $K(t,s,u)$ невід'ємне при $t \geqslant s \geqslant t_0$, визначене в області $t \geqslant s \geqslant t_0$, $|u| \leqslant k = \mathrm{const} > 0$ і при фіксованих t і s неспадне за u; $\sigma_k(u)$ — неперервні, невід'ємні і неспадні за u.

В роботі [6] була отримана оцінка

$$\phi(t) \leqslant \xi_\psi(t), \qquad \forall\, t \in [t_0,+\infty], \tag{2}$$

де $\xi_\psi(t)$ — деякий розв'язок інтегро-сумарного рівняння

$$\xi(t) = \psi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s, \xi(s))ds + \sum_{t_0 < t < t_i} \mu(t, t_i)\sigma_i(\xi(t_i - 0)) \tag{3}$$

неперервний на кожному з інтервалів $[t_i, t_{i+1}[$, $i = 1, 2, \ldots$, та має розриви першого роду в точках $\{t_k\}$.

У вищевказаних роботах залишився недослідженим випадок, коли ядро K та σ_i одночасно були неліпшіцевими. Саме цій проблемі і присвячена дана робота.

Нерівності з гельдеровим характером імпульсного впливу. Розглянемо клас $\wp$ неперервних функцій (що визначають запізнення) $p\colon R \to R$, $p(t) \leqslant t$, $\lim\limits_{|t|\to\infty} p(t) = \infty$. Має місце такий результат.

Теорема 1. *A. Припустимо, що для $x \geqslant x_0$ виконується інтегро-функціональна нерівність:*

$$u(x) \leqslant \varphi(x) + q(x) \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau) W(u(p(\tau)))\, d\tau + \sum_{x_0 < x_i < x} \beta_i u^m(x_i - 0), \tag{4}$$

де $q(x) \geqslant 1$, $\varphi(x)$ — додатна неспадна функція, $\beta_i = \mathrm{const} \geqslant 0$, $f\colon R_+ \to R_+$, $m = \mathrm{const} > 0$; функція $u(x)$ кусково-неперервна, з розривами першого роду в точках x_i: $x_0 < x_1 < \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $p(t)$ належить класу $\wp$.

B. Функція $W(x)$ задовольняє такі умови:

i) $W(\gamma\beta) \leqslant W(\gamma)W(\beta)$;

ii) $W\colon R_+ \to R_+$, $W(0) = 0$;

iii) W неспадна.

Тоді для довільного $x \in [x_0, \infty[$ має місце оцінка

$$u(x) \leqslant \varphi(x) q(x) G_i^{-1}\left[\int\limits_{x_i}^{x} \frac{f(\tau)}{\varphi(\tau)} W(\varphi(p(\tau))) q(p(\tau))\, d\tau\right], \qquad x \in]x_i, x_{i+1}[, \tag{5}$$

де

$$\int\limits_{x_i}^{x} \frac{f(\tau)}{\varphi(\tau)} W(\varphi(p(\tau))) q(p(\tau))\, d\tau \in \mathrm{Dom}(G_i^{-1}),$$

$$G_0(u) = \int\limits_{1}^{u} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad G_i(u) = \int\limits_{c_i}^{u} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$$c_i = (1 + \beta_i \varphi^{m-1}(x_i) g^m(x_i - 0)) G_{i-1}^{-1}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(\tau)}{\varphi(\tau)} W(\varphi(p(\tau))) q(p(\tau))\, d\tau\right), \tag{7}$$

$i = 1, 2, \ldots$, якщо $m \in]0, 1[$, $\forall\, x \geqslant x_0$;

$$c_i = (1 + \beta_i \varphi^{m-1}(x_i) g^m(x_i - 0)) \left[G_{i-1}^{-1}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(\tau)}{\varphi(\tau)} W(\varphi(p(\tau))) q(p(\tau))\, d\tau\right)\right]^m, \tag{8}$$

$i = 1, 2, \ldots$, якщо $m \geqslant 1$, $\forall\, x \geqslant x_0$.

Розглянемо клас $\Im$ функцій f таких, що:

$j)$ $f(x)$ — додатна, неперервна, неспадна при $x > 0$;

$jj)$ $\forall\, u \geqslant 1,\ \nu > 0 \Rightarrow u^{-1}f(\nu) < f(u^{-1}\nu)$;

$jjj)$ $f(0) = 0$.

Теорема 2. *Припустимо, що виконується частина A теореми 1 і функція* $W\colon R_+ \to R_+$ *належить класу* $\Im$. *Тоді для довільного* $x_0 \leqslant x \leqslant x^*$ *виконується нерівність*

$$u(x) \leqslant \varphi(x)q(x)G_i^{*-1}\left[\int\limits_{x_i}^{x} f(\tau)q(p(\tau))\,d\tau\right] \qquad \textit{для} \qquad x \in I_1 =]x_i, x_{i+1}[, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

де

$$G_0^*(\eta) = \int\limits_1^{\eta} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad G_i^*(\eta) = \int\limits_{c_i^*}^{\eta} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$c_i^* = (1 + \beta_i\varphi^{m-1}(x_i)q^m(x_i))G_{i-1}^{*-1}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\tau)q(p(\tau))\,d\tau\right), \qquad \textit{якщо} \qquad m \in]0,1[;$$

$$c_i^* = (1 + \beta_i\varphi^{m-1}(x_i)q^m(x_i))\left[G_{i-1}^{*-1}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\tau)q(p(\tau))\,d\tau\right)\right]^m, \qquad \textit{якщо} \qquad m \geqslant 1$$

і

$$x^* = \sup_x\left\{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_1} f(\tau)q(p(\tau))\,d\tau \in \mathrm{Dom}(G_{i-1}^{*-1})\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 3. *Припустимо, що для* $x \geqslant x_0$ *виконується нерівність*

$$u(x) \leqslant u_0 + q(x)\left[\int\limits_{x_0}^{x} f(s)u(p(s))ds + \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\left(\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)u(p(\tau))\,d\tau\right)ds\right] +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} h(s)W(u(\sigma(s)))ds + \sum_{x_0 \leqslant x_i \leqslant x} \beta_i u^m(x_i - 0), \tag{10}$$

де $x \geqslant x_0 > 0$, $u(x)$, $f(x)$, $q(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, $\sigma(x)$ *— дійсні невід'ємні функції,* $p(x), \sigma(x) \in \wp$, $q(x) \geqslant 1$, $\beta_i \geqslant 0$ *і* W *задовольняє умови i–iii теореми 1. Тоді для* $x \geqslant x_0$ *справедливі такі оцінки:*

$$u(x) \leqslant \prod_{x_0 \leqslant x_i \leqslant x}(1 + \beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} q(p(\tau))[f(\tau) + g(\tau)]\,d\tau\right) \times$$
$$\times\, \psi_0^{-1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} h(\tau)W\left[\prod_{x_0 \leqslant x_i \leqslant x}(1 + \beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\right] \times\right.$$

$$\times W\left[q(\sigma(\tau))\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\sigma(\tau)} q(p(s))[f(s)+g(s)]ds\right)\right]d\tau\right), \qquad \textit{якщо} \qquad m\in]0,1[$$

і

$$\int\limits_{x_0}^{x} h(\tau)W\left[\prod_{x_0\leqslant x_i\leqslant x}(1+\beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\right]\times$$

$$\times W\left[q(\sigma(\tau))\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\sigma(\tau)} q(p(s))[f(s)+g(s)]ds\right)\right]d\tau\in \mathrm{Dom}(\psi_0^{-1}),$$

де

$$\psi_0(u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\nu}{W(\nu)};$$

$$u(x)\leqslant\prod_{x_0\leqslant x_i\leqslant x}(1+\beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\exp\left(m\int\limits_{x_0}^{x} q(p(\tau))[f(\tau)+g(\tau)]d\tau\right)\times$$

$$\times\,\psi_0^{-1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} h(\tau)W\left[\prod_{x_0\leqslant x_i\leqslant x}(1+\beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\right]\times\right.$$

$$\left.\times W\left[q(\sigma(\tau))\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\sigma(\tau)} q(p(s))[f(s)+g(s)]ds\right)\right]d\tau\right), \qquad \textit{якщо} \qquad m\geqslant 1$$

і

$$\int\limits_{x_0}^{x} h(\tau)W\left[\prod_{x_0\leqslant x_i\leqslant x}(1+\beta_i q^m(x_i)u_0^{m-1})\right]\times$$

$$\times W\left[q(\sigma(\tau))\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\sigma(\tau)} q(p(s))[f(s)+g(s)]ds\right)\right]d\tau\in \mathrm{Dom}(\psi_0^{-1}).$$

Наслідки.

A. Якщо $m=1$, то теорема 1 збігається з результатом [6, теорема 3.7.1, с. 232].

B. При $m=1$, $\varphi=\mathrm{const}$, $q=1$, $p(t)=t$ твердження теореми 1 збігається з результатами [3, 5].

C. Якщо $m=1$, $\phi(x)=c$, $q(x)=1$, $p(t)=t$, то теорема 1 збігається з результатом [14, твердження 2.3, с. 2143];

D. Якщо $q(x)=1$, $W(u)=u$, $p(t)=t$, то ми отримаємо аналог результатів Гронуолла–Беллмана для розривних функцій [7, лема 1].

E. Якщо $q(x) = 1$, $W(u) = u$, то ми здобудемо результат [12, теорема 2.1].

F. Якщо $g(x) = 1$, $W(u) = u^m$, $m > 0$, $p(t) = t$, то ми матимемо аналог результату Біхарі для розривних функцій [9].

G. Якщо $W(u) = u^m$, $m > 0$, то ми одержимо результат [13].

H. Якщо $q(x) = 1$, $W(u) = u$, $\sigma(s) = p(s) = s$, і $m \geqslant 1$, $\forall\, x \geqslant x_0$, то ми отримаємо результат теореми 3.1 [8] при $n(t) = u_0$.

Застосування отриманих результатів у дослідженні стійкості розв'язків імпульсних систем. Розглянемо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \qquad t \neq t_i, \qquad \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \tag{11}$$

де $x \in R^n$, $F \in R^n$, $I_i(x) \in R^n$ $(i = 1,2,\ldots)$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$, $t_{i-1} < t_i$ $\forall\, i = 1,2,\ldots$.

Припускатимемо, що $F(t,x)$ і $I_i(x)$ визначені в деякій області $D = \{(t,x)\colon t \in [t_0,T], T \leqslant \infty, \|x\| \leqslant h\}$ і задовольняють умови:

a) $\|F(t,x)\| \leqslant f(t)W(\|x\|)$, $f\colon R_+ \to R_+$, W задовольняє умови *i–iii* теореми 1;

b) $\|I_i(x)\| \leqslant \beta_i\|x\|^m$, $\beta_i = \mathrm{const} > 0$, $m > 0$.

Через $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ позначимо розв'язок задачі Коші для системи (11), тоді

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)W(\|x(\tau,t_0,x_0)\|)\,d\tau + \sum_{t_0<t_i<t} \beta_i\|x(t_i-0,t_0,x_0)\|^m. \tag{12}$$

Використовуючи результат теореми 1 і оцінку (5) (див. [5] для випадку $m = 1$), отримуємо

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \|x_0\| G_i^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\frac{W(\|x_0\|)}{\|x_0\|}d\tau\right] \qquad \text{для} \qquad t \in]t_i, t_{i+1}[$$

і

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\frac{W(\|x_0\|)}{\|x_0\|}d\tau \in \mathrm{Dom}(G_i^{-1}), \tag{13}$$

де

$$G_0(u) = \int\limits_{1}^{u} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad G_i(u) = \int\limits_{c_i}^{u} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \qquad i = 1,2,\ldots,$$

$$c_i = (1+\beta_i\|x_0\|^{m-1})G_{i-1}^{-1}\left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)\frac{W(\|x_0\|)}{\|x_0\|}d\tau\right), \qquad i = 1,2,\ldots,$$

якщо $m \in]0,1[$, $\forall\, t \geqslant t_0$;

$$c_i = (1+\beta_i\|x_0\|^{m-1})\left[G_{i-1}^{-1}\left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)\frac{W(\|x_0\|)}{\|x_0\|}d\tau\right)\right]^m, \qquad i = 1,2,\ldots,$$

якщо $m \geqslant 1$, $\forall\, t \geqslant t_0$.

Розглянемо деякі конкретні типи нелінійностей.

Якщо $W(u) = u$, $m = 1$, оцінка (5) набуває вигляду

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|x_0\| \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \beta_i) \exp\left[\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau\right].$$

Твердження 1. *Нехай для системи* (11) *виконуються умови:*

I. $\|F(t, x)\| \leqslant f(t)\|x\|$;

II. $\|I_i(x)\| \leqslant \beta_i\|x\|$;

III. $\exists\, m_1(t_0) = \mathrm{const} > 0\colon \prod\limits_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i) \leqslant m_1(t_0) < \infty$;

IV. $\exists\, m_2(t_0) = \mathrm{const} > 0\colon \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau \leqslant m_2(t_0) < \infty$, $\forall\, t \geqslant t_0$.

Тоді:

A. Усі розв'язки системи (11) *обмежені (рівномірно, якщо* $m_i(t_0)$ *не залежить від* t_0*) і має місце така оцінка:*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant m_1(t_0) \exp[m_2(t_0)]\|x_0\|. \tag{14}$$

B. Тривіальний розв'язок системи (11) *стійкий за Ляпуновим (рівномірно стійкий відносно* t_0*, якщо* $m_i(t_0) = m_i$*,* $i = 1, 2$*) (див. [1–3]).*

Зауваження 1. Якщо виконуються умови *I–IV* твердження 1 і $\lambda/\Lambda < (m_1(t_0) \times \times \exp[m_2(t_0)])^{-1}$, то тривіальний розв'язок є (λ, Λ, J)-стійким за Четаєвим (рівномірно (λ, Λ, J)-стійким, якщо $m_i(t_0)$, $i = 1, 2$, не залежать від t_0), $J = [t_0, T]$.

Якщо $W(u) = u^l$, $l \neq 1$, $m = 1$, оцінка (5) набуває вигляду

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i) \left[\|x_0\|^{1-l} + (1 + l) \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau\right]^{1/(1-l)} \qquad \forall\, t \geqslant t_0$$

при $0 < l < 1$;

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|x_0\| \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i) \left[1 - (l - 1)\|x_0\|^{l-1} \left[\prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i)\right]^{l-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau\right]^{-1/(l-1)} \qquad \forall\, t \geqslant t_0\colon \tag{15}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau < \left((l - 1)\left[\|x_0\| \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i)\right]^{l-1}\right)^{-1}, \qquad l > 1. \tag{16}$$

З оцінки (15) випливають такі твердження:

Твердження 2. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

a) $\|F(t, x) - F(t, y)\| \leqslant f(t)\|x - y\|^l$, $0 < l < 1$, $\forall\, x, y \in D$

b) II–IV твердження 1.

Тоді всі розв'язки системи (11) *обмежені (рівномірно, якщо* $m_i(t_0) = m_i$*,* $i = 1, 2$*).*

Зауваження 2. Припустимо, що виконуються умови a, b твердження 2 і

$$\lambda^{1-l} + (1-l)m_2(t_0) < \left[\frac{\Lambda}{m_1(t_0)}\right]^{1-l}.$$

Тоді тривіальний розв'язок системи (11) (λ, Λ, J)-стійкий за Четаєвим (рівномірно, якщо $m_i(t_0)$ не залежить від t_0).

Твердження 3. *Нехай для системи* (11) *виконуються умови II–IV твердження 1, має місце нерівність* (16) *і*

$$\|F(t,x)\| \leqslant f(t)\|x\|^l, \qquad l > 1.$$

Тоді тривіальний розв'язок системи (11) *стійкий за Ляпуновим (рівномірно, якщо* $m_i(t_0) = m_i$, $i = 1, 2$*).*

Зауваження 3. При $W(u) = u^l$, $l > 0$ і $m \neq 1$ умови обмеженості, стійкості, (λ, Λ, J)-стійкості досліджені в [8].

Розглянемо імпульсну систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, K[x(t)]), \qquad t \neq t_i, \qquad \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \tag{17}$$

де $x \in R^n$, $F \in R^n$, $I_i(x) \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots$, і визначені в області D, $K[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t} k(t, \tau, x(\tau))\, d\tau$.

Припустимо, що виконуються умови:

k) $\|F(t,x,y)\| \leqslant f(t)[\|x\| + \|y\|]$, $\forall\, x, y \in D$, $f\colon R_+ \to R_+$;

kk) $\|k(t,s,x)\| \leqslant g(t)\|x\|$, $\forall\, s \in [t_0, t]$, $g\colon R_+ \to R_+$;

kkk) $\|I_i(x)\| \leqslant \beta_i\|x\|^m$, $\forall\, x, y \in D$, $\beta_i = \mathrm{const} > 0$, $m > 0$, $m \neq 1$.

Легко бачити, що

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\|x(\tau,t_0,x_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} g(\xi)\|x(\xi,t_0,x_0)\|d\xi\right)d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0<t_i<t} \beta_i\|x(t_i - 0, t_0, x_0)\|^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \|x_0\| \prod_{t_0<t_i<t}(1 + \beta_i\|x_0\|^{m-1}) \exp\int\limits_{t_0}^{t}[f(\xi) + g(\xi)]d\xi,$$

якщо $0 < m < 1$, $t \geqslant t_0$,

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| \prod_{t_0<t_i<t}(1 + \beta_i\|x_0\|^{m-1}) \exp\left(m\int\limits_{t_0}^{t}[f(\xi) + g(\xi)]d\xi\right),$$

якщо $m \geqslant 1$, $t \geqslant t_0$.

Твердження 4. *Нехай для системи* (17) *виконуються умови k–kkk при* $m > 1$ *і мають місце такі оцінки:*

a) $\exists\, m_3(t_0) = \text{const} > 0$*:* $\prod\limits_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i \|x_0\|^{m-1}) \leqslant m_3(t_0) < \infty$*;*

b) $\exists\, m_4(t_0) = \text{const} > 0$*:* $\int\limits_{t_0}^{t} [f(\xi) + g(\xi)] d\xi \leqslant m_4(t_0) < \infty\ \forall\, t \geqslant t_0$.

Тоді:

I) усі розв'язки системи (17) *обмежені і задовольняють нерівність*

$$\|x(t)\| \leqslant m_3(t_0) \exp[m_4(t_0)] \|x_0\|;$$

II) тривіальний розв'язок системи (17) *стійкий за Ляпуновим (рівномірно, якщо* $m_i(t_0) = m_i$, $i = 3, 4$*);*

III) тривіальний розв'язок системи (17) (λ, Λ, J)*-стійкий за Четаєвим (рівномірно, якщо* $m_i(t_0)$ *не залежить від* t_0*) і* $m_3(t_0) \exp[m_4(t_0)] < \Lambda/\lambda$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**. – С. 1981–1992.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980. – 80 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
4. *Самойленко А. М., Борисенко С. Д., Матараццо Дж. та ін.* Диференціальні моделі (стійкість). – Київ: Вища шк., 2000. – 330 с.
5. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 198–201.
6. *Samoilenko A. M., Borysenko S. D., Cattani C. et al.* Differential models: stability, inequalities and estimates. – Київ: Наук. думка, 2001. – 328 с.
7. *Borysenko D. S., Gallo A., Toscano R.* Integral inequalities Gronwall–Bellman–Bihari type for discontinuous functions and estimates of solutions impulsive systems // Proc. DE&CAS. – Brest, 2005. – P. 5–9.
8. *Borysenko S. D., Iovane G.* Integro-sum inequalities and qualitative analysis dynamical systems with perturbations. – Salerno, Univ. of Salerno, Tipogr., Elda-Mercato S. Severino, 2006. – 180 p.
9. *Borysenko S. D., Iovane G., Giordano P.* Investigations of the properties motion for essential nonlinear systems perturbed by impulses on some hypersurfaces // Nonlinear Anal. – 2005. – **62**. – P. 345–363.
10. *Borysenko S. D., Matarazzo G., Pecoraro M.* Generalization of Bihari's lemma for discontinuous functions and its application to the stability problem of differential equations with impulse disturbance // Georg. Math. J. – 2006. – **13**, No 2. – P. 229–238.
11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 11. – С. 1995–2002.
12. *Gallo A., Piccirillo A. M.* About new analogies Gronwall–Bellman–Bihari type inequalities for discontinuous functions and estimates of solutions of impulsive differential systems // Nonlinear Anal. – 2007. – **67**. – P. 1550–1559.
13. *Iovane G.* Some new integral inequalities of Bellman–Bihari type with delay for discontinuous functions // Ibid. – 2007. – **66**. – P. 498–508.
14. *Mitropolsky Yu. A., Iovane G., Borysenko S. D.* About a generalization of Bellman–Bihari type inequalities for discontinuous functions and their applications // Ibid. – 2007. – **66**. – P. 2140–2165.
15. *Borysenko S. S., Gallo A., Piccirillo A. M.* One some generalizations of Bellman–Bihari result for integro-functional inequalities for discontinuous functions and their applications. – Napoli, 2007. – 14 p. – (Prepr. / Universita degli studi di Napoli "Federico II", Dipartimento di matematica e applicazioni; No 27).

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 21.01.2009*

S. S. Borysenko

Integro-functional inequalities of the Bellman–Bihari type for discontinuous functions and their applications

We present some new nonlinear integral inequalities of the Bellman–Bihari type for discontinuous functions (integro-sum inequalities; impulse integral inequalities). Some applications of the results are included: conditions of boundedness (uniform), stability by Lyapunov (uniform), and practical stability by Chetaev (uniform) for the solutions of impulsive differential and integro-differential systems of ordinary differential equations.