functional series is summed by the own elements of the corresponding hybrid differential operator.

Keywords: *functional series, Bessel functions, main solutions, hybrid integral transform, influence functions, Green function, contact conditions, condition of simple solvability, basic identity, logical chart.*

Отримано: 6.02.2010

УДК 519.863

М. М. Копець, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України ‹‹Київський політехнічний інститут››, м. Київ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ДИФУЗІЇ

У цій статті ми розглядаємо задачу оптимального керування процесом, який описується рівнянням дифузії. Критерій оптимальності є квадратичним із скінченною верхньою межею. Для розв'язування цієї задачі використовується метод динамічного програмування. В результаті отримано інтегродиференціальне рівняння Ріккаті. За допомогою цього рівняння розв'язок задачі оптимального керування отримано в замкненій формі.

Ключові слова: *рівняння дифузії, інтегродиференціальне рівняння Ріккаті, метод динамічного програмування, задача оптимального керування.*

Розглядається процес, що описується рівнянням дифузії

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + b^2 u(t,x), 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le l, \tag{1}$$

де b, $l > 0$, $T > 0$ – задані дійсні числа, D – коефіцієнт дифузії [1, с.185]. Початкова умова для рівняння (1) має вигляд

$$z(0,x) = z_0(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

де функція $z_0(x)$ двічі неперервно диференційована по змінній x.

Задано також однорідні крайові умови

$$z(t,0) = 0,\ z(t,l) = 0. \tag{3}$$

Функція $u(t,x)$, що входить в рівняння (1), називається керуванням. Вважаємо, що керування належать до класу кусково неперервних функцій. Далі розглядаємо функціонал

$$I(u)=\int_0^T J\left(z,u,t\right)dt\,, \tag{4}$$

де

$$J\left(z,u,t\right)=\frac{q^2}{2}\int_0^l\int_0^l z\left(t,\lambda\right)z\left(t,\mu\right)d\mu\, d\lambda+\frac{r^2}{2}\int_0^l u^2\left(t,\lambda\right)d\lambda\,, \tag{5}$$

q і r – задані дійсні числа.

Задача полягає в знаходженні такого керування $u_0\left(t,x\right)$, при якому функціонал (4) із врахуванням співвідношень (1)-(3) досягає свого мінімального значення. Таке керування називається оптимальним.

Для знаходження розв'язку цієї задачі, припускаючи що він існує, застосуємо метод динамічного програмування. Розглянемо функцію

$$S\left(t,z\right)=\min_{\substack{u\left(t',x\right)\\ t\le t'\le T}}\int_t^T J\left(z,u,t'\right)dt'\,. \tag{6}$$

Очевидно, що

$$S\left(T,z\right)=0\,. \tag{7}$$

Із співвідношення (6) безпосередньо знаходимо

$$S\left(t+\Delta t,z\left(t+\Delta t,x\right)\right)-S\left(t,z\left(t,x\right)\right)=-\min_{\substack{u\left(t',x\right)\\ t\le t'\le t+\Delta t}}\int_t^T J\left(z,u,t'\right)dt'\,.$$

За допомогою очевидних міркувань із останнього співвідношення приходимо до функціонального рівняння Беллмана

$$-\frac{\partial S\left(t,z\right)}{\partial t}=\min_{u\left(t,x\right)}\left\{J\left(z,u\right)+\int_0^l\frac{\partial S\left(t,z\right)}{\partial z}\frac{\partial z\left(t,\lambda\right)}{\partial t}d\lambda\right\}, \tag{8}$$

[2, с.419].

Функцію $S\left(t,z\right)$ шукаємо у вигляді

$$S\left(t,z\right)=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l P\left(t,\lambda,\mu\right)z\left(t,\lambda\right)z\left(t,\mu\right)d\mu d\lambda\,, \tag{9}$$

де $P\left(t,\lambda,\mu\right)=P\left(t,\mu,\lambda\right)$ – поки що невідома функція.

Частинна похідна функції $S\left(t,z\right)$ по змінній t дорівнює

$$\frac{\partial S\left(t,z\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l\frac{\partial P\left(t,\lambda,\mu\right)}{\partial t}z\left(t,\lambda\right)z\left(t,\mu\right)d\mu d\lambda\,. \tag{10}$$

Із співвідношення (9) безпосередньо отримаємо

$$\frac{\partial S(t,z)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)d\mu+\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)d\lambda\right].$$

Враховуючи рівняння (1), далі знаходимо, що

$$\int_0^l \frac{\partial S(t,z)}{\partial z}\frac{\partial z(t,\lambda)}{\partial t}d\lambda=$$

$$=\frac{D}{2}\int_0^l\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)d\mu+\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)d\lambda\right]\frac{\partial^2 z(t,\lambda)}{\partial\lambda^2}d\lambda+$$

$$+\frac{b^2}{2}\int_0^l\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)d\mu+\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)d\lambda\right]u(t,\lambda)d\lambda\,.$$

Якщо функція $P(t,\lambda,\mu)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно по змінних λ та μ і задовольняє крайовим умовам $P(t,0,\mu)=P(t,\lambda,0)=P(t,l,\mu)=P(t,\lambda,l)=0$, то очевидною є така рівність

$$\int_0^l\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)d\mu+\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)d\lambda\right]\frac{\partial^2 z(t,\lambda)}{\partial\lambda^2}d\lambda=$$

$$=\int_0^l\int_0^l P(t,\lambda,\mu)\frac{\partial^2 z(t,\lambda)}{\partial\lambda^2}z(t,\mu)d\mu d\lambda+\int_0^l\int_0^l P(t,\lambda,\mu)\frac{\partial^2 z(t,\mu)}{\partial\mu^2}z(t,\lambda)d\mu d\lambda=$$

$$=\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2 P(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda^2}z(t,\lambda)z(t,\mu)d\mu d\lambda+\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2 P(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu^2}z(t,\lambda)z(t,\mu)d\mu d\lambda\,.$$

Оптимальне керування $u_0(t,\lambda)$ шукаємо у вигляді

$$u_0(t,\lambda)=-\frac{b^2}{r^2}\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)d\mu\,. \tag{11}$$

У результаті співвідношення (5) буде мати вигляд

$$J(z,u)=\frac{q^2}{2}\int_0^l\int_0^l z(t,\lambda)z(t,\mu)d\mu d\lambda+$$

$$+\frac{b^4}{2r^2}\int_0^l\int_0^l\int_0^l P(t,\lambda,\tau)P(t,\tau,\mu)d\tau\ z(t,\lambda)z(t,\mu)d\mu d\lambda\,,$$

або

$$J(z,u)=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l\left[q^2+\frac{b^4}{r^2}\int_0^l P(t,\varphi,\mu)P(t,\tau,\lambda)d\tau\right]z(t,\mu)z(t,\lambda)d\mu d\lambda\,.$$

Далі отримаємо, що

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial t} z(t,\lambda)z(t,\mu)\,d\mu d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left[q^2+\frac{b^4}{r^2}\int_0^l P(t,\varphi,\mu)P(t,\tau,\lambda)\,d\tau \right] z(t,\mu)z(t,\lambda)\,d\mu\, d\lambda +$$

$$+\frac{D}{2}\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2 P(t,\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} z(t,\lambda)z(t,\mu)\,d\mu\, d\lambda + \tag{12}$$

$$+\frac{D}{2}\int_0^l\int_0^l \frac{\partial^2 P(t,\lambda,\mu)}{\partial \mu^2} z(t,\lambda)z(t,\mu)\,d\mu\, d\lambda -\frac{b^4}{2r^2}\int_0^l\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)\,d\mu +\right.$$

$$\left. +\int_0^l\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)\right]\int_0^l P(t,\lambda,\theta)z(t,\theta)\,d\theta d\lambda\,.$$

Легко переконатися, що має місце рівність

$$-\frac{b^4}{2r^2}\int_0^l\left[\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\mu)\,d\mu+\int_0^l P(t,\lambda,\mu)z(t,\lambda)\right]\times$$

$$\times\int_0^l P(t,\lambda,\theta)z(t,\theta)\,d\theta d\lambda = \tag{13}$$

$$=-\frac{b^4}{r^2}\int_0^l\int_0^l\int_0^l P(t,\lambda,\tau)P(t,\tau,\mu)\,d\tau z(t,\mu)z(t,\lambda)\,d\mu d\lambda.$$

Із врахуванням (13) після зведення подібних членів із рівності (12) знаходимо

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial t} z(t,\lambda)z(t,\mu)\,d\mu d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l\left[q^2+D\,\left(\frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu^2}\right)- \right. \tag{14}$$

$$\left. -\frac{b^4}{r^2}\int_0^l P(t,\varphi,\mu)P(t,\tau,\lambda)\,d\tau \right] z(t,\mu)z(t,\lambda)\,d\mu\, d\lambda.$$

Рівність (14) повинна виконуватись тотожно відносно z. Це можливо у випадку, якщо функція $P(t,\lambda,\mu)$ є розв'язком такого рівняння

$$-\frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial t}=q^2+D\left(\frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial P(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu^2}\right)-$$
$$-\frac{b^4}{r^2}\int_0^l P(t,\lambda,\tau)P(t,\tau,\mu)\,d\tau,\quad 0\le\lambda\le l,\quad 0\le\mu\le l. \qquad (15)$$

Рівняння (15) називається інтегродиференціальним рівнянням Ріккаті. Для того, щоб виконувалась умова (7), досить прирівняти функцію $P(t,\lambda,\mu)$ до нуля при $t=T$, тобто

$$P(T,\lambda,\mu)=0,\ 0\le\lambda\le l,0\le\mu\le l. \qquad (16)$$

Отже, доведене таке твердження.

Теорема. Для задачі оптимізації (1)-(5) оптимальне керування $u_0(t,\lambda)$ обчислюється за формулою (11), де функція $P(t,\lambda,\mu)$ є розв'язком інтегродиференціального рівняння (15), задовольняє умові (16), умові симетричності $P(t,\lambda,\mu)=P(t,\mu,\lambda)$ та крайовим умовам

$$P(t,0,\mu)=P(t,l,\mu)=P(t,\lambda,0)=P(t,\lambda,l)=0.$$

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
2. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

In this paper we investigate the optimal control problem for the process which is described by the diffusion equation. The criterion of optimality is quadratic with a fixed, finite upper limit. For solving of this problem the method of dynamic programming is used. As result the integrodifferential equation Riccati is obtained. By means of this equation the solution of this optimal problem is obtained in closed form.

Key words: *diffusion equation, integrodifferential equation Riccati, method of dynamic programming, optimal control problem.*

Отримано: 02.06.2010