УДК 517.977.56

Я. А. Шарифов[1], канд. физ.-мат. наук,
Т. В. Ширинов[2], канд. физ.-мат. наук

[1] Институт кибернетики НАН Азербайджана, г. Баку
[2] Азербайджанский технический университет, г. Баку

ГРАДИЕНТ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассматривается задача оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с интегральными краевыми условиями. На основе формулы приращение функционала найден явный вид градиента.

Ключевые слова: *оптимальное управление, система Гурса-Дарбу, формула приращения, градиент функционала, нелокальные условия.*

Введение. В последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями. Нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо классических краевых условий для дифференциальных уравнений в частных производных задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Часто роль таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения.

В книгах [1, 2] рассмотрены многочисленные примеры из биологии, социологии, сельского хозяйства, математические модели описываются гиперболическими уравнениями с нелокальными условиями. В работе [3] рассмотрена линейная гиперболическая система с интегральными и многоточечными краевыми условиями и доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач, а также приведены конкретные процессы, математические модели описываются именно такими задачами. В [4] при выводе математической модели изнашивающихся поверхностей также получены гиперболические уравнения с неклассическими условиями. В работе [5] рассмотрено одномерное нелинейное гиперболическое дифференциальное уравнение с интегральными условиями. Краевые условия заданы на характеристиках уравнения. Доказано существование и единственности классического решения рассмотренной задачи. В работах [6-10] рассмотрены линейные и квазилинейные гиперболические уравнения с интегральными условиями и доказаны теоремы о существовании и единственности классических решений. В работе [11] рассмотрено одномерное линейное гиперболическое уравнение с интегральными условиями. Применены методы Фурье и доказана теорема существования и единственности классических решений. В работах [12-14] также рассмотрены различные гиперболические уравнения с различными интегральными краевыми условиями. Таким образом, из выше отмеченного следует, что потребность в гиперболических уравнениях с нелокальными краевыми условиями возникает в различных областях науки, техники и экономики. Поэтому возникает вопрос об оптимальном управлении такими процессами.

Задачи оптимального управления с различными нелокальными условиями изучены сравнительно мало. Различные задачи оптимального управления для гиперболических систем с различными нелокальными условиями рассмотрены в работах [15-19].

В данной работе рассмотрена нелинейная система гиперболических уравнений на ограниченном прямоугольнике. Граничные условия заданы на характеристиках гиперболической системы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Для однозначной разрешимости дифференциальных уравнений на одной из характеристик заданы интегральные условия. Управляющие параметры входят в правую часть гиперболической системы и в граничные условия. Задачи оптимального управления с такими краевыми условиями рассматриваются впервые.

Постановка задачи. Пусть некоторый управляемый объект описывается системой гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s} = f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right),\text{ п. в. } (t,s)\in Q, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial t} = \varphi\big(t,y(t,0),v(t)\big),\text{ п. в. } t\in[0,T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial y(0,s)}{\partial s} = \psi\big(s,y(0,s),\omega(s)\big),\text{ п. в. } s\in[0,l], \quad (3)$$

$$\int_0^T n(t)\,y(t,0)\,dt = c, \quad (4)$$

где $Q=\{(t,s):0\le t\le T,0\le s\le l\}$ – заданный прямоугольник, $T,l>0$ заданные числа; $y=(y_1,y_2,..,y_n)$ – фазовые координаты; $u=(u_1,u_2,..,u_r)$, $v=(v_1,v_2,..,v_m)$, $\omega=(\omega_1,\omega_2,..,\omega_q)$ – управляющие параметры; $\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, \frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s}$ – обобщенные производные функции $y = y(t,s)$ по Соболеву; $f = (f_1, f_2, .., f_n)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, .., \phi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, .., \psi_n)$ – заданные вектор-функции; $n(t)$ – $n \times n$-мерная матрица-функция, $c \in R^n$ – заданный постоянный вектор.

Предполагается, что управления $w = w(t,s) = (u(t,s), v(t), \omega(s))$ выбирают из множества

$$W = U \times V \times \Omega, \tag{5}$$

где $U \subseteq L_2^r(Q)$, $V \subseteq L_2^m([0,T])$, $\Omega \subseteq L_2^q([0,l])$.

Здесь использованы следующие обозначения: R^n – n-мерное эвклидово пространство, $L_2^r(A)$ – пространство r-мерных вектор-функций, измеримых и квадратично-суммируемых по Лебегу на множество A.

Определение. Под решением задачи (1)-(4), соответствующему управлению $w \in W$, понимается вектор-функция $y = y(t,s;w) \in$ $\in H_2^{1,n}(Q)$, обладающая обобщенной производной по Соболеву $\dfrac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_2^n(Q)$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) и условиям (2), (3) почти всюду, а условию (4) в классическом смысле. Здесь $H_2^{1,n}(Q)$ – пространство Соболева n-мерных вектор-функций (в дальнейшем будем опускать значки, указывающие размерность вектор-функций), квадратично-суммируемых по Лебегу на Q вместе со своими первыми обобщенными производными, т. е. $y(t,s), \dfrac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \dfrac{\partial y(t,s)}{\partial s} \in L_2(Q)$. Отметим, что из данного определения решение начально-краевой задачи (1)-(4) следует что, данное обобщенное решение также принадлежит пространству $C^n(Q)$. (Через $C^n(Q)$ обозначено пространство n-мерных вектор-функций непрерывных на прямоугольнике Q).

Задача оптимального управления ставится следующим образом: среди управлений $w = w(t,s) \in W$ требуется найти такое, чтобы минимизировать функционал

$$J(w) = \iint_Q F\left(t, s, y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, u(t,s)\right) dtds + \sum_{i=1}^{k} \Phi\left(y(t_i, s_i)\right), \tag{6}$$

где $F(t,s,y,p,q,u)$ и $\Phi(y)$ – скалярные функции; (t_i,s_i), $i=\overline{1,k}$ – произвольный набор точек из прямоугольника Q; k – фиксированное натуральное число.

Заметим, что задачи оптимизации типа (1)-(6) представляют практический интерес. К настоящему времени существуют многочисленные процессы, которые описываются с помощью гиперболических систем уравнения: при исследовании процессов сорбции, десорбции, сушки, трения, изнашивания и т.д. Условие (4) оправдывается тем, что при моделировании конкретного процесса невозможно измерять некоторые характеристики (состояния) в характерной точке, а известно некоторое среднее (интегральное) значение характеристики [5].

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций:

I. Пусть функции $f(t,s,y,p,q,u)$ и $F(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s)\in Q$ непрерывны по переменным $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$, а при каждом фиксированном $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$, измеримы по $(t,s)\in Q$.

II. Предполагается, что функция $f(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s)\in Q$ и для любого $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ имеет непрерывные производные по $(y,p,q)\in R^{3n}$. При этом имеют место:

$$f\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q).$$

III. Пусть для функции $f(t,s,y,p,q,u)$ имеет место

$$f(t,s,0,0,0,0)\in L_2(Q).$$

IV. Функция $f(t,s,y,p,q,u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,p,q,u)\in R^{3n}$, т. е.

$$\left|f\left(t,s,y,p,q,u\right)-f\left(t,s,\overline{y},\overline{p},\overline{q},\overline{u}\right)\right|\le k(\left|y-\overline{y}\right|+\left|p-\overline{p}\right|+\left|q-\overline{q}\right|+\left|u-\overline{u}\right|),$$

для всех $\left(y,p,q,u\right),\left(\overline{y},\overline{p},\overline{q},\overline{u}\right)\in R^{3n}\times R^{r}$.

V. Функция $\varphi\left(t,y,v\right)$ для почти всех $t\in\left[0,T\right]$ непрерывна по $\left(y,v\right)\in R^{n}\times R^{m}$ и измерима по $t\in\left[0,T\right]$ при каждом фиксированном $\left(y,v\right)\in R^{n}\times R^{r}$.

VI. Функция $\varphi\left(t,y,v\right)$ для почти всех $t\in\left[0,T\right]$ и для любого $\left(y,v\right)\in R^{n}\times R^{r}$ имеет непрерывные производные по y и при этом

$$\varphi\left(\cdot,y\left(t,0\right),v\left(t\right)\right):C\left(\left[0,T\right]\right)\times V\to L_{2}\left(\left[0,T\right]\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\cdot,y\left(t,0\right),v\left(t\right)\right):C\left(\left[0,T\right]\right)\times V\to L_{\infty}\left(\left[0,T\right]\right).$$

VII. Пусть для функции $\varphi\left(t,y,v\right)$ имеет место

$$\varphi\left(t,0,0\right)\in L_{2}\left(\left[0,T\right]\right).$$

VIII. Функция $\varphi\left(t,y,v\right)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,v)\in R^{n}\times R^{m}$, т.е.

$$\left|\varphi\left(t,y,v\right)-\varphi\left(t,\overline{y},\overline{v}\right)\right|\le L(\left|y-\overline{y}\right|+\left|v-\overline{v}\right|),$$

для всех $\left(t,y,v\right)$ и $\left(t,\overline{y},\overline{v}\right)\in\left[0,T\right]\times R^{n}\times R^{m}$.

IX. Пусть функция $\psi\left(s,y,\omega\right)$ для почти всех $s\in\left[0,l\right]$ непрерывна по $\left(y,\omega\right)\in R^{n}\times R^{q}$.

X. Функция $\psi\left(s,y,\omega\right)$ для почти всех $s\in\left[0,l\right]$ и для любого $\left(y,\omega\right)\in R^{n}\times R^{q}$ имеет непрерывные производные по y и при этом

$$\psi\left(\cdot,y\left(0,s\right),\omega\left(s\right)\right):C\left(\left[0,l\right]\right)\times\Omega\to L_{2}\left(\left[0,l\right]\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\cdot,y\left(0,s\right),\omega\left(s\right)\right):C\left(\left[0,l\right]\right)\times\Omega\to L_{\infty}\left(\left[0,l\right]\right).$$

XI. Пусть $\psi\left(s,0,0\right)\in L_{2}\left(\left[0,l\right]\right)$.

XII. Функция $\psi\left(s,y,\omega\right)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,\omega)\in R^{n}\times R^{q}$, т.е.

$$\left|\psi\left(s,y,\omega\right)-\psi\left(s,\overline{y},\overline{\omega}\right)\right|\le N(\left|y-\overline{y}\right|+\left|\omega-\overline{\omega}\right|),$$

для всех $\left(s,y,\omega\right)$ и $\left(s,\overline{y},\overline{\omega}\right)\in\left[0,l\right]\times R^{n}\times R^{q}$.

XIII. $n(t)$ матрица функция порядка $n \times n$ и $n_{ij}(t) \in L_\infty([0,T])$, $i,j=\overline{1,n}$. Предполагается, что $\tilde{n}(T)=\int_0^T n(t)\,dt$ невырожденная матрица и, кроме того, $LT\left(1+\left|\tilde{n}^{-1}(T)\right|\cdot\left|n(t)\right|_{L_\infty}\frac{T}{2}\right)<1$.

XIV. Функция $\Phi(y)$ для любого $y \in R^n$ имеет непрерывные производные.

XV. Пусть скалярная функция $F(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s)\in Q$ и для любого $(y,p,q,u) \in R^{3n}\times R^r$ непрерывна по $y,p,q,u \in R^{3n}\times R^r$, а при фиксированном $y,p,q,u \in R^{3n}\times R^r$ имеет непрерывные производные по (y,p,q,u) и

$$F\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right): H_2^1(Q)\times U \to L_1(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right): H_2^1(Q)\times U \to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right): H_2^1(Q)\times U \to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right): H_2^1(Q)\times U \to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right): H_2^1(Q)\times U \to L_2(Q).$$

Формула приращения функционала. Пусть $w=(v,\omega,u)$ и $w+\overline{w}=(v+\overline{v},\omega+\overline{\omega},u+\overline{u})$ два допустимых управления, т.е. w и $w+\overline{w}\in W=V\times\Omega\times U$. Решение задачи (1)-(4), соответствующее этим управлениям обозначим через $y(t,s)=y(t,s;w)$ и $y(t,s)+\overline{y}(t,s)=$ $=y(t,s;w+\overline{w})$. Тогда согласно (6) для приращения функционала получается следующая формула:

$$J(w+\overline{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi\left(y(t_i,s_i)+\overline{y}(t_i,s_i)\right)-\Phi\left(y(t_i,s_i)\right)\right]+$$

$$+\iint_Q \Bigg[F\left(t,s,y(t,s)+\bar{y}(t,s),\ \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}+\frac{\partial \bar{y}(t,s)}{\partial t},\right.$$
$$\left. \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}+\frac{\partial \bar{y}(t,s)}{\partial s},\ u(t,s)+\bar{u}(t,s)\right)- \tag{7}$$
$$-F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right) \Bigg] dtds\ ,$$

где $\bar{y}(t,s)$ является решением следующей системы:

$$\frac{\partial^2 \bar{y}(t,s)}{\partial t \partial s}=f\left(t,s,y(t,s)+\bar{y}(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}+\frac{\partial \bar{y}(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}+\frac{\partial \bar{y}(t,s)}{\partial s},\right.$$
$$\left. u(t,s)+\bar{u}(t,s)\right)-f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right),\ \text{п. в. } (t,s)\in Q \tag{8}$$

с начально-краевыми условиями

$$\frac{\partial \bar{y}(t,0)}{\partial t}=\varphi\big(t,y(t,0)+\bar{y}(t,0),v(t)+\bar{v}(t)\big)-$$
$$-\varphi\big(t,y(t,0),v(t)\big),\ \text{п. в. } t\in[0,T], \tag{9}$$

$$\frac{\partial \bar{y}(0,s)}{\partial s}=\psi\big(s,y(0,s)+\bar{y}(0,s),\omega(s)-\bar{\omega}(s)\big)-$$
$$-\psi\big(s,y(0,s),\omega(s)\big),\ \text{п. в. } s\in[0,l], \tag{10}$$

$$\int_0^T n(t)\,\bar{y}(t,0)\,dt=0. \tag{11}$$

Для дальнейшего упрощения математических формул введем обозначения:

$$\tilde{H}(t,s)=\ H(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s))\ ,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t,s)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s))\ \text{ и т.д.}$$

Введем систему уравнений в вариациях:

$$\frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial t \partial s}=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t,s)\,z(t,s)+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p}(t,s)\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)+$$
$$+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}(t,s)\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}(t,s)\,\bar{u}(t,s),\ \text{п. в. } (t,s)\in Q, \tag{12}$$

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}(t)z(t)+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial v}(t)\bar{v}(t),\ \text{п. в. } t\in[0,T], \tag{13}$$

$$\frac{\partial z(0,s)}{\partial s}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}(s)z(s)+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \omega}(s)\bar{\omega}(s),\ \text{п. в. } s\in[0,l], \tag{14}$$

$$\int_0^T n(t)z(t,0)\,dt=0. \tag{15}$$

С помощью решений системы вариационных уравнений (12)-(15) формулу приращения функционала (7) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
J(w+\bar{w})-J(w)&=\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i),z(t_i,s_i)\big)\right\rangle+\\
&+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}(t,s),z(t,s)\right\rangle dtds+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}(t,s),\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)\right\rangle dtds+\\
&+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial q}(t,s),\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\right\rangle dtds+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u}(t,s),\bar{u}(t,s)\right\rangle dtds+\\
&+\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi\big(y(t_i,s_i)+\bar{y}(t_i,s_i)\big)-\Phi\big(y(t_i,s_i)\big)-\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i),\bar{y}(t_i,s_i)\big)\right\rangle\right]+\\
&+\iint_Q\Bigg[F\Bigg(t,s,y(t,s)+\bar{y}(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s)+\frac{\partial\bar{y}}{\partial t}(t,s),\\
&\qquad\frac{\partial y}{\partial s}(t,s)+\frac{\partial\bar{y}}{\partial s}(t,s),u(t,s)+\bar{u}(t,s)\Bigg)-\\
&-\tilde{F}(t,s)-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}(t,s),\bar{y}(t,s)\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}(t,s),\frac{\partial\bar{y}}{\partial t}(t,s)\right\rangle-\\
&-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial q}(t,s),\frac{\partial\bar{y}}{\partial s}(t,s)\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u}(t,s),\bar{u}(t,s)\right\rangle\Bigg]dtds+\\
&+\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i)\big),\bar{y}(t_i,s_i)-z(t_i,s_i)\right\rangle+\iint_Q\Bigg[\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}(t,s),\bar{y}(t,s)-z(t,s)\right\rangle+\\
&+\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}(t,s),\frac{\partial\bar{y}}{\partial t}(t,s)-\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial q}(t,s),\frac{\partial\bar{y}}{\partial s}(t,s)-\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\right\rangle\Bigg]dtds.
\end{aligned} \tag{16}$$

Равенство (12) умножим скалярно на функцию $\psi(t,s)$, (13) скалярно умножим на $\mu(t)$, (14) умножим скалярно на $\eta(s)$, а (15) умножим на постоянный вектор λ и полученные равенства, соответственно, интегрируем на прямоугольнике Q и отрезках $[0,T]$ и $[0,l]$, и полученные сложим с (16) и введем систему сопряженных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i)\big)-\iint_Q\frac{\partial\tilde{H}}{\partial y}(t,s)dtds-$$
$$-\int_0^T\frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^1(t)dt-\int_0^l\frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^2(s)ds+\big(\tilde{n}(T)\big)'\lambda=0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}\chi(t-t_i)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i)\big)-\int_0^l\int_t^T\frac{\partial\tilde{H}}{\partial y}(\tau,s)d\tau ds-$$
$$-\int_0^l\frac{\partial}{\partial p}\tilde{H}(t,s)ds-\int_t^T\frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^1(\tau)d\tau+\left(\int_t^T n(\tau)d\tau\right)'\lambda+\mu(t)=0, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}\chi(s-s_i)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i)\big)-\int_0^T\int_s^l\frac{\partial\tilde{H}}{\partial y}(t,r)dr-$$
$$-\int_0^T\frac{\partial}{\partial q}\tilde{H}(t,s)dt-\int_s^l\frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^2(r)dr+\eta(s)=0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}\chi(t-t_i)\chi(s-s_i)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(y(t_i,s_i)\big)-\int_t^T\int_s^l\frac{\partial\tilde{H}}{\partial y}(\tau,r)d\tau dr-$$
$$-\int_s^l\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p}(t,r)dr-\int_t^T\frac{\partial}{\partial q}\tilde{H}(\tau,s)d\tau+\psi(t,s)=0, \tag{20}$$

где $\tilde{H}(t,s)=\big\langle\psi(t,s),\tilde{f}(t,s)\big\rangle-\tilde{F}(t,s)$, $\tilde{H}^1(t)=\big\langle\mu(t),\tilde{\phi}(t)\big\rangle$, $\tilde{H}^2(s)=$ $=\big\langle\eta(s),\tilde{\psi}(s)\big\rangle$, $\chi(t)$ – функция Хевисайда, E – единичная матрица.

В результате имеем следующее равенство:

$$J(w+\overline{w})-J(w)=-\iint_Q\left\langle\frac{\partial}{\partial u}\tilde{H}(t,s),\overline{u}(t,s)\right\rangle dtds-$$
$$-\int_0^T\left\langle\frac{\partial}{\partial v}\tilde{H}^1(t),\overline{v}(t)\right\rangle dt-\int_0^l\left\langle\frac{\partial}{\partial\omega}\tilde{H}^2(s),\overline{\omega}(s)\right\rangle ds+R, \tag{21}$$

где R – остаточная формула приращения функционала, определяется равенством

$$R=\sum_{i=1}^{k}\Big[\Phi\big(y(t_i,s_i)+\overline{y}(t_i,s_i)\big)-\Phi\big(y(t_i,s_i)\big)-$$

$$-\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}\left(y\left(t_i,s_i\right)\right),\overline{y}\left(t_i,s_i\right)\right\rangle\Bigg] + \sum_{i=1}^{k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}\left(y\left(t_i,s_i\right)\right),\overline{y}\left(t_i,s_i\right)-z\left(t_i,s_i\right)\right\rangle +$$

$$+\iint_Q \Bigg[F\Bigg(t,s,y\left(t,s\right)+\overline{y}\left(t,s\right),\frac{\partial y}{\partial t}\left(t,s\right)+\frac{\partial \overline{y}}{\partial t}\left(t,s\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}\left(t,s\right)+\frac{\partial \overline{y}}{\partial s}\left(t,s\right),u\left(t,s\right)+\overline{u}\left(t,s\right)\Bigg)-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}\left(t,s\right),\frac{\partial \overline{y}}{\partial s}\left(t,s\right)\right\rangle - \qquad (22)$$

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}\left(t,s\right),\overline{u}\left(t,s\right)\right\rangle\Bigg]dtds + \iint_Q \Bigg[\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}\left(t,s\right),\overline{y}\left(t,s\right)-z\left(t,s\right)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial p}\left(t,s\right),\frac{\partial \overline{y}}{\partial t}\left(t,s\right)-\frac{\partial z}{\partial t}\left(t,s\right)\right\rangle+\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}\left(t,s\right),\frac{\partial \overline{y}}{\partial s}\left(t,s\right)-\frac{\partial z}{\partial s}\left(t,s\right)\right\rangle\Bigg]dtds.$$

Градиент в задаче оптимального управления. Введем следующие условия:

XVI. Пусть функция $f\left(t,s,y,p,q,u\right)$ удовлетворяет условию

$$\Big| f\left(t,s,y+\overline{y},p+\overline{p},q+\overline{q},u+\overline{u}\right)-\tilde{f}\left(t,s\right)-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,s\right)\overline{y}-\frac{\partial f}{\partial p}\left(t,s\right)\overline{p}-\frac{\partial f}{\partial q}\left(t,s\right)\overline{q}-\frac{\partial f}{\partial u}\left(t,s\right)\overline{u}\Big| \le$$

$$\le \overline{k}\left(\left|\overline{y}\right|^2+\left|\overline{p}\right|^2+\left|\overline{q}\right|^2+\left|\overline{u}\right|^2\right).$$

XVII. Пусть функция $\varphi\left(t,y,v\right)$ удовлетворяет условию

$$\left|\varphi\left(t,y+\overline{y},v+\overline{v}\right)-\tilde{\varphi}\left(t\right)-\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\varphi}\left(t\right)\overline{y}-\frac{\partial}{\partial v}\tilde{\varphi}\left(t\right)\overline{v}\right| \le \overline{L}\left(\left|\overline{y}\right|^2+\left|\overline{v}\right|^2\right).$$

XVIII. Пусть функция $\psi\left(s,y,\omega\right)$ удовлетворяет условию

$$\left|\psi\left(s,y+\overline{y},\omega+\overline{\omega}\right)-\psi\left(s,y,\omega\right)-\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(s,y,\omega\right)\overline{y}-\frac{\partial}{\partial \omega}\psi\left(s,y,\omega\right)\overline{\omega}\right| \le \overline{N}\left(\left|\overline{y}\right|^2+\left|\overline{\omega}\right|^2\right).$$

XIX. Пусть функция $\Phi(y)$ удовлетворяет условию

$$\left|\ \Phi(y+\overline{y})-\Phi(y)-\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y),\overline{y}\right\rangle\ \right| \le M\left|y-\overline{y}\right|^2 .$$

XX. Пусть функция $F\left(t,s,y,p,q,u\right)$ удовлетворяет условию

$$\Bigg|F(t,s,y+\overline{y},p+\overline{p},q+\overline{q},u+\overline{u})-\tilde{F}(t,s)-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}(t,s)}{\partial y},\overline{y}\right\rangle-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}(t,s)}{\partial p},\overline{p}\right\rangle-$$

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}(t,s)}{\partial q}, \bar{q} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{F}(t,s)}{\partial u}, \bar{u} \right\rangle \Bigg| \le \bar{M}\left(|\bar{y}|^2 + |\bar{p}|^2 + |\bar{q}|^2 + |\bar{u}|^2\right),$$

для всех (y,v), $(y+\bar{y}, v+\bar{v}) \in R^n \times R^m$, (y,ω), $(y+\bar{y}, \omega+\bar{\omega}) \in$ $\in R^n \times R^q$, (y,p,q,u), $(y+\bar{y}, p+\bar{p}, q+\bar{q}, u+\bar{u}) \in R^{3n} \times R^r$.

Для вычисления градиента функционала (6) при ограничениях (1)-(5) достаточно показать, что остаточная формула функционала (21) имеет порядок $O\left(\|\bar{w}\|^2\right)$. Используя условия I-XIII можно доказать, что существуют неотрицательные числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ такие, как

$$\max_{[0,T]} \left|\bar{y}(t,0) - z(t,0)\right| \le \sigma_1 \|\bar{v}\|^2, \tag{23}$$

$$\max_{[0,l]} \left|\bar{y}(0,s) - z(0,s)\right| \le \sigma_2 \left(\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{\omega}\|^2\right), \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\max_{Q} \left|\bar{y}(t,s) - z(t,s)\right| + \underset{[0,l]}{vrai\max} \int_0^T \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{y}(t,s) - z(t,s)\right)\right| dt + \\ + \underset{[0,T]}{vrai\max} \int_0^l \left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{y}(t,s) - z(t,s)\right)\right| ds \le \sigma_3 \left[\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{\omega}\|^2\right].\end{gathered} \tag{25}$$

Учитывая оценки (23)-(25) а также условия XIV-XX из (22) можно получить оценку $|R| \le C\|\bar{w}\|^2$, где C – некоторая постоянная, которая не зависит от управляющих параметров.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия I-XX. Тогда функционал (6) при ограничениях (1)-(5) дифференцируем и его градиент имеет вид:

$$J'(w) = -\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(t,s), \frac{\partial \tilde{H}^1}{\partial v}(t), \frac{\partial \tilde{H}^2}{\partial \omega}(s)\right) \in L_2^r(Q) \times L_2^m([0,T]) \times L_2^q([0,l]).$$

Необходимое условие оптимальности. Имея формулы градиента для функционала (6) при ограничениях (1)-(5), можно получить необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления (1)-(6).

Теорема 2. Пусть $w_* = \left(u_*(t,s), v_*(t), \omega_*(s)\right) \in W$ оптимальное управление в задаче (1)-(6). Тогда имеет место неравенство

$$\iint_Q \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}\left(t,s,y(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*), \psi(t,s;w_*), u_*(t,s)\right), \right.$$

$$\bar{u}(t,s)\Big\rangle dtds + \int_0^T \left\langle \frac{\partial H^1}{\partial v}\big(t, y(t,0;w_*), \mu(t;w_*), v_*(t)\big), \bar{v}(t) \right\rangle dt +$$

$$+\int_0^l \left\langle \frac{\partial H^2}{\partial \omega}\big(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)\big), \bar{\omega}(s) \right\rangle ds \le 0,$$

где $y(t,s;w_*)$ решение краевой задачи (1)-(6) при $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in$ $\in W = U \times V \times \Omega,$ а тройка $\big(\psi(t,s;w_*), \mu(t;w_*), \eta(s;w_*)\big)$ – решение сопряженной системы (17)-(20), соответствующей управлению $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in W.$ Если $w_* \in \operatorname{int} W$, то последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(t, s, y(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*), \psi(t,s;w_*), u_*(t,s)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial H^1}{\partial v}\big(t, y(t,0;w_*), \mu(t;w_*), v_*(t)\big) = 0,$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial \omega}\big(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)\big) = 0.$$

Доказательство проводится с помощью схемы из [20, с. 524].

Список использованной литературы:

1. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А. М. Нахушев. – М. : Наука, 2006. – 287 с.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М. : Высшая школа, 1995. – 305 с.
3. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных / З. А. Нахушева // Дифференциальные уравнения. — 1986. – Т. 22, №1. – С. 171–174.
4. Галахов М. А. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения / М. А. Галахов, П. П. Усов. – М. : Наука, 1990. – 280 с.
5. Жестков С. В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями / С. В. Жестков // Укр. мат. журнал. – 1990. – Т. 42, №1. – С. 132–135.
6. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т.40, №7. – С. 887–892.
7. Пулькина Л. С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. – 2000. – № 2. – С. 279–280.
8. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике / Л. С. Пулькина, О. М. Кечина // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – 2009. – № 2(68). – С. 80–88.

9. Голубева Н. Д. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями / Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, №3. – С. 456–458.
10. Pulkina L. S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations / L. S. Pulkina // Electron. J. Differential Equations. – 1999 (1999). – № 45. – P. 1–6.
11. Beilin S. A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions / S. A. Beilin // Electron. J. Differential Equations. – 2001 (2001). – № 76. – P. 1–8.
12. Mesloub S. On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition / S. Mesloub and A. Bouziani // Int. J. Math. Math. Sci. – 22 (1999), № 3. – P. 511–519.
13. Bouziani A. Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation / A. Bouziani // Int. J. Math. Math. Sci. – 30 (2002). – № 6. – P. 327–338.
14. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition / A. Bouziani // Int. J. Math. Sci. – 31(2002). – № 4. – P. 202–213.
15. Ибиев Ф. Т. Об одной задаче оптимального управления для систем Гурса с интегральными условиями / Ф. Т. Ибиев, Я. А. Шарифов // Известия НАН Азербайджана. – Серия физико-математических и технических наук. – Т. XXIV. – №2. – 2005. – С. 83–85.
16. Ибиев Ф. Т. Необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления системами Гурса с интегральными условиями / Ф. Т. Ибиев, Я. А. Шарифов // Вестник Бакинского Университета. – 2004. – №3. – С. 13–20.
17. Ibiev F. T. Necessary conditions for optimality in problems of optimal control by the Goursat systems with multipoint boundary conditions / F. T. Ibiev, Ya. A. Sharifov // Transactions issue mathematics and mechanics. – Series of physical-technical and mathematical sciences. – 2004. – V. XXIV. – №7. – P. 227–234.
18. Шарифов Я. А. Градиент в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями / Я. А. Шарифов, Т. В. Ширинов // Известия НАН Азербайджана. – Серия физико-математических и технических наук. – 2005. – Т. XXV. – № 2. – С. 111–116.
19. Ширинов Т. В. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями / Т. В. Ширинов, М. Ф. Мехтиев, Я. А. Шарифов // Доклады НАН Азербайджана. – 2005. – Т. LXI. – №2. – С. 22–29.
20. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал, 2002. – 823 с.

In this work there is considered an optimal control problem for Goursat-Darboux systems with integral boundary conditions. The explicit form of the gradient is found on the basis of the formula of the functional increment and the necessary conditions of optimality are derived.

Key words: *optimal control, Goursat-Darboux system, increment formula, a gradient of functional, non-local conditions.*

Отримано: 13.05.2010