

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
м. Чернівці

ПРОБЛЕМА СТІЙКОСТІ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботі розглянута проблема побудови імпульсної системи випадкової структури із постійним запізненням (СВСЗ) під впливом зовнішніх та внутрішніх марковських параметрів при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно. СВСЗ повинна володіти властивістю асимптотичної стійкості за ймовірністю та забезпечувати наперед задану оптимальність перехідного процесу.

Ключові слова: *стійкість, імпульсні динамічні системи, системи випадкової структури, марковський процес, постійне запізнення.*

Постановка задачі. Нехай [1], [2] на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ випадковий процес $x(t) \in R^m$ динамічної системи описується диференціальним рівнянням із постійним запізненням

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x_t)dt, \quad (1)$$

із зовнішніми імпульсними марковськими збуреннями

$$\Delta x(t) \Big|_{t=t_k} = g(t_k^-, \xi(t_k^-), x(t_k^-), \eta_k), \quad (2)$$

за початковими умовами

$$x_{t_0} = z_0 \in \mathbf{D}; \quad \xi(t_0) = y \in Y; \quad \eta_{k_0} = h \in H. \quad (3)$$

де $t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in N\}$, асимптотика розв'язку $x \equiv x(t) \in R^m$ – СВСЗ відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0, \forall t \geq t_0 \geq 0$; $x_t \equiv \{x(t-\tau)\}$, $\tau > 0$; $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([- \tau, 0], R^m)$ – простір Скорохода; $\xi(t)$ – феллерівський марковський процес, який спричиняє внутрішню випадкову зміну структури системи, $\{\eta_k, k \geq 0\}$ – феллерівський ланцюг Маркова.

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних функціонали $a: R_+ \times Y \times R^m \times \mathbf{D} \rightarrow R^m$, $g: R_+ \times Y \times R^m \times H \rightarrow R^m$, задовольняють умову Ліпшица для $\forall x^1, x^2 \in R^m$, $\forall z^1, z^2 \in \mathbf{D}$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \geq t_0 \geq 0$; $\forall y \in Y$; $\forall h \in H$:

$$\begin{aligned} & \left| a(t, y, x^1, z^1) - a(t, y, x^2, z^2) \right| + \left| g(t, y, x^1, h) - g(t, y, x^2, h) \right| \leq \\ & \leq \Lambda(|x^1 - x^2| + |z^1 - z^2|), \end{aligned} \quad (4)$$

і умову рівномірної обмеженості

$$\sup_{\substack{t \geq 0, y \in Y, \\ h \in H}} (|a(t, y, x, x_t)| + |g(t, y, x, h)|) = \gamma < +\infty, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

Стійкість за першим наближенням. Нехай імпульсна система має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0(t, \xi(t), x(t), x_t) + a_1(t, \xi(t), x(t), x_t), \quad (6)$$

$$\Delta x|_{t_k} = g_0(t_k, \xi(t_{k-}), x(t_{k-}), \eta_k) + g_1(t_k, \xi(t_{k-}), x(t_{k-}), \eta_k), \quad (7)$$

Означення 2. Назвемо імпульсну систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0(t, \xi(t), x(t), x_t), \quad (8)$$

$$\Delta x|_{t_k} = g_0(t_k, \xi(t_{k-}), x(t_{k-}), \eta_k), \quad (9)$$

системою першого наближення для (6)-(7).

При аналізі стійкості розв'язку системи (6)-(7) можна використати функціонал Ляпунова для (8)-(9) і, обчисливши дискретний оператор Ляпунова для (6)-(7) від цього функціоналу, одержимо достатні умови стійкості цієї системи (6)-(7). Назвемо дане дослідження стійкості розв'язку системи (6)-(7) за першим наближенням.

Нехай $v(t, y, z, h)$ такий скалярний невід'ємно-визначений функціонал, що послідовність $v_k(y, z, h) \equiv v(t_k, y, z, h)$ є функціоналом Ляпунова. Для дискретного оператора Ляпунова в силу (6)-(7) введемо позначення \mathcal{L}_0 , а для дискретного оператора в силу (8)-(9)-позначення \mathcal{L} . Введемо обмеження й позначення, пов'язані з марковським процесом $\xi(t) \in R^m$. Використовуючи [3], визначимо C -інфінітезимальний оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ рівністю

$$(\widehat{\mathcal{L}} f)(y) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[E_y \{ f(\xi(t)) \} - f(y) \right], \text{ де } f \in D(\widehat{\mathcal{L}}) \subset C(Y). \quad (10)$$

Збережемо це позначення для продовження $\widehat{\mathcal{L}}$ в простір неперервних, але необов'язково обмежених відображень Y в R .

Нехай $v(t, y, z, h)$ – неперервний за сукупністю й неперервно-диференційовний за t й за третім аргументом неперервно-диференційовний за Фріше невід'ємно визначений функціонал.

Зрозуміло, що пара $\{\xi(t), x_t\}$ утворить феллерівський марковський процес, а значить можна ввести інфінітезимальний оператор у силу (8) (або в силу (6)) за третім аргументом

$$(\mathbf{Q} v)(t, y, z, h) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left[\mathbf{E}_{y,z}^{(t)} \{v(t + \theta, \xi(t + \theta), \bar{x}_{t+\tau}, h)\} - v(t, y, z, h) \right], \quad (11)$$

де індекси в \mathbf{E} означають умову $\xi(t) = y$, $\bar{x}_t = z$.

Будемо вважати, що вищевведений функціонал $v \in D(\mathbf{Q})$ визначений, якщо границя (11) існує в розумінні рівномірної збіжності в деякому околі точки (y, z) рівномірно за $h \in H$.

Ця границя може бути обчислена у формі

$$(\mathbf{Q} v)(t, y, z, h) = \frac{\partial v(t, y, z, h)}{\partial t} + (\widehat{\mathcal{L}}_y v)(t, y, z, h) + ((\nabla_z v)(t, y, z, h), a_0(t, y, z, h)), \quad (12)$$

де (\cdot, \cdot) – скалярний добуток в R^m , ∇_z – оператор Фреше за z .

Введемо різницьевий оператор Ляпунова \mathbf{R} , що пов'язаний з імпульсною дією (9) у момент $t_k \in S$. Цей оператор \mathbf{R} діє на послідовність функціоналів $v(t_k, y, z, h)$ за змінними $k \in N$, $h \in H$, $x \in R^m$ при кожному фіксованому $y \in Y$ за правилом

$$(\mathbf{R} v)(t_k, y, x, h) \equiv \mathbf{E}_h^k \{v(t, y, x + g_0(t_k, y, x, h), h)\} - v(t_k, y, x, h), \quad (13)$$

де індекси в $\mathbf{E}\{\cdot\}$ означають $\eta_k = h$. Будемо писати $v \in D(\mathbf{R})$, якщо в (13) $\mathbf{E}\{\cdot\}$ існує при $\forall t_k \in S$, $y \in Y$, $h \in H$ і $x \in R^m$. Якщо позначити $P_k(h, \mathbf{G})$ – перехідну ймовірність ланцюга Маркова η_k на k -ому кроці, то $(\mathbf{R} v)(t_k, y, x, h)$ можна обчислити по формулі

$$(\mathbf{R} v)(t_k, y, x, h) = \int_{\mathbf{H}} v(t_k, y, x + g_0(t_k, y, x, h), z) P_k(h, dz) - v(t_k, y, x, h). \quad (14)$$

Наведемо доведення основних теорем про стійкість розв'язку незбуреної системи (8)-(9) [1], [2].

Теорема 1. Нехай:

- 1) $\sup_{k \in \mathbf{N}} (t_{k+1} - t_k) = \Delta < \infty$;
- 2) виконано умови для системи (8)-(9) про існування розв'язку;
- 3) марковський процес $\xi(t) \in R^m$ стохастично неперервний;
- 4) існує такий невід'ємно визначений функціонал $v \in D(\mathbf{Q})$, що

$$\inf_{\substack{t \geq 0, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, \|z\| \geq r}} v(t, y, z, h) = \overline{v}(r) \rightarrow +\infty; \quad (15)$$

$$\sup_{\substack{t \geq 0, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, \|z\| < r}} v(t, y, z, h) = \underline{v}(r) \rightarrow 0; \quad (16)$$

$$(\mathbf{Qv}) (t, y, z, h) \leq 0, \quad (17)$$

$$(\mathbf{Rv}) (t, y, z, h) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, t_k \in S, y \in Y, h \in H, z \in \mathbf{D}. \quad (18)$$

Тоді імпульсна система (8)-(9) стійка за ймовірністю в цілому.

Доведення. У силу умов теореми послідовність $v_k(y, z, h)$ утворює функціонал Ляпунова, тому досить показати, що

$$(\mathbf{Lv}_k) (y, z, h) \leq 0, \quad \forall k \in N, y \in Y, h \in H, z \in \mathbf{D}.$$

Із означення інфінітезимального оператора марковського процесу $\{\xi(t), \bar{x}_t\}$ випливає – формула Динкіна [5]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t+\tau), \bar{x}_{t+\tau}, h) \right\} = \\ & = v(t_k, y, z, h) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ (\mathbf{Qv})(\tau, \xi(\tau), \bar{x}_\tau, h) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Звідки, із врахуванням (17), відразу випливає нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t+\tau), \bar{x}_{t+\tau}, h) \right\} \leq v(t_k, y, z, h), \\ & k \in N, y \in Y, h \in H, z \in \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (20)$$

За умовою 3) теореми марковський процес $\xi(t) \in R^m$ стохастично неперервний, тому при обчисленні умовного математичного сподівання [4] для кожного $t \in R_+$ замість $\xi(t)$ можна підставляти $\xi(t-)$, а значить цим можна скористатися при обчисленні \mathbf{Lv}_k :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{Lv}_k) (y, z, h) = \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \bar{x}_{t_{k+1}}, h) \right\} - v(t_k, y, z, h) = \\ & = \left[\mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}_{t_{k+1}^-} + g_0(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}_{t_{k+1}^-}, \eta_{k+1}), \eta_{k+1}) \right\} - \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}_{t_{k+1}^-}, \eta_{k+1}) \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{E}_{y,z}^{(t_k)} \left\{ v(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}_{t_{k+1}^-}, \eta_{k+1}) \right\} - v(t_k, y, z, h) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Другий доданок у правій частині (21) недодатний. При оцінці першого доданка (21) візьмемо спочатку умовне математичне сподівання за умови $F_{t_{k+1}^-}$, скористаємося $F_{t_{k+1}^-}$ -вимірністю випадкових

величин $\xi(t_{k+1}^-)$ і $\bar{x}(t_{k+1}^-)$, і, враховуючи умову (18) теореми, отри-
маємо з (21) нерівність $(\mathcal{L}v_k)(y, z, h) \leq 0$. Теорема доведена. ■

Теорема 2. Нехай: I) виконано умови теореми 1;

II) існує число $\gamma \in (0, 1)$, що при всіх $t_k \in S$, $y \in Y$, $h \in H$,
 $z \in \mathbf{D}$ дискретний недодатний оператор (Rv)

$$(Rv_k)(y, z, h) \leq -\gamma v(t_k, y, z, h). \quad (22)$$

Тоді імпульсна система (8)-(9) асимптотично стійка в цілому.

Доведення. Позначимо через $b_k(y, z, h) \equiv (1-\gamma)^{-k} v(t_k, y, z, h)$,
 $k \in N$, тоді з нерівності (22) відразу випливає нерівність

$$\begin{aligned} (Rb_k)(y, z, h) &\equiv (1-\gamma)^{-k-1} E_h^{t_k} \{v(t_{k+1}, y, z, \eta_{k+1})\} - (1-\gamma)^{-k} v(t_k, y, z, h) = \\ &= (1-\gamma)^{-k-1} [(Rv)(t_k, y, z, h) + v(t_k, y, z, h)] \leq 0. \end{aligned}$$

Тому з (21) одержимо, що $(\mathcal{L}b_k)(y, z, h) \leq 0$, тобто

$$(1-\gamma)^{-k-1} E_{y,h}^{t_k} \{v(t_k, \xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\} \leq v(t_0, y, z, h) \leq \underline{v}(|z|),$$

а, отже, за визначенням функціоналу Ляпунова, маємо

$$E_{y,h}^{t_0} \{\bar{v}(|x(t_k)|)\} \leq E_{y,h}^{t_0} \{v(t_k, \xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\} \leq (1-\gamma)^k \underline{v}(|z|)$$

Залишилося скоритатися означенням асимптотичної стійкості за
ймовірністю в цілому, що й завершує доведення теореми 2. ■

Теорема 3. Нехай: 1) $\inf_{k \in \mathbf{N}} (t_{k+1} - t_k) = \Delta_1 > 0$;

2) виконані умови теореми 1;

3) існує таке число $\gamma > 0$, що

$$(Qv)(t, y, z, h) \leq -\gamma v(t, y, z, h),$$

$$\forall t \geq 0, t_k \in S, y \in Y, h \in H, z \in \mathbf{D}. \quad (23)$$

Тоді імпульсна система (8)-(9) асимптотично стійка в цілому.

Доведення. За означенням оператора Q для функціоналу Ляпу-
нова $V(t, y, z, h) \equiv e^{\gamma t} v(t, y, z, h)$ легко довести нерівність

$$(QV)(t, y, z, h) \leq \gamma V(t, y, z, h) + e^{\gamma t} (Qv)(t, y, z, h) \leq 0.$$

Звідки випливає

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}V_k)(y, z, h) &\leq e^{-\gamma \Delta_1} E_h^{(t_k)} \{v(t_k, y, z + g_0(t_k, y, z, h), \eta_{k+1})\} - \\ &- v(t_k, y, z, h) \leq (e^{-\gamma \Delta_1} - 1)v(t_k, y, z, h) \leq 0. \end{aligned}$$

Скориставшись означенням асимптотичної стохастичної стійко-
сті в цілому з останньої нерівності випливає доведення теореми 3. ■

Доведемо збереження властивостей експоненціальної \mathbf{p} -стійкості.

Теорема 4. Нехай: 1) для імпульсної незбуреної системи (8)-(9) при $p > 0$, $c_i > 0$, $i = \overline{1, 4} \exists$ функціонал Ляпунова $\mathbf{v}_k(y, z, h)$ такий, що

$$c_1 |z|^p \leq \mathbf{v}_k(y, z, h) \leq c_2 |z|^p, \quad (24)$$

$$(\mathcal{L}\mathbf{v}_k)(y, z, h) \leq -c_3 |z|^p, \quad (25)$$

$$\left| \mathbf{v}_k(y, z^1, h) - \mathbf{v}_k(y, z^2, h) \right| \leq c_4 |z^1 - z^2|^p, \\ \forall k \in \mathbf{N}, y \in Y, h \in H, z \in \mathbf{D}; \quad (26)$$

2) $\sup_{k \in \mathbf{N}} (t_{k+1} - t_k) \leq \Delta$, $\Delta > 0$;

3) збурення a_1 й g_1 задовольняють рівномірно за t умову рівномірної обмеженості $|a_1(t, y, x, z)| + |g_1(t, y, x, h)| \leq \Lambda_1 |z|$, де Λ_1 – досить мале додатне число. Тоді збурена імпульсна система (6)-(7) експоненціально \mathbf{p} -стійка в цілому.

Доведення. Подамо розв’язок $x(t)$ цієї системи на $[t_{k+1}, t_k)$ у формі

$$x(t) = \bar{x}(t) + \Delta x(t), \text{ де } \Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t). \quad (27)$$

Обчислимо дискретний оператор Ляпунова з огляду на (27):

$$(\mathcal{L}_1 \mathbf{v}_k)(y, z, h) = \mathbf{E}_{y,z,h}^{(t_k)} \left\{ \mathbf{v}_{k+1} \left(\xi(t_{k+1}), \bar{x}_{t_{k+1}} + \Delta x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1} \right) \right\} - \mathbf{v}_k(y, z, h) \leq \\ \leq (\mathcal{L}\mathbf{v}_k)(y, z, h) + c_4 \mathbf{E}_{y,z,h}^{(t_k)} \left\{ \left| \Delta x_{t_{k+1}} \right|^p \right\} \leq \quad (28) \\ \leq -c_3 |z|^p + c_4 \mathbf{E}_{y,z,h}^{(t_k)} \left\{ \left| x_{t_{k+1}}(t_k, y, z, h) - \bar{x}_{t_{k+1}}(t_k, y, z, h) \right|^p \right\}.$$

Для всіх $t \in [t_{k+1}, t_k)$ для різниці розв’язків систем (6) і (8) з однаковими початковими даними $x_{t_k} = \bar{x}_{t_k} = z$ одержимо нерівність

$$\left| x(t) - \bar{x}(t) \right| \leq (\Lambda + 1) \int_{t_k}^{t_{k+1}} |x(s) - \bar{x}(s)| ds + \Lambda_1 \int_{t_k}^{t_{k+1}} |x(s)| ds \leq \\ \leq (\Lambda + 1) \int_{t_k}^{t_{k+1}} |x(s) - \bar{x}(s)| ds + \Lambda_1 (t_{k+1} - t_k) |x| e^{(\Lambda+C)(t_{k+1}-t_k)}.$$

Звідки за лемою Гронуолла маємо

$$\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x_t - \bar{x}_t| \leq \Lambda_1 |z| \Delta e^{2(\Lambda+1)\Delta}.$$

Далі, в момент стрибка за умови $x_{t_k} = \bar{x}_{t_k} = z$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left| x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1}) \right| \leq \left| x(t_{k+1}^-) + g_0(t_{k+1}^-, \xi(t_{k+1}^-), x(t_{k+1}^-) + \right. \\ & + g_1(t_{k+1}^-, \xi(t_{k+1}^-), x(t_{k+1}^-), \eta_{k+1})) - \bar{x}(t_{k+1}^-) - g_0(t_{k+1}^-, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}(t_{k+1}^-), \eta_{k+1}) - \\ & \left. - g_1(t_{k+1}^-, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}(t_{k+1}^-), \eta_{k+1}) \right| + \left| g_1(t_{k+1}^-, \xi(t_{k+1}^-), \bar{x}(t_{k+1}^-), \eta_{k+1}) \right| \leq \\ & \leq (1 + \Lambda + \Lambda_1) \left| x(t_{k+1}^-) - \bar{x}(t_{k+1}^-) \right| + \Lambda_1 |x| e^{\Lambda \Delta} \leq \\ & \leq \Lambda_1 |x| e^{2(\Lambda+1)\Delta} (1 + \Delta(1 + \Lambda + \Lambda_1)). \end{aligned}$$

Аналогічно можна одержати оцінку

$$\left| x_{t_k} - \bar{x}_{t_k} \right| \leq \Lambda_1 |z| e^{2(\Lambda+1)\Delta} (1 + \Delta(1 + \Lambda + \Lambda_1)).$$

При досить малому $\Lambda_1 > 0$ з (28) маємо $(\mathcal{L}v_k)(y, \phi, h) \leq -\frac{c_3}{c_2} |z|^p$.

За означенням експоненціальної р-стійкості випливає доведення. ■

Список використаних джерел:

1. Королюк В. С. Устойчивость динамических систем с последствием с учетом марковских возмущений / В. С. Королюк, В. И. Мусуриевский, И. В. Юрченко // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 134–146.
2. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последствием при наличии марковских параметров. Часть I / В. С. Королюк, В. И. Мусуриевский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 1. — С. 16–35.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1963. — 859 с.
4. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Наука «Физматлит», 1994. — Т. 1. — 544 с.
5. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические функционально-дифференциальные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 328 с.

The problem of creation of impulse dynamical system with continuous behind in the consideration of Markoff disturbance is considered by the article. This system of odd structure must be asymptotically stable by the probability and provide preassigned optimivity of a transient process.

Key words: *stability, impulse dynamical system, system odd structure, process of Markoff, continuous behind.*

Отримано: 27.04.2010