УДК 517.91:532.26

Т. М. Пилипюк, викладач

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА–БЕССЕЛЯ–ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра–Бесселя–Фур'є на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, функції впливу, спектральна функція, спектральна щільність, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботі [1]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в роботі [2]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП із спектральним параметром в умовах спряження.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r: \ r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\upsilon,\alpha} + \theta(r - R_2)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \quad (1)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [4]; $a_j^2 > 0, j = \overline{1,3}$.

У рівності (1) $\dfrac{d^2}{dr^2}$ — диференціальний оператор Фур'є, $\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{d^2}{dr^2} + cthr\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_1^2}{1 - chr} + \dfrac{\mu_2^2}{1 + chr}\right)$ — узагальнений диференціальний оператор Лежандра [5], $B_{\upsilon,\alpha} = d^2\big/dr^2 + \frac{2\alpha+1}{r}d\big/dr - \frac{\upsilon^2-\alpha^2}{r^2}$ — узагальнений диференціальний оператор Бесселя [6]; $\upsilon \ge \alpha > -1\big/2$, $\mu_1 \ge \mu_2$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \left\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\upsilon,\alpha}[g_2(r)]; g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right)g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r\,=\,R_k} = 0, \quad j,k = 1,2; \quad (2)$$

3) існують такі числа γ_1 та γ_2, що справджуються умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma_1} g_1(r)\right] = 0, \ \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma_2} g_3(r)\right] = 0. \quad (3)$$

У рівностях (2) беруть участь величини

$$\tilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - \delta_{jm}^k(\beta^2+\gamma^2), \ \tilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - \gamma_{jm}^k(\beta^2+\gamma^2); \ \gamma^2 \ge 0.$$

В подальшому будемо припускати виконання умов на коефіцієнти:

$$\alpha_{jm}^k \ge 0, \ \beta_{jm}^k \ge 0, \ \delta_{jm}^k \ge 0, \ \gamma_{jm}^k \ge 0, \ c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0,$$

$$c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k; \ c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0;$$

$$\alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k\delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k\delta_{1j}^k; \quad j,m,k = 1,2.$$

Введемо до розгляду числа

$$\tilde{a}_{11}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\alpha}_{12}^k, \ \tilde{a}_{21}^k = \tilde{\beta}_{11}^k\tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k\tilde{\alpha}_{12}^k,$$

$$\tilde{a}_{12}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\beta}_{12}^k, \ \tilde{a}_{22}^k = \tilde{\beta}_{11}^k\tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k\tilde{\beta}_{12}^k.$$

Безпосередньо встановлюємо, що

$$\tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\beta}_{21}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\beta}_{11}^k = -c_{11,k}, \ \tilde{\alpha}_{12}^k\tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{22}^k\tilde{\beta}_{12}^k = -c_{21,k};$$

$$\tilde{a}_{22}^k\tilde{a}_{11}^k - \tilde{a}_{12}^k\tilde{a}_{21}^k = c_{11,k} \cdot c_{21,k}.$$

Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ внаслідок умов спряження встановлюємо базову тотожність:

$$\left[u_k(r)v'_k(r) - u'_k(r)v_k(r)\right]\Big|_{r=R_k} =$$
$$= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r) - u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}. \tag{4}$$

Визначимо величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{a_1^{-2}}{shR_1}, \ \ \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{a_2^{-2}}{R_2^{2\alpha+1}}, \ \ \sigma_3 = a_3^{-2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 shr + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha+1} + \theta(r - R_2)\sigma_3 \tag{5}$$

та скалярний добуток

$$\left(u(r), v(r)\right) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr + \int_{R_2}^\infty u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr. \tag{6}$$

Методом інтегрування два рази частинами під знаком інтегралів з використанням базової тотожності та структури $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ одержуємо, що

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u], v(r)\right) = \left(u(r), M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v]\right). \tag{7}$$

Рівність (7) означає, що ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ є самоспряженим. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) +$$
$$+\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta(r - R_2)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)$$

При цьому функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \ r \in (0, R_1),$$
$$\left(B_{\upsilon,\alpha} + b_2^2\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \ r \in (R_1, R_2), \tag{8}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \ r \in (R_2, \infty),$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3); $b_j^2 = a_j^{-2}(\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = P_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2 = L_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_1^* = -1/2 + ib_1(\beta)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(B_{\upsilon,\alpha} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції Бесселя $v_1 = J_{\upsilon,\alpha}(b_2 r)$ та $v_2 = N_{\upsilon,\alpha}(b_2 r)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 + b_3^2)v = 0$ складають тригонометричні функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [4].

Якщо в силу лінійності задачі (8), (2), (3) покласти

$$
\begin{gathered}
V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 P_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr) + B_1 L_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr), \quad r \in (0, R_1), \\
V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 J_{\upsilon,\alpha}(b_2 r) + B_2 N_{\upsilon,\alpha}(b_2 r), \quad r \in (R_1, R_2), \\
V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r, \quad r \in (R_2, \infty),
\end{gathered} \tag{9}
$$

то умова обмеження в точці $r = 0$ вимагає, щоб $B_1 = 0$. Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$
\begin{gathered}
u_{\upsilon,\alpha;j2}^{11}(b_2 R_1)A_2 + u_{\upsilon,\alpha;j2}^{12}(b_2 R_1)B_2 = Z_{\alpha_1^*;j1}^{11}(chR_1)A_1, \\
u_{\upsilon,\alpha;j1}^{21}(b_2 R_2)A_2 + u_{\upsilon,\alpha;j1}^{22}(b_2 R_2)B_2 - v_{j2}^{21}(b_3 R_2)A_3 - v_{j2}^{22}(b_3 R_2)B_3 = 0, \\
j = 1, 2.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Алгебраїчна система (10) завжди сумісна [7]. Вважаючи $A_1 \neq 0$ довільним, з перших двох рівнянь системи (10) знаходимо, що

$$
\begin{gathered}
A_2 = A_1[q_\alpha(\beta)]^{-1}\Big[Z_{\upsilon_1^*;11}^{(\mu),11}(chR_1)u_{\upsilon,\alpha;22}^{12}(b_2 R_1) - \\
-Z_{\upsilon_1^*;21}^{(\mu),11}(chR_1)u_{\upsilon,\alpha;12}^{12}(b_2 R_1)\Big],
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
B_2 = A_1[q_\alpha(\beta)]^{-1}\left[Z_{\upsilon_1^*;21}^{(\mu),11}(chR_1)u_{\upsilon,\alpha;12}^{11}(b_2 R_1) - Z_{\upsilon_1^*;11}^{(\mu),11}(chR_1)u_{\upsilon,\alpha;22}^{11}(b_2 R_1)\right],
$$

$$
q_\alpha(\beta) = 2c_{21,1}\left(\pi b_2^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}\right)^{-1}.
$$

При визначених вже A_2, B_2 розглянемо систему стосовно A_3, B_3:

$$v_{j2}^{21}(b_3R_2)A_3 + v_{j2}^{22}(b_3R_2)B_3 = u_{\upsilon,\alpha;j1}^{21}(b_2R_2)A_2 + u_{\upsilon,\alpha;j1}^{22}(b_2R_2)B_2 \equiv$$
$$\equiv A_1[q_\alpha(\beta)]^{-1}a_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta), \quad j=1,2.$$

Звідси знаходимо за правилами Крамера [7], що

$$A_3 = \omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta),\ B_3 = -\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta), A_1 = q_\alpha(\beta)c_{21,2}b_3(\beta),$$
$$\omega_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = a_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)v_{22}^{2j}(b_3R_2) - a_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)v_{12}^{2j}(b_3R_2),\ j=1,2. \tag{12}$$

Підставивши визначені величини A_2, B_2 згідно формул (11) та A_1, A_3, B_3 згідно формул (12) у рівності (9), маємо функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ (компоненти вектор-функції $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)$):

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = c_{21,2}b_3(\beta)q_\alpha(\beta)P_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr),$$
$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = c_{21,2}b_3(\beta)\Big[Z_{\upsilon_1^*;21}^{(\mu),11}(chR_1)\psi_{\upsilon,\alpha;12}^{1}(b_2R_1,b_2r) -$$
$$-Z_{\upsilon_1^*;11}^{(\mu),11}(chR_1)\psi_{\upsilon,\alpha;22}^{1}(b_2R_1,b_2r)\Big], \tag{13}$$
$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = \omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)\cos b_3r - \omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)\sin b_3r.$$

У рівностях (10)–(13) беруть участь функції:

$$Z_{\upsilon_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1) = \left(\tilde{\alpha}_{j1}^1\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^1\right)P_{\upsilon_1^*}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_1};$$

$$u_{\upsilon,\alpha;jk}^{m1}(b_2R_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^m\frac{\upsilon-\alpha}{R_m} + \tilde{\beta}_{jk}^m\right)J_{\upsilon,\alpha}(b_2R_m) - \tilde{\alpha}_{jk}^m b_2^2R_mJ_{\upsilon+1,\alpha+1}(b_2R_m),$$

$$u_{\upsilon,\alpha;jk}^{m2}(b_2R_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^m\frac{\upsilon-\alpha}{R_m} + \tilde{\beta}_{jk}^m\right)N_{\upsilon,\alpha}(b_2R_m) - \tilde{\alpha}_{jk}^m b_2^2R_mN_{\upsilon+1,\alpha+1}(b_2R_m),$$

$$\delta_{\upsilon,\alpha;jk}(b_2R_1,b_2R_2) = u_{\upsilon,\alpha;j2}^{11}(b_2R_1)u_{\upsilon,\alpha;k1}^{22}(b_2R_2) - u_{\upsilon,\alpha;j2}^{12}(b_2R_1)u_{\upsilon,\alpha;k1}^{21}(b_2R_2),$$

$$a_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = Z_{\upsilon_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\upsilon,\alpha;1j}(b_2R_1,b_2R_2) - Z_{\upsilon_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\upsilon,\alpha;2j}(b_2R_1,b_2R_2),$$

$$\psi_{\upsilon,\alpha;j2}^{1}(b_2R_1,b_2r) = u_{\upsilon,\alpha;j2}^{11}(b_2R_1)N_{\upsilon,\alpha}(b_2r) - u_{\upsilon,\alpha;j2}^{12}(b_2R_1)J_{\upsilon,\alpha}(b_2r);$$

$$v_{j2}^{21}(b_3R_2) = \left(\tilde{\alpha}_{j2}^2\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^2\right)\cos b_3r\Big|_{r=R_2} = -\tilde{\alpha}_{j2}^2b_3\sin b_3R_2 + \tilde{\beta}_{j2}^2\cos b_3R_2,$$

$$v_{j2}^{22}(b_3R_2) = \left(\tilde{\alpha}_{j2}^2\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^2\right)\sin b_3r\Big|_{r=R_2} = \tilde{\alpha}_{j2}^2b_3\cos b_3R_2 + \tilde{\beta}_{j2}^2\sin b_3R_2.$$

Введемо до розгляду спектральну щільність

$$\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}\left(\left[\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}. \qquad (14)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)$ дозволяє запровадити пряме $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (1) [8]: для $g(r) \in G$

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \qquad (15)$$

$$H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \qquad (16)$$

Математичним обґрунтуванням формул (15), (16) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r) = \left[\theta(r)\theta(R_1 - r)\sqrt{shr} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)r^{\alpha+1/2} + \theta(r - R_2)\cdot 1\right]g(r),$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\rho)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta. \qquad (17)$$

Доведення теореми виконаємо методом дельта-подібної послідовності — ядро Коші: фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу [9], породженої ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \left\{(t,r): \ t \in (0,\infty); \ r \in I_2^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2\Lambda_{(\mu)}[u_1] = 0, \quad r \in (0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\upsilon,\alpha}[u_2] = 0, \quad r \in (R_1,R_2), \qquad (18)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = 0, \quad r \in (R_2,\infty)$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in I_2^+, \quad j = \overline{1,3} \tag{19}$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r) - \left[\left(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k} = 0, \quad j,k = 1,2. \tag{20}$$

Нехай вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом стосовно t [10]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (18)-(20) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Бесселя та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = -\overline{g}_1(r),\ r \in (0,R_1),$$
$$\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -\overline{g}_2(r),\ r \in (R_1,R_2), \tag{21}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)u_3^*(p,r) = -\overline{g}_3(r),\ r \in (R_2,\infty)$$

з умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0, \tag{22}$$
$$j,k = 1,2.$$

У системі (21) $q_j = a_j^{-1}(p+\gamma_j)^{1/2}$, $u_j^*(p,r) = \int\limits_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt$, $\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p$, $\overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k p$, $\mathrm{Re}\, q_j > 0$, $\overline{g}_j = a_j^{-2} g_j(r)$.

Ми вважаємо, що числа

$$\psi_{jk} \equiv \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)] = 0.$$

Якщо це не так, то переходимо до нових початкових даних $\overline{g}_1 = g_1(r) - b_1$, $\overline{g}_2 = g_2(r) - (a_2 r + b_2)$, $\overline{g}_3 = g_3(r) - b_3$ і числа b_1, b_2, b_3 та a_2 знаходимо із системи

$$\left(\gamma_{j1}^k R_k + \delta_{j1}^k\right)a_k + \gamma_{j1}^k b_k - \left[\left(\gamma_{j2}^k R_k + \delta_{j2}^k\right)a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1}\right] = \psi_{jk},$$
$$a_1 = a_3 = 0.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2 = L_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_1 = -1/2 + q_1$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = I_{\upsilon,\alpha}(q_2 r)$ та $v_2 = K_{\upsilon,\alpha}(q_2 r)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2\big/dr^2 - q_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \exp[q_3(r - R_2)]$ та $v_2 = \exp[-q_3(r - R_2)]$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (21), (22) методом функцій Коші [3, 4]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr) + \int_0^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho) sh\rho d\rho ,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 I_{\upsilon,\alpha}(q_2 r) + B_2 K_{\upsilon,\alpha}(q_2 r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha+1} d\rho , \quad (23)$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho)\overline{g}_3(\rho) d\rho .$$

У рівностях (23) $E_j^*(p,r,\rho)$ — функції Коші [3,4]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0$$

$$\left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(r)} , \quad (24)$$

$$\varphi_1(\rho) = sh\rho,\ \varphi_2(\rho) = \rho^{2\alpha+1},\ \varphi_3(\rho) = 1 .$$

Безпосередньо можна переконатися, що за функції Коші можна взяти функції:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_1)}{Z_{\upsilon_1;11}^{(\mu),11}(chR_1)} \times$$

$$\times \begin{cases} P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr) F_{\upsilon_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho),\ 0 < r < \rho < R_1 \\ P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(ch\rho) F_{\upsilon_1;11}^{(\mu),1}(chR_1, chr),\ 0 < \rho < r < R_1 \end{cases} , \quad (25)$$

$$E_2^*(p,r,\rho)=\frac{q_2^{2\alpha}}{\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_1,q_2R_2)}\times$$
$$\times\begin{cases}\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;12}(q_2R_1,q_2r)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_2,q_2\rho), R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;12}(q_2R_1,q_2\rho)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_2,q_2r), R_1<\rho<r<R_2\end{cases} \quad (26)$$

$$E_3^*(p,r,\rho)=\frac{1}{q_3(\bar{\alpha}_{12}^2q_3-\bar{\beta}_{12}^2)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r),\ R_2<r<\rho<\infty\\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho),\ R_2<\rho<r<\infty\end{cases}. \quad (27)$$

У рівностях (25)–(27) беруть участь функції:

$$Z^{(\mu);11}_{\upsilon_1;j1}(chR_1)=\left(\bar{\alpha}^1_{j1}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^1_{j1}\right)P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(chr)\Big|_{r=R_1},$$

$$Z^{(\mu);12}_{\upsilon_1;j1}(chR_1)=\left(\bar{\alpha}^1_{j1}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^1_{j1}\right)L^{(\mu)}_{\upsilon_1}(chr)\Big|_{r=R_1},$$

$$F^{(\mu);1}_{\upsilon_1;11}(chR_1,chr)=Z^{(\mu);11}_{\upsilon_1;11}(chR_1)L^{(\mu)}_{\upsilon_1}(chr)-Z^{(\mu);12}_{\upsilon_1;11}(chR_1)P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(chr),$$

$$U^{m1}_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_m)=\left(\bar{\alpha}^m_{jk}\frac{\upsilon-\alpha}{R_m}+\bar{\beta}^m_{jk}\right)I_{\upsilon,\alpha}(q_2R_m)+\bar{\alpha}^m_{jk}q_2^2R_mI_{\upsilon+1,\alpha+1}(q_2R_m),$$

$$U^{m2}_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_m)=\left(\bar{\alpha}^m_{jk}\frac{\upsilon-\alpha}{R_m}+\bar{\beta}^m_{jk}\right)K_{\upsilon,\alpha}(q_2R_m)-\bar{\alpha}^m_{jk}q_2^2R_mK_{\upsilon+1,\alpha+1}(q_2R_m),$$

$$\Psi^{m*}_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_m,q_2r)=U^{m1}_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_m)K_{\upsilon,\alpha}(q_2r)-U^{m2}_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_m)I_{\upsilon,\alpha}(q_2r),$$

$$\Delta_{\upsilon,\alpha;jk}(q_2R_1,q_2R_2)=U^{11}_{\upsilon,\alpha;j2}(q_2R_1)U^{22}_{\upsilon,\alpha;k1}(q_2R_2)-$$
$$-U^{12}_{\upsilon,\alpha;j2}(q_2R_1)U^{21}_{\upsilon,\alpha;k1}(q_2R_2),\ j,k=1,2$$

$$\Phi^2_{j2}(q_3R_2,q_3r)=\bar{\alpha}^2_{j2}q_3chq_3(r-R_2)-\bar{\beta}^2_{j2}shq_3(r-R_2);\ j=1,2.$$

Умови спряження (22) для визначення величин A_1,A_2,B_2,B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned}&Z^{(\mu);11}_{\upsilon_1;j1}(chR_1)A_1-U^{11}_{\upsilon,\alpha;j2}(q_2R_1)A_2-U^{12}_{\upsilon,\alpha;j2}(q_2R_1)B_2=\delta_{j2}G^*_{12},\ j=1,2;\\ &U^{21}_{\upsilon,\alpha;j1}(q_2R_2)A_2+U^{22}_{\upsilon,\alpha;j1}(q_2R_2)B_2+\left(\bar{\alpha}^2_{j2}q_3-\bar{\beta}^2_{j2}\right)B_3=\delta_{j2}G^*_{23}.\end{aligned} \quad (28)$$

У системі (28) беруть участь функції

$$G^*_{12}=\frac{c^*_{11}(p)}{shR_1}\int_0^{R_1}\frac{P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(ch\rho)}{Z^{(\mu);11}_{\upsilon_1;11}(chR_1)}\bar{g}_1(\rho)sh\rho d\rho-$$
$$-\frac{c^*_{21}(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,$$

$$G_{23}^{*}=\frac{c_{12}^{*}(p)}{R_2^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{\upsilon,\alpha;12}^{1*}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{\upsilon,\alpha;11}(q_2R_1,q_2R_2)}\overline{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho-$$

$$-c_{22}^{*}(p)\int_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\overline{\alpha}_{12}^2q_3-\overline{\beta}_{12}^2}\overline{g}_3(\rho)d\rho,$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0$, $\delta_{22}=1$) [7].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(p)=Z_{\upsilon_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)\Delta_{\upsilon,\alpha;2j}(q_2R_1,q_2R_2)-Z_{\upsilon_1;21}^{(\mu);11}(chR_1)\Delta_{\upsilon,\alpha;1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{\upsilon,\alpha;j}(p)=\left(\overline{\alpha}_{12}^2q_3-\overline{\beta}_{12}^2\right)\Delta_{\upsilon,\alpha;j2}(q_2R_1,q_2R_2)-$$

$$-\left(\overline{\alpha}_{22}^2q_3-\overline{\beta}_{22}^2\right)\Delta_{\upsilon,\alpha;j1}(q_2R_1,q_2R_2),\ j=1,2,$$

$$\Theta_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,p)=Z_{\upsilon_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)\Psi_{\upsilon,\alpha;22}^{1*}(q_2R_1,q_2r)-$$

$$-Z_{\upsilon_1;21}^{(\mu);11}(chR_1)\Psi_{\upsilon,\alpha;12}^{1*}(q_2R_1,q_2r),$$

$$\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(r,p)=\left(\overline{\alpha}_{12}^2q_3-\overline{\beta}_{12}^2\right)\Psi_{\upsilon,\alpha;21}^{2*}(q_2R_2,q_2r)-$$

$$-\left(\overline{\alpha}_{22}^2q_3-\overline{\beta}_{22}^2\right)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{2*}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (21), (22): для $p=\sigma+is$ із $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтегралу Лапласа, та $\operatorname{Im}p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (28)

$$\begin{aligned}\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p)&\equiv Z_{\upsilon_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)B_{\upsilon,\alpha;2}(p)-Z_{\upsilon_1;21}^{(\mu);11}(chR_1)B_{\upsilon,\alpha;1}(p)=\\&=\left(\overline{\alpha}_{12}^2q_3-\overline{\beta}_{12}^2\right)A_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(p)-\left(\overline{\alpha}_{22}^2q_3-\overline{\beta}_{22}^2\right)A_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(p)\neq 0.\end{aligned}\tag{29}$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (21) функції впливу:

$$H_{\upsilon,\alpha;11}^{(\mu)*}(p,r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p)}\begin{cases}P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr)\Big[B_{\upsilon,\alpha;2}(p)F_{\upsilon_1;11}^{(\mu),1}(chR_1,ch\rho)-\\ \quad -B_{\upsilon,\alpha;1}(p)F_{\upsilon_1;21}^{(\mu),1}(chR_1,ch\rho)\Big],\ \ 0<r<\rho<R_1\\ P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(ch\rho)\Big[B_{\upsilon,\alpha;2}(p)F_{\upsilon_1;11}^{(\mu),1}(chR_1,chr)-\\ \quad -B_{\upsilon,\alpha;1}(p)F_{\upsilon_1;21}^{(\mu),1}(chR_1,chr)\Big],\ \ 0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$H_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu)*}(p,r,\rho)=\frac{c_{21}^{*}(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p)}P_{\upsilon_1}^{(\mu)}(chr)\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(\rho,p),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;13}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{21}(p)\overset{*}{c}_{22}(p)}{q_2^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(chr)e^{-q_3(\rho-R_2)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;21}(p,r,\rho) = \frac{\overset{*}{c}_{11}(p)}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(ch\rho)\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(r,p), \tag{30}$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;22}(p,r,\rho) = \frac{q_2^{2\alpha}}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(r,p)\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(\rho,p), & R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,p)\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(r,p), & R_1 < r < \rho < R_2\end{cases},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;23}(p,r,\rho) = -\overset{*}{c}_{22}(p)\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(r,p)e^{-q_3(\rho-R_2)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;31}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{11}(p)\overset{*}{c}_{12}(p)}{q_2^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(ch\rho)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;32}(p,r,\rho) = -\frac{\overset{*}{c}_{12}(p)}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,p)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;33}(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r) - \\ \qquad -A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)\Big], \quad R_2 < r < \rho < \infty \\ e^{-q_3(r-R_2)}\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho) - \\ \qquad -A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3\rho)\Big], \quad R_2 < \rho < r < \infty\end{cases}.$$

Підставивши визначені із алгебраїчної системи (28) величини A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (23), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (21), (22):

$$\begin{aligned} u_j^*(p,r) = &\int_0^{R_1} H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j1}(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)sh\rho d\rho + \\ &+\int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j2}(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho + \\ &+\int_{R_2}^{\infty} H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j3}(p,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)d\rho, \ j=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{31}$$

Повертаючись в (31) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (18)–(20):

$$u_j(t,r)=\int_0^{R_1} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)sh\rho d\rho\cdot a_1^{-2}+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho a_2^{-2}+ \tag{32}$$

$$+\int_{R_2}^{\infty} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)d\rho a_3^{-2},\ j=\overline{1,3}.$$

У рівностях (32) за означенням [10]

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;jk}(p,r,\rho)e^{pt}d\rho,\ j,k=\overline{1,3}. \tag{33}$$

Особливими точками функцій впливу $H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ $(j=\overline{1,3})$ та $p=\infty$. Метод контурного інтегралу в поєднанні з теоремою Коші та лемою Жордана [10] приводить формули (33) до розрахункових:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r,\rho)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left[H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;jk}\left(e^{i\pi}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho\right)\right]e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta; \tag{34}$$

$$j,k=\overline{1,3}.$$

Тут $\mathrm{Im}(\cdots)$ означає уявну частину виразу $(\cdots)$, $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$.

Виконавши зазначені у формулах (34) операції, знаходимо, що

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r,\rho)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2; \tag{35}$$

$$j,k=\overline{1,3}$$

Розв'язок (32) параболічної задачі (18)–(20) набуває вигляду:

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\times$$

$$\times\left(\int_0^{R_1}g_1(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\rho d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2\rho^{2\alpha+1}d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta+ \tag{36}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3 d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності та початкових умов (19) отримуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\rho d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta, \tag{37}$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2\rho^{2\alpha+1}d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta, \tag{38}$$

$$g_3(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3 d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta. \tag{39}$$

Якщо помножити рівність (37) на $\theta(r)\theta(R_1-r)$, рівність (38) — на $\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)$, а рівність (39) — на $\theta(r-R_2)$ і додати, то матимемо інтегральне зображення (17). **Теорему доведено.**

Зауваження 1. Якщо функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в точках розриву $g(r)$ треба замінити на $\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)]$.

В основі застосування запровадженого формулами (15), (16) ГІП знаходиться основна тотожність ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1 : c_{11,1},\quad d_2=a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha+1} : c_{11,2},$$

$$\tilde{g}_1(\beta)=\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 shr dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 dr,$$

$$Z_{\upsilon,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta) = \left(\overline{\alpha}_{i2}^k \, {}^{d}\!/_{dr} + \overline{\beta}_{i2}^k\right) V_{\upsilon,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}, \; i,k = 1,2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\upsilon,\alpha}[g_2(r)]; g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \qquad (40)$$

$$j,k = 1,2$$

та умови обмеження (3), то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]\right] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2 \tilde{g}_j(\beta) + \\ + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}\right]. \qquad (41)$$

Доведення тотожності (41) здійснюється за відомою схемою [8].

Зауваження 2. При $\delta_{jk}^m = 0$ та $\gamma_{jk}^m = 0$ маємо звичайне (класичне) гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра–Бесселя–Фур'є на полярній осі з двома точками спряження.

Висновок. Побудоване гібридне інтегральне перетворення поповнює множину ГІП із спектральним параметром та розширяє клас задач математичної фізики неоднорідних середовищ, інтегральне зображення точних аналітичних розв'язків яких можна одержати.

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93–106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера–Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.

6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 3).
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
8. Ленюк М. П. Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера–(Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.
9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
10. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

The method of delta-like sequences (Cauchy kernel) introduces hybrid integral transformation of Legendre–Bessel–Fourier series in polar axis with two point of interface with the assumption that the spectral parameter is involved in conjugation.

Key words: *hybrid differential operators, hybrid integral transform kernel Cauchy function of, spectral function, spectral density, the main identity.*

Отримано 16.08.10

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

ДО ПИТАННЯ ЗБІЖНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається питання застосування колокаційно-ітеративного методу до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Побудовано алгоритм методу, встановлено достатні умови його збіжності.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод.*

Вступ. Математичними моделями різноманітних задач природознавства та техніки, як відомо, є диференціальні, інтегральні чи інтегро-диференціальні рівняння та їх системи. В наш час привертають до себе увагу дослідження крайових задач з параметрами та з імпульсним впливом, узагальнені крайові задачі, інтегральні рівняння з обмеженнями. Різним аспектам теорії цих задач присвячені праці