ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

И.Н. Молчанов, Т.А. Герасимова, А.В. Попов, А.Н. Химич, Т.В. Чистякова

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
проспект Академика Глушкова, 40, Киев -187, 036680,
факс: 266 74 18, тел.: 266 11 96,
molchan@d150.icyb.kiev.ua

Розглядаються задачі алгебраїчної проблеми власних значень з наближено заданими вихідними даними, які можуть виникати при розв′язуванні прикладних задач. Описуються труднощі комп′ютерного розв′язування цих задач. Пропонується інтелектуальна система для комп′ютерного дослідження математичних властивостей машинних моделей задач, що розглядаються, та їх розв′язування з оцінками достовірності результатів. Наведено порівняльну характеристику даної системи з іншими існуючими програмними засобами для розв′язування цього класу задач і показано її переваги.

Eigenvalue problems with approximately given initial data are dealt with arising during the solving of applied problems. Difficulties related to the solving of these problems on computers are described. An intelligent system is proposed intended for the computer investigating of mathematical characteristics of machine models of problems under consideration as well as for their solving together with estimating the reliability of results. A comparison of this system with the software available for solving this class of problems is done and its advantages are demonstrated.

В настоящее время разработано огромное количество программ численного программного обеспечения. Однако в ряде случаев применение прикладных программ приводит к получению на компьютере результатов, не имеющих физического смысла. В этой работе мы рассмотрим проблемы, определяющие достоверность получаемых результатов, и разрешение этих проблем с помощью интеллектуальных программных средств для научно-технических задач, решение которых сводится к алгебраической проблеме собственных значений.

1. Постановка матричных задач на собственные значения с приближенно заданными исходными данными

Задачи на собственные значения возникают при факторном анализе, при определении частот собственных колебаний консервативных динамических систем, при исследовании колебаний и устойчивости объектов механической, физической и химической природы, а также как самостоятельные математические задачи.

Матричная задача на собственные значения состоит в нахождении таких чисел λ, при которых существуют отличные от нулевого решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}\,, \tag{1}$$

где **A** и **B** - некоторые квадратные матрицы порядка n. Числа λ называют собственными значениями, а векторы **x –** собственными векторами обобщенной задачи. Если матрица $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E}$, то задачу (1) называют стандартной проблемой собственных значений; в противном случае – обобщенной проблемой.

Задача нахождения всех собственных значений и принадлежащих им собственных векторов называется полной проблемой собственных значений. Задача нахождения нескольких собственных значений и соответствующих им векторов или только собственных значений называется частичной проблемой собственных значений.

Для плотной или ленточной действительной симметричной матрицы **A** задача состоит в нахождении некоторых или всех собственных значений, а иногда и соответствующих им собственных векторов. Аналогичная задача ставится в некоторых случаях для комплексной эрмитовой матрицы. В этом случае каждое собственное значение λ является действительным, а собственные векторы могут быть комплексными. В ряде случаев требуется найти все или некоторые собственные значения, а иногда и принадлежащие им собственные векторы обобщенной задачи на собственные значения с действительной и симметричной матрицей **A** и с действительной симметричной положительно определенной матрицей **B**. Матрицы **A** и **B** могут быть плотными или ленточными. В некоторых случаях для произвольной действительной или комплексной матрицы **A** необходимо найти все или некоторые собственные значения или корневые векторы. Отметим, что даже для действительных матриц **A** все λ могут быть комплексными. Существуют и иные постановки задач на собственные значения.

При описании прикладных задач на собственные значения крайне редко возникают системы с точными исходными данными

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}\,. \tag{2}$$

Наиболее типичным является задание системы (1) и погрешности в исходных данных

$$\left\|\widetilde{\mathbf{A}}-\mathbf{A}\right\| \equiv \left\|\Delta\mathbf{A}\right\| < \varepsilon_A, \quad \left\|\widetilde{\mathbf{B}}-\mathbf{B}\right\| \equiv \left\|\Delta\mathbf{B}\right\| < \varepsilon_B \qquad (3)$$

Исследование свойств алгебраической проблемы собственных значений с приближенно заданными исходными данными может включать спектральное разложение матрицы, построение инвариантных подпространств (например, собственных, корневых), определение канонических форм (например, Жордана), вычисление обусловленности собственных значений и собственных векторов, исследование возмущения решения в зависимости от погрешности исходных данных, оценки достоверности получаемых машинных решений.

Не всегда близость элементов матриц **A, B** и $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{B}}$, соответственно, обеспечивает близость собственных значений задачи. При исследовании стандартной проблемы собственных значений следует различать следующие случаи [1]:

1) возмущение простого собственного значения матрицы, имеющей линейные элементарные делители;
2) возмущение кратного собственного значения матрицы, имеющей линейные элементарные делители;
3) возмущение простого собственного значения матрицы, имеющей один или более нелинейных элементарных делителей;
4) возмущение кратного собственного значения соответствующего нелинейному элементарному делителю полной матрицы;
5) возмущение кратных собственных значений λ_i когда имеется более чем один элементарный делитель с множителем $(\lambda_i - \lambda)$ и по крайней мере один из них нелинейный.

Аналогичные случаи могут возникнуть и для обобщенной проблемы собственных значений

При вычислении собственных векторов также возникает задача оценки достоверности получаемых решений. Рассмотрим простой пример. Пусть заданная матрица имеет лишь простые собственные значения. Однако при некотором определенном изменении ее элементов в пределах точности их задания можно получить матрицу, имеющую кратные собственные значения. В этом случае каноническая форма матрицы при изменении ее элементов в пределах точности их задания может перейти от чисто диагональной формы к недиагональной канонической форме Жордана [3]. При этом изменяется даже количество линейно независимых собственных векторов.

На основании изложенных выше рассуждений видно, что прикладные задачи при сведении их к задачам на собственные значения порождают целый ряд уравнений (1), (3), обладающих достаточно широким классом формально допустимых решений. Решение всей проблемы будет состоять в определении одного из допустимых решений, получении этого решения и оценке наследственной погрешности в математическом решении задачи.

2. Проблемы, возникающие при компьютерной реализации

Основными проблемами машинной реализации численных методов являются получение на компьютере решения, а также обеспечение оценки близости машинного и математического решений задачи.

После реализации задачи (1), (3) на ЭВМ (ввода или формирования исходных данных) получаем машинную модель задачи, свойства которой могут отличаться от свойств как исходной задачи (2), так и приближенной задачи (1), (3).

С другой стороны, в машине хранится “машинный алгоритм”, который отличается от исходного алгоритма решения задачи [2].

Применяя “машинный алгоритм” решения к машинной модели задачи, в итоге получим машинное решение, которое может существенно отличаться от точного решения машинной задачи и, следовательно, от точных решений соответствующих задач (1), (3) и (2).

Вычисленные на компьютере собственные значения являются точными собственными значениями задачи (1) с матрицами $\mathbf{A} + \mathrm{d}\mathbf{A}$ и $\mathbf{B} + \mathrm{d}\mathbf{B}$, причем матрицы $\mathrm{d}\mathbf{A}$ и $\mathrm{d}\mathbf{B}$ не единственные и определяются выбранным алгоритмом, порядком задачи и длиной мантиссы машинного слова. Рассматривая погрешность машинной реализации в задачах на собственные значения как следствие возмущений матриц $\mathrm{d}\mathbf{A}$ и $\mathrm{d}\mathbf{B}$, можно выписать оценки возмущений собственных чисел и векторов при вычислениях. Так как значения $\left\|\mathrm{d}\mathbf{A}\right\|$ и $\left\|\mathrm{d}\mathbf{B}\right\|$ определяется порядком матриц, методом решения задачи на собственные значения и длиной машинного слова, то, увеличивая длину машинного слова, можно улучшить точность вычисленных собственных значений и получить достаточную близость машинного и математического решений задачи.

На основании изложенного выше видно, что при описании физических моделей существует целый класс задач на собственные значения (1), (3). Близость математического и физического решений задачи определяется, с одной стороны, свойствами матриц задачи, с другой – погрешностью в задании исходных данных. Учет обусловленности задач при отыскании собственных значений и собственных векторов позволяет оценить наследственную погрешность в математическом решении задачи.

Таким образом, компьютерная реализация методов нахождения собственных значений и собственных векторов задачи (1), (3) вносит погрешность, определяемую свойствами матрицы **A**, методами решения проблемы собственных значений и особенностями вычислений на компьютере. Поэтому на этапе компьютерного решения задачи необходимо проводить следующие исследования (которые должны учитывать перечисленные выше случаи возмущений собственных значений):

- установить существование и единственность решения машинной задачи;

– исследовать его устойчивость в рамках уровня погрешностей перевода чисел из десятичной системы счисления в машинную;
– определить оценку числа обусловленности машинной модели задачи;
– в соответствии с выявленными свойствами определить алгоритм;
– оценить вычислительную погрешность полученного решения, т. е. оценку близости полученного решения к точному решению машинной задачи.

Следовательно, исследование достоверности получаемых на компьютере решений матричных задач на собственные значения включает установление и исследование свойств как задач (2) и (1), (3), так и соответствующей им машинной модели задачи, оценку наследственной погрешности в математическом решении, а также оценку вычислительной погрешности полученного машинного решения, оценку полной погрешности решения.

Погрешность машинной реализации в задачах на собственные значения можно трактовать как возмущение исходных данных. Приблизить машинное решение к математическому можно, увеличивая длину машинного слова. Учет погрешности вычислений на компьютере является одним из аспектов машинной реализуемости алгоритмов. При этом представляет интерес простота вычислительных схем, оценка погрешности реализации каждого метода, требуемое число арифметических операций, память компьютера и в конечном итоге время решения задачи.

3. Компьютерное исследование задач на собственные значения – способ получения знаний о свойствах решаемых задач

Проведение исследований, перечисленных выше, не тривиально даже для квалифицированного математика, не говоря уже о специалистах других предметных областей. Существует и другая сторона проблемы при использовании традиционной технологии решения задач для применения готовых (стандартных) программ или пакетов прикладных программ пользователь, как правило, должен переформулировать постановку задачи, описанную понятиями предметной области, в постановку, описываемую понятиями формальной модели.

Кроме того, как отмечено выше, машинная модель задачи (которая непосредственно и решается на компьютере) существует только в компьютере и ее свойства в большинстве случаев априори неизвестны.

Поэтому исследование этих свойств должно проводиться на компьютере. Такое компьютерное исследование позволяет получить знания о свойствах решаемых задач. Знание этих свойств позволяет выбрать подходящий алгоритм получения достоверного машинного решения задачи и оценить погрешность этого решения или же указать причины, по которым достоверное решение не может быть получено.

Например, учет обусловленности машинной модели задачи при отыскании собственных значений и собственных векторов позволяет оценить наследственную погрешность в компьютерном решении задачи. Апостериорные оценки обусловленности машинных моделей задач на собственные значения могут быть получены в ходе решения задач на компьютере.

Таким образом, программные средства, которые обеспечивали бы автоматизацию процесса решения задач на собственные значения, должны обязательно включать в себя и средства автоматического исследования свойств решаемых задач.

4. Принципы создания интеллектуальных систем

Трудности компьютерного решения алгебраической проблемы собственных значений преодолеваются созданием интеллектуальной системы для исследования и решения рассматриваемого класса задач, которая должна обеспечивать:
– решение проблемы собственных значений с приближенно заданными исходными данными;
– исследование свойств машинной модели задачи: оценку обусловленности задачи относительно собственных значений и собственных векторов, оценку наследственной погрешности решения;
– оценку полной погрешности вычисленных собственных значений и собственных векторов.

Кроме того, интеллектуальная система должна позволять:
– сформировать задачу в компьютере на языке предметной области;
– осуществить контроль ввода исходных данных;
– получить протокол процесса решения задачи с анализом свойств решаемой задачи и полученных результатов;
– получить информационно-справочный материал о функциональных возможностях интеллектуальной системы, алгоритмах решения, используемой терминологии и т.д.;
– обучить пользователя работе с интеллектуальной системой на модельных задачах, которые по своим внешним признакам идентичны решаемым задачам.

Реализация перечисленных требований к интеллектульной системе состоит в:
– автоматизации процесса компьютерного исследования математических свойств машинной модели задачи, выбора алгоритма и синтез программы решения в соответствии с выявленными свойствами, математическими и техническими возможностями вычислительной среды;

– решении задач с приближенно заданными исходными с оценками достоверности получаемых результатов решения;
– получении решения с оценкой полной погрешности;
– соответствии ее функциональных возможностей различным целям пользователей и уровням их подготовки.

Созданная в Институте кибернетики НАН Украины интеллектуальная система EIGSYST для исследования и решения матричной проблемы собственных значений функционирует на ЭВМ PENTIUM III с операционной системой Microsoft NT, Windows 98, Windows 2000.

Была создана база знаний данной предметной области, которая включает в себя широкий спектр задач на собственные значения с приближенно заданными исходными данными и специальные компьютерные методы исследования математических свойств их машинных моделей, а также алгоритмы анализа получаемых машинных результатов. Знания представлены в компьютере в виде функциональных программных модулей, которые описывают логически законченные части машинных алгоритмов исследования и решения задач, а также их семантики. Каждый функциональный модуль содержит в себе знания о том, как он может быть использован, о входных и выходных параметрах модуля, об объемах памяти для массивов данных и т.д. Семантика функциональных модулей устанавливается на основании знаний о задачах, функциональных возможностях модулей, математических и технических особенностях компьютера. Программа управления на основе семантики модулей и выявленных математических знаниях о свойствах машинной модели задачи организует автоматическое построение алгоритмов и программ решения задач с анализом достоверности результатов решения. В случае невозможности получить решение задачи или если достоверность решения задачи не гарантируются EIGSYST оповещает об этом пользователя и выдает необходимые рекомендации и предупреждения.

Различные сценарии диалога разработаны с учетом моделей предметной области и пользователя, т.е. его различных целей и уровня подготовки к использованию интеллектуальной системы. При этом удовлетворяются такие требования: общение на языке предметной области, удобные формы ввода/ вывода информации, безбумажная форма документации, наличие обучающей подсистемы.

EIGSYST состоит из двух независимых частей – EIGSYST-DENSE и EIGSYST-BAND.

EIGSYST-DENSE – предназначена для решения обычной и обобщенной проблемы собственных значений с плотными матрицами. Вычисляются все собственные значения и векторы (полная проблема). Для обычной проблемы собственных значений $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ в качестве **A** может быть выбрана вещественная матрица общего вида, симметричная, комплексная или эрмитовая. Для обобщенной проблемы собственных значений $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ матрицы **A** и **B** могут быть либо вещественными матрицами общего вида, либо симметричными (**B**, кроме того, положительно определена).

EIGSYST-BAND – предназначена для решения обычной проблемы собственных значений с симметричными ленточными матрицами и обобщенной проблемы с симметричными положительно определенными ленточными матрицами. Вычисляется несколько собственных значений и векторов (решается частичная проблема).

5. Преимущества интеллектуальной системы.

Преимущества интеллектуальной системы EIGSYST перед существующими программными средствами решения задач на собственные значения состоят в следующем:
– общение пользователя с компьютером на языке математики и осуществление контроля вводимой информации;
– исследование свойств машинной модели решаемой задачи с приближенно заданными исходными данными, так как интеллектуализация системы EIGSYST дает возможность компьютеру не только работать с данными, но и вырабатывать новые знания о свойствах решаемой задачи;
– построение в автоматическом режиме в соответствии с выявленными знаниями о свойствах задачи алгоритма, учитывающего математические и технические возможности используемого компьютера;
– синтезирование по построенному алгоритму программы решения, учитывающей особенности компьютера и операционной системы;
– решение задачи с минимальными затратами машинных ресурсов;
– гарантирование достоверности получаемых машинных решений задачи, используя для этого знания о математических свойствах решаемой модели задачи;
– использование построенной программы в качестве стандартной подпрограммы в программе пользователя по решению прикладной задачи;
– получение информационно-справочного материала по предметной области и составу программного средства;
– обучение специалистов работе с интеллектуальной системой EIGSYST;
– повышение производительности труда конечного пользователя при исследовании и решении задач на собственные значения.

6. Сравнительная характеристика функциональных возможностей интеллектуальной системы.

Рассмотрим на отдельных примерах некоторые преимущества рассматриваемой интеллектуальной системы по сравнению с известными программными средствами, которые используются для решения рассматриваемого класса задач.

Пример 1. Решить полную проблему на собственные значения для матрицы общего вида 4-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 73+10^{-6} & 116 & 164 & 216 \\ -143 & -248 & -366 & 494 \\ 108 & 194 & 291 & 396 \\ -29 & -53 & -80 & -109 \end{pmatrix},$$

которая является возмущенной по отношению к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 73 & 116 & 164 & 216 \\ -143 & -248 & -366 & 494 \\ 108 & 194 & 291 & 396 \\ -29 & -53 & -80 & -109 \end{pmatrix}.$$

Точные собственные значения матрицы с точными исходными данными равны -5, 9, 1, 2.

Поскольку система EIGSYST ориентирована на решение задач с приближенными исходными данными, то кроме ввода в компьютер порядка и элементов матрицы, пользователь должен указать максимальную абсолютную погрешность элементов, которая учитывается в EIGSYST как при исследовании свойств задачи, так и при анализе получаемых компьютерных результатов. В данном случае максимальная абсолютная погрешность элементов матрицы задается 10^{-6}. Результаты исследования и решения задачи приведены в протоколе № 1).

Протокол № 1

Задача:

Определить все собственные значения и все собственные векторы действительной матрицы общего вида.

Параметры задачи:

порядок матрицы = 4;
максимальная абсолютная погрешность элементов матрицы = 1.0e-006.

Методы:

- балансировка матрицы;
- метод Хаусхолдера для приведения матрицы общего вида к форме Хессенберга;
- QR-алгоритм для определения всех собственных значений и всех собственных векторов матрицы Хессенберга;
- определение собственных векторов $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Результаты решения:

- собственные значения (расположены по строкам)

-5.000005999995754e+000 9.000003999999997e+000
2.000003999990315e+000 9.999990000054755e-001

- числа обусловленности собственных значений (расположены по строкам)

8.520551982932864e+001 1.677051978972283e+001
1.336426042139353e+002 6.562156890149006e+001

- оценки абсолютной погрешности собственных значений (расположены по строкам)

3.40823e-004 6.70822e-005
5.34571e-004 2.62487e-004

Конец решения задачи

Кратко проанализируем полученный протокол. Как мы видим, результаты машинного решения задачи на собственные значения с возмущенной матрицей (протокол № 1) и их сравнение с собственными значениями задачи с точными данными, свидетельствуют о том, что полученные оценки являются оценками реальной погрешности, наследственная погрешность пропорциональна погрешности элементов матрицы и числам обусловленности собственных значений, оценки погрешности являются несколько завышенными в силу мажорантности теоретических оценок.

В случае решения задач на собственные значения при помощи пакетов программ EISPACK [4], MATLAB [5], „СПЕКТР“ [6] анализ полученного решения пользователь всегда должен проводить самостоятельно.

Пример 2. Решить полную обобщенную симметричную задачу на собственные значения $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ с матрицами 6-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & -3.1 & -3.1 & -3.1 & -3.1 \\ -3 & -3.1 & 2.8 & 3.8 & 3.8 & 3.8 \\ -3 & -3.1 & 3.8 & 9.8 & 10.7 & 10.7 \\ -3 & -3.1 & 3.8 & 10.7 & 12.6 & 14.6 \\ -3 & -3.1 & 3.8 & 10.7 & 14.6 & 15.6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

Поскольку обе матрицы симметричные, то EIGSYST выбирает для исследования задачи алгоритм, учитывающий симметричность матриц **A** и **B**. В этом случае пользователь должен ввести порядок матриц **A** и **B** и ввести элементы нижних треугольников этих матриц. Поскольку элементы матриц целые числа, то максимальную абсолютную погрешность их элементов мы указываем 0. Результаты исследования и решения задачи приведены в протоколе № 2.

Протокол № 2

Задача:

Определить все собственные значения и все собственные векторы
обобщенной задачи $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ для симметричных матриц **A** и **B**.

Данные:

порядок матриц = 6;
мак. абсолютная погрешность
элементов матрицы **A** = 0.0e+000;
мак. абсолютная погрешность
элементов матрицы **B** = 0.0e+000.

Методы:

- разложение матрицы **B** по методу Холесского для приведения к стандартной задаче.

Внимание!!!
Матрица B - не положительно определена.
Задача будет решаться методами для матриц A и B общего вида.

Методы:

- приведение обобщенной задачи $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ к обобщенной форме Хессенберга;
- приведение обобщенной формы Хессенберга к обобщенной форме Шура;
- QZ- алгоритм для определения всех собственных значений и всех собственных векторов обобщенной формы Шура;
- определение всех собственных векторов задачи $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$.

Результаты:

- действительные части собственных значений (расположены по строкам)

6.136926050886546e+000	4.182459191654400e+000
9.087704041727980e-001	9.087704041727979e-001
9.315369745567288e-001	9.315369745567286e-001

- мнимые части собственных значений (расположены по строкам)

0.000000000000000e+000	0.000000000000000e+000
1.939676801023191e+000	-1.939676801023192e+000
1.971976625619906e+000	-1.971976625619906e+000

- оценка достоверности:

EIGSYST завершил решение задачи удовлетворительно
(в соответствии с методом обратного анализа ошибок).

Конец решения задачи

В этом примере EIGSYST анализирует свойства матрицы **B** и, обнаружив, в данном случае, что матрица **B** не является положительно определенной, автоматически перестраивает исходные данные для решения задачи как обобщенной несимметричной, при помощи QZ-алгоритма, получает решение и оценивает его достоверность (протокол №2).

При использовании, например, пакета EISPACK для решения этой задачи в результате выдается только признак аварийного завершения. Для того, чтобы применить другую программу необходимо самостоятельно переформировать входные данные и заново обратиться к программе.

Пример 3. Решить полную проблему собственных значений для вещественной матрицы Хессенберга 9-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1890 & -4020 & 4020 & 4020 & -12060 & -48240 & 96480 & -96480 & -482400 \\ 1000 & 4120 & -3990 & -3990 & 11970 & 47880 & -95760 & 95760 & 478800 \\ & 2000 & -4870 & -4881 & 14643 & 58572 & -117144 & 117144 & 585720 \\ & & 3000 & 15011 & -44997 & -179988 & 359976 & -359976 & -1799880 \\ & & & 4000 & -31988 & -128004 & 256008 & -256008 & -1280040 \\ & & & & 5000 & 32013 & -63804 & 63804 & 319020 \\ & & & & & 6000 & -4889 & 5001 & 25005 \\ & & & & & & 7000 & -46888 & -235005 \\ & & & & & & & 8000 & 40113 \end{pmatrix}.$$

Точные собственные значения:

130, 120, 113, 112, 111, 110, 13, 12, 11.

Характерным для этой задачи является то, что собственные значения являются плохо обусловленными, что не позволяет получить достоверное машинное решение задачи.

Протокол №3

Задача:

Определить все собственные значения и все собственные векторы
действительной матрицы общего вида.

Данные :

порядок матрицы = 9;
мак. абсолютная погрешность
элементов матрицы = 0.0e+000.

Метод:

- балансировка матрицы;
- QR-алгоритм для определения всех собственных значений и всех собственных векторов матрицы Хессенберга;
- определение собственных векторов исходной задачи.

Результаты:

- действительные части собственных значений (расположены по строкам)

1.100000000003597e+002 1.199999999996377e+002
-1.409500711327166e+001 -1.409500711327127e+001
5.291535740571130e+001 5.291535740571128e+001
1.313863057869683e+002 1.313863057869683e+002
1.615866878412031e+002

- мнимые части собственных значений (расположены по строкам)

0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000
2.634812076319162e+001 -2.634812076319162e+001
5.381389297920864e+001 -5.381389297920864e+001
4.735014173461876e+001 -4.735014173461876e+001
0.000000000000000e+000

- числа обусловленности собственных значений (расположены по строкам)

1.160445581301671e+018 1.188791241264940e+018
4.643578832671746e+015 4.643578832671746e+015
2.227457819564700e+016 2.227457819564700e+016
5.054761094176814e+016 5.054761094176814e+016
5.409324939090583e+016

- оценки абсолютной погрешности собственных значений (расположены по строкам)

5.70726e+009	5.84666e+009
2.28379e+007	2.28379e+007
1.09550e+008	1.09550e+008
2.48601e+008	2.48601e+008
2.66039e+008	

Внимание!!!

Достоверность решение задачи не гарантируется!

Конец решения задачи

Проблема в данном случае состоит в том, что, не зная свойств машинной задачи, невозможно установить тот факт, что в полученном решении нет ни одной верной цифры (кроме двух первых собственных значений).

Результаты свидетельствуют, что собственные значения плохо обусловлены и соответственно вычисленные оценки решения машинной задачи, позволяют сделать правильный вывод - машинному решению нельзя доверять.

Для плохо обусловленных задач не существует возможности получения достоверного решения (не прибегая к дополнительным средствам, например, повышению разрядности вычислений или преобуславливанию матрицы). Поэтому полученные машинные результаты лишь закономерно отражают следующий факт: погрешность полученного решения прямо пропорциональна числам обусловленности собственных значений машинной задачи и погрешности элементов матрицы (в данном случае погрешности ввода чисел в компьютер).

В случае решения задачи при помощи пакетов программ EISPACK [1], MATLAB [3] „СПЕКТР“ [2] будет выдано результат, не содержащий ни одной верной цифры без предупреждения об этом.

Литература

1. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений . М.: Наука, 1970. 564 с.
2. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. Киев: Наукова думка, 1987. 285 с.
3. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.- М.: Физматгиз, 1963.- 736 с.
4. *Garbow B. S., Royle J.M., Dongarra J.J., Moller M.M.* Matrix Eigensystem Routine // EISPACK Guide Extension Lekture Notes in Computer Sci. - 51. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. – 36 p.
5. *Moler P.* Matlab user’s Guide // Univ. New Mexico Dep. Comput. Sci.Rep. DSC-5-27-81, Albuguergue, NM, 1981,-175 p.
6. Пакет программ „СПЕКТР“ // Под ред. В.Н. Кублановской.– Л.,: Наука, 1988. 110 с.