5. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 829 с.
6. Bullen P. S. Properties of the coefficient of orthonormal sequences / P. S. Bullen // Canad. J. Math. – 1961. – V. 13. – № 2. – P. 305–315.

Some new estimates of the Fourier coefficients for functions from symmetrical spaces are obtained.

Key words: *Fourier coefficients, functions, symmetric space, theorem, trigonometric system, property, totality.*

Отримано: 18.06.2010

УДК 517.443

І. М. Конет[*], д-р фіз.-мат. наук,
М. П. Ленюк[**], д-р фіз.-мат. наук

[*] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
[**] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, м. Чернівці

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА–ФУР'Є–(КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку, методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *функціональні ряди, функції Бесселя, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, функції впливу, функції Гріна, умови спряження, умова однозначної розв'язності, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу знаходяться, як правило, в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростішому випадку величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються параметричним функціональним рядом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках [1]. У цій статті підсумовано поліпараметричні функціональні ряди за власними елементами одного класу гібридних диференціальних операторів на полярній осі $r \geq R_0 > 0$.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty);\ R_0 > 0\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича-Лєбєдєва для модифікованих функцій

$$\left(B_{\alpha_1}^* - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (R_0, R_1)\ ,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2)\ , \tag{1}$$
$$\left(B_{\alpha_2} - q_3^2\right) u_3(r) = -g_3(r),\ r \in (R_2, \infty)\ ,$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\right|_{r=R_0} = g_0\ ,\ \lim_{r\to\infty} [r^\gamma u_3(r)] = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{jk}\ ,\ j,k = 1,2\ . \tag{3}$$

Будемо вважати, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0$, $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $2\alpha_j + 1 > 0$.

У системі (1) беруть участь диференціальний оператор Ейлера [2] $B_{\alpha_1}^* = r^2 \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \dfrac{d}{dr} + \alpha_1^2$; диференціальний оператор Фур'є [2] $\dfrac{d^2}{dr^2}$ та диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва [3] $B_{\alpha_2} = r^2 \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r \dfrac{d}{dr} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$, $\lambda \in (0, \infty)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1} - q_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = ch\, q_2 r$ та $v_2 = sh\, q_2 r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [3].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2, 4]:

$$u_1(r) = A_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + B_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1^*(\rho) \rho^{2\alpha_1 + 1} d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 \mathrm{chq}_2 r + B_2 \mathrm{shq}_2 r + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) d\rho, \quad (4)$$

$$u_3(r) = B_3 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3^*(\rho) \rho^{2\alpha_2 + 1} d\rho.$$

У рівностях (4) $g_m^*(\rho) = \rho^{-2} g_m(\rho)$, $E_j(r,\rho)$ — функції Коші:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \; j = 1,2, \quad (5)$$

де

$$\varphi_1(r) = r^{2\alpha_1 + 1}, \; \varphi_2(r) = 1, \; \varphi_3(r) = r^{2\alpha_2 + 1}.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_1 \equiv C_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + D_1 r^{-\alpha_1 + q_1}, & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+}{E}_1 \equiv C_2 r^{-\alpha_1 - q_1} + D_2 r^{-\alpha_1 + q_1}, & R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші для визначення величин C_j, D_j дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_1 - q_1} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_1 + q_1} = 0\,,$$

$$(\alpha_1 + q_1)(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_1 - q_1} + (\alpha_1 - q_1)(D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_1 + q_1} = \rho^{-2\alpha_1}\,.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = (2q_1)^{-1}\rho^{-\alpha_1 + q_1}\,,\; D_2 - D_1 = -(2q_1)^{-1}\rho^{-\alpha_1 - q_1}\,. \tag{6}$$

Доповнимо систему рівностей (6) алгебраїчними рівняннями

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)\overset{-}{E}_1\Big|_{r=R_0} = 0: \\
&\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1\Big|_{r=R_1} = 0:
\end{aligned}
\quad
\begin{cases}
Z_{\alpha_1;11}^{01}(q_1, R_0)C_1 + Z_{\alpha_1;11}^{02}(q_1, R_0)D_1 = 0, \\
Z_{\alpha_1;11}^{11}(q_1, R_1)C_1 + Z_{\alpha_1;11}^{12}(q_1, R_1)D_1 = 0.
\end{cases} \tag{7}$$

Із алгебраїчної системи (6), (7) знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{Z_{\alpha_1;11}^{02}(q_1, R_0)}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, \rho)\,,$$

$$D_1 = \frac{Z_{\alpha_1;11}^{01}(q_1, R_0)}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, \rho)\,.$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}\begin{cases}
\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, \rho), R_0 < r < \rho < R_1, \\
\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, r), R_0 < \rho < r < R_1.
\end{cases} \tag{8}$$

У рівностях (7), (8) беруть участь функції:

$$\Delta_{\alpha_1,j1}(q_1, R_0, R_1) = Z_{\alpha_1;11}^{01}(q_1, R_0)Z_{\alpha_1;j1}^{12}(q_1, R_1) - Z_{\alpha_1;11}^{02}(q_1, R_0)Z_{\alpha_1;j1}^{11}(q_1, R_1),\ j{=}1{,}2;$$

$$\Psi_{\alpha_1;j1}^{m*}(q_1, r) = Z_{\alpha_1;j1}^{m2}(q_1, R_m)r^{-\alpha_1 - q_1} - Z_{\alpha_1;j1}^{m1}(q_1, R_m)r^{-\alpha_1 + q_1}\;;$$

$$Z_{\alpha_1;j1}^{m1}(q_1, R_m) = \left(\alpha_{j1}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^m\right)r^{-\alpha_1 - q_1}\Big|_{r=R_m}\;;$$

$$Z_{\alpha_1;j1}^{m2}(q_1, R_m) = \left(\alpha_{j1}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^m\right)r^{-\alpha_1 + q_1}\Big|_{r=R_m}\,.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r,\rho) = \begin{cases}
\overset{-}{E}_2 \equiv C_1 \operatorname{ch} q_2 r + D_1 \operatorname{sh} q_2 r, \quad R_1 < r < \rho < R_2, \\
\overset{+}{E}_2 \equiv C_2 \operatorname{ch} q_2 r + D_2 \operatorname{sh} q_2 r, \quad R_1 < \rho < r < R_2.
\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1)\mathrm{ch}q_2\rho + (D_2 - D_1)\mathrm{sh}q_2\rho = 0\,,$$

$$(C_2 - C_1)\mathrm{sh}q_2\rho + (D_2 - D_1)\mathrm{ch}q_2\rho = -q_2^{-1}\,.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_2^{-1}\mathrm{sh}q_2\rho\,,\ D_2 - D_1 = -q_2^{-1}\mathrm{ch}q_2\rho\,. \tag{9}$$

Доповнимо рівності (9) алгебраїчними рівняннями

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)\overset{-}{E}2\Bigg|_{r=R_1}=0: \\ &\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)\overset{+}{E}2\Bigg|_{r=R_2}=0:\end{aligned}\quad \begin{cases}V_{12}^{11}(q_2R_1)C_1+V_{12}^{12}(q_2R_1)D_1=0,\\ V_{11}^{21}(q_2R_2)C_1+V_{11}^{22}(q_2R_2)D_1=0.\end{cases} \tag{10}$$

Із алгебраїчної системи (9), (10) знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{V_{12}^{12}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2\rho)\,,$$

$$D_1 = \frac{V_{12}^{11}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2\rho)\,.$$

Цим функція Коші $E_2\left(r,\rho\right)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho), R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r), R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{11}$$

У формулах (10), (11) беруть участь функції:

$$V_{jm}^{k1}(q_2R_k) = \alpha_{jm}^k q_2 \mathrm{sh}q_2R_k + \beta_{jm}^k \mathrm{ch}q_2R_k \equiv \left(\alpha_{jm}^k\frac{d}{dr}+\beta_{jm}^k\right)\mathrm{ch}q_2r\Bigg|_{r=R_k}\,,$$

$$V_{jm}^{k2}(q_2R_k) = \alpha_{jm}^k q_2 \mathrm{ch}q_2R_k + \beta_{jm}^k \mathrm{sh}q_2R_k \equiv = \left(\alpha_{jm}^k\frac{d}{dr}+\beta_{jm}^k\right)\mathrm{sh}q_2r\Bigg|_{r=R_k}\,,$$

$$\Phi_{jm}^k(q_2R_k, q_2r) = V_{jm}^{k2}(q_2R_k)\mathrm{ch}q_2r - V_{jm}^{k1}(q_2R_k)sh q_2r\,,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2) = V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2) - V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2)\,,$$

$$j,k,m = 1,2\,.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_3(r,\rho) = \begin{cases}\overset{-}{E}3 \equiv C_1 I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + D_1 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), R_2<r<\rho<\infty,\\ \overset{+}{E}3 \equiv \qquad\qquad\qquad + D_2 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$-C_1 I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho) = 0,$$

$$-C_1 I'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho) = -(\lambda\rho^{2\alpha_2+1})^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1 = \lambda^{2\alpha_2} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\,,\ D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha_2} I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\,. \qquad (12)$$

Доповнимо рівності (12) алгебраїчним рівнянням

$$\left(\alpha_{12}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^2\right)\bar{E}_3\bigg|_{r=R_2} = 0 : U^{21}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2) C_1 + U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2) D_1 = 0\,. \qquad (13)$$

Із алгебраїчної системи (12), (13) знаходимо, що

$$D_2 = -[U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)]^{-1} \lambda^{2\alpha_2} \Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda\rho)\,.$$

Цим функція Коші $E_3(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r), R_2 < r < \rho < \infty, \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho), R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \qquad (14)$$

Повернемося до формул (4). Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення п’яти величин A_k і B_j ($k = 1,2$; $j = \overline{1,3}$) дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Z^{01}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)A_1 + Z^{02}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)B_1 = g_0,$$

$$Z^{11}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)A_1 + Z^{12}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)B_1 - V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12}, \qquad (15)$$

$$V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2 - U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3 = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23}, j = 1,2.$$

У системі (15) беруть участь функції

$$G_{12} = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)} g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1} d\rho +$$

$$+c_{21} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho,$$

$$G_{23} = -c_{12} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho +$$

$$+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} $(\delta_{12}=0,\quad \delta_{22}=1)$ [4].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}(q)=\Delta_{\alpha_1,11}(q_1,R_0,R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-\Delta_{\alpha_1,21}(q_1,R_0,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{\alpha_2,j}(q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$j=1,2,$$

$$\theta_{\alpha_1,1}(r,q)=\Delta_{\alpha_1,21}(q_1,R_0,R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)-\Delta_{\alpha_1,11}(q_1,R_0,R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r),$$

$$\theta_{\alpha_2,2}(r,q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r)\,.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для будь-якого $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}\neq\vec{0}$ визначник [5] алгебраїчної системи (15)

$$\begin{aligned}\Delta_{(\alpha)}(q)&\equiv U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1;1}(q)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)A_{\alpha_1;2}(q)=\\&=\Delta_{\alpha_1,11}(q_1,R_0,R_1)B_{\alpha_2,2}(q)-\Delta_{\alpha_1,21}(q_1,R_0,R_1)B_{\alpha_2,1}(q)\neq 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\alpha),11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}[B_{\alpha_2,2}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)-B_{\alpha_2,1}(q)\Psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)],$$

$$W_{(\alpha),12}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2;2}(r,q),\tag{17}$$

$$W_{(\alpha),13}(r,q)=\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);11}(r,q)=-\frac{B_{\alpha_2,2}(q)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);21}(r,q)=\frac{B_{\alpha_2,1}(q)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{c_{21}U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2,2}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2,2}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1,1}(r,q), \tag{18}$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);22}(r,q) = \frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1,1}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_1;21}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_1;11}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);12}(r,q) = \frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{R}^3_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_1;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\alpha);11}(r,\rho,q) = -\frac{1}{2q_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)W_{(\alpha),11}(\rho,q), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)W_{(\alpha),11}(r,q), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\theta_{\alpha_2,2}(\rho,q)\,,\ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);13}(r,\rho,q) = -\frac{c_{21}c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\,,$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\theta_{\alpha_2,2}(r,q)\,,$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{\alpha_1,1}(r,q)\theta_{\alpha_2,2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{\alpha_1,1}(\rho,q)\theta_{\alpha_2,2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);23}(r,\rho,q) = -\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1,1}(r,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho), \qquad (19)$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);31}(r,\rho,q) = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);32}(r,\rho,q) = -\frac{c_{12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_1,1}(\rho,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);33}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_1;2}(q)\Psi^2_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r) - \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_1;2}(q)\Psi^2_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho) - \end{cases}$$

$$-A_{\alpha_1;1}(q)\Psi^2_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r)], \quad R_2 < r < \rho < \infty,$$

$$-A_{\alpha_1;1}(q)\Psi^2_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho)], \quad R_2 < \rho < r < \infty.$$

У результаті однозначної розв’язності алгебраїчної системи (15) й підстановки одержаних значень A_k та B_j у формули (4) маємо єдиний розв’язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{(\alpha),1j}(r,q)g_0 + \sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^j_{(\alpha);km}(r,q)\omega_{km} +$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \qquad (20)$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho + \int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho, \; j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо розв’язок крайової задачі (1)-(3) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B^*_{\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_2)B_{\alpha_2}, \; (21)$$

де $\theta(x)$ — функція Гевісайда.

Оператор $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ самоспряжений і на множині I_2^+ не має особливих точок [6]. Отже, його спектр дійсний і дискретний. Йому відповідає дискретна спектральна вектор-функція.

Розглянемо функції: $b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j=\overline{1,3}$,

$$Y^{m1}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_m)=\left[\left(\beta^m_{j1}-\alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1}\right)\cos(b_1\ln R_m)-b_1R_m^{-1}\alpha^m_{j1}\sin(b_1\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_1},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_m)=\left[\left(\beta^m_{j1}-\alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1}\right)\sin(b_1\ln R_m)+b_1R_m^{-1}\alpha^m_{j1}\cos(b_1\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_1},$$

$$v^{m1}_{j2}(b_2R_m)=-\alpha^m_{j2}b_2\sin b_2R_m+\beta^m_{j2}\cos b_2R_m,$$

$$v^{m2}_{j2}(b_2R_m)=\alpha^m_{j2}b_2\cos b_2R_m+\beta^m_{j2}\sin b_2R_m,$$

$$X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)=\left(\alpha^2_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^2_{j2}\right)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),$$

$$\delta_{\alpha_1;j1}(\beta)=Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)-Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1),$$

$$\delta_{kj}(\beta)=v^{11}_{k2}(b_2R_1)v^{22}_{j1}(b_2R_2)-v^{12}_{k2}(b_2R_1)v^{21}_{j1}(b_2R_2),$$

$$a_{\alpha_1,j}(\beta)=\delta_{\alpha_1;11}(\beta)\delta_{2j}(\beta)-\delta_{\alpha_1;21}(\beta)\delta_{1j}(\beta),$$

$$\delta_{(\alpha)}(\beta)=X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)a_{\alpha_1,1}(\beta)-X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)a_{\alpha_1,2}(\beta).$$

Згідно з роботою [7] сформулюємо для нашого випадку потрібні твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{(\alpha)}(\beta)=0$ утворюють для ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ дискретний спектр: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta=0$ і на півосі $\beta>0$ складають монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою (точкою згущення) $\beta=\infty$.

Визначимо при $\beta=\beta_n$ ($b_{jn}=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$) функції:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)=c_{21}b_{2n}X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_{3n})\Big[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha_1}\cos(b_{1n}\ln r)-$$
$$-Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_{1n}\ln r)\Big],$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)=X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_{3n})\Big[\delta_{\alpha_1;21}(\beta_n)\phi^1_{12}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)-$$
$$-\delta_{\alpha_1;11}(\beta_n)\phi^1_{22}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)\Big], \qquad (22)$$

$$V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)=a_{\alpha_1;1}(\beta_n)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_{3n});$$

$$\phi^1_{j2}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)=v^{12}_{j2}(b_{2n}R_1)\cos b_{2n}r-v^{11}_{j2}(b_{2n}R_1)\sin b_{2n}r.$$

Безпосередньо перевіряється, що функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta_n)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)+\theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)$$

є спектральною вектор-функцією ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$, яка відповідає значенню β_n спектрального параметра β (власному числу β_n).

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система власних вектор-функцій $\left\{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнено ортогональна на множині I_2^+ з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена. При цьому квадрат норми власної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta_n)$ обчислюється за формулою

$$\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_0^{\infty}\left[V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr=\int_{R_0}^{R_1}\left[V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\left[V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{\infty}\left[V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr, \tag{23}$$

де $\sigma_1=\dfrac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\dfrac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}$, $\sigma_2=\dfrac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}$, $\sigma_3=1$.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r)=\left\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\right\}$ з області визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2^+ рядом Фур'є за системою власних функцій $\left\{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{\infty}g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}. \tag{24}$$

Ряд Фур'є (24) визначає пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{\infty}g(\rho)V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \tag{25}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\equiv g(r). \tag{26}$$

В основі застосувань СГІП ($H_{(\alpha)}$, $H_{(\alpha)}^{-1}$) знаходиться основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$.

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)];g_2''(r);B_{\alpha_2}[g_3(r)]\right\}$ є неперервною на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (3) та крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}(r,\beta_n) - g_3(r)\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)\right] = 0,$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$:

$$\begin{gathered} H_{(\alpha)}\left[\mathcal{M}_{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{j=1}^{3} k_j^2 \tilde{g}_{jn} + \\ +\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n) g_0 + \\ +\sum_{k=1}^{2} h_k \left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right], \end{gathered} \tag{27}$$

де $\tilde{g}_{1n} = \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr$, $\tilde{g}_{2n} = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr$,

$\tilde{g}_{3n} = \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr$, $h_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1}$, $h_2 = \sigma_2 c_{12}^{-1}$,

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta_n) = \left(\alpha_{i1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i1}^k\right) V_{(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\quad k = 1,2.$$

Ми маємо повний математичний апарат для розв'язування крайової задачі (1)-(3) методом СГІП за відомою логічною схемою [8].

Запишемо систему (1) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(B_{\alpha_1}^* - q_2^2\right) u_1(r) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right) u_2(r) \\ \left(B_{\alpha_2} - q_3^2\right) u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ згідно правила (25) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\begin{gathered} H_{(\alpha)}[\ldots] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} \ldots V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr \right. \\ \left. \int\limits_{R_1}^{R_2} \ldots V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr \int\limits_{R_2}^{\infty} \ldots V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr \right]. \end{gathered} \tag{29}$$

Застосуємо до системи (28) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (29). В силу основної тотожності (27) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_n^2+q_j^2+k_j^2\right)\tilde{u}_{jn}=\tilde{g}_n+\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)g_0+ \\ +\sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right]. \tag{30}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\}=$ $=q_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$. Ліва частина рівняння (30) набуває вигляду $\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\tilde{u}_n$ і ми знаходимо, що функція

$$\tilde{u}_n=\frac{\tilde{g}_n}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}+\frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0+ \\ +\sum_{k=1}^{2}h_k\left[\frac{Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}\omega_{2k}-\frac{Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}\omega_{1k}\right]. \tag{31}$$

Оператор $H_{(\alpha)}^{-1}$ згідно правила (26) як обернений до (29) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\ldots V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\ldots V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\ldots V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{32}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_n\right]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (31). У результаті низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\tilde{u}_j(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^k_{(\alpha);12}(\beta_n) V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^k_{(\alpha);22}(\beta_n) V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{1k} \right] + \quad (33)$$

$$+\sum_{m=1}^{3} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n) V_{(\alpha);m}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} \right) g_m(\rho)\sigma_m \varphi_m(\rho) d\rho , \; j=\overline{1,3} .$$

У формулі (33) $R_3 = \infty$, $\varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha_1 - 1}$, $\varphi_2(\rho) = 1$, $\varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha_2 - 1}$.

Порівнюючи розв'язки (20) і (33) в силу теореми єдиності, одержуємо формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta_n) V_{(\alpha);m}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} = \frac{1}{\sigma_k} \mathcal{H}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q) , \; j,k=\overline{1,3} , \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n) V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} = \left(\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\right)^{-1} W_{(\alpha),1j}(r,q) \;\; j=\overline{1,3} , (35)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^k_{(\alpha);12}(\beta_n) V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} = h_k^{-1} \mathcal{R}^{j}_{(\alpha);2k}(r,q) , \; k=1,2 , \; j=\overline{1,3} , \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^k_{(\alpha);22}(\beta_n) V_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q_1^2\right)\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} = -h_k^{-1} \mathcal{R}^{j}_{(\alpha);1k}(r,q) , \; k=1,2 , \; j=\overline{1,3} . \quad (37)$$

Функції впливу $H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (19), функцій Гріна $W_{(\alpha),1j}(r,q)$ визначені формулами (17), а функції Гріна $\mathcal{R}^{j}_{(\alpha);ik}(r,q)$ — формулами (18).

Зауваження 1. Якщо $\max\left\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\right\} = q_2^2$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 \ge 0$ і вираз $\left(\beta_n^2 + q_1^2\right)$ заміниться на $\left(\beta_n^2 + q_2^2\right)$.

Зауваження 2. Якщо $\max\left\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\right\} = q_3^2$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = 0$ і вираз $\left(\beta_n^2 + q_1^2\right)$ заміниться на $\left(\beta_n^2 + q_3^2\right)$.

Зауваження 3. Оскільки праві частини у формулах (34)-(37) не залежать від нерівностей $q_j^2 - q_m^2 \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2$, звужуючи при цьому клас функціональних рядів.

Підсумком виконаного в роботі дослідження є твердження.

Теорема. Якщо вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови теореми про основну тотожність і виконується умова (16) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (34)-(37) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (21).

Висновок. Одержані формули (34)-(37) є новими й поповнюють довідкову математичну літературу в розділі підсумовування функціональних рядів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики різного характеру.

Список використаних джерел:

1. Конет І. М. Підсумовування деяких класів функціональних рядів методом інтегральних перетворень / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. пед. ін-ту. Серія фізико-математична. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. пед. ін-т, 1997. — Вип. 3. — С. 40–46.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
3. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1963. — 431 с.
6. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
7. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
8. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том VI / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2006. — 376 с.

By the method of comparison of solution of boundary-value problem for the system of differential Eiler, Fourier and (Kontorovich-Lebedev) equations on the polar axis with two contact points, built, from one side, by the method of Cauchy functions, and from other side, by the method of the corresponding finite hybrid integral transform, polyparametric family of functional series is summed by the own elements of the corresponding hybrid differential operator.

Keywords: *functional series, Bessel functions, main solutions, hybrid integral transform, influence functions, Green function, contact conditions, condition of simple solvability, basic identity, logical chart.*

Отримано: 6.02.2010

УДК 519.863

М. М. Копець, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України ‹‹Київський політехнічний інститут››, м. Київ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ДИФУЗІЇ

У цій статті ми розглядаємо задачу оптимального керування процесом, який описується рівнянням дифузії. Критерій оптимальності є квадратичним із скінченною верхньою межею. Для розв'язування цієї задачі використовується метод динамічного програмування. В результаті отримано інтегродиференціальне рівняння Ріккаті. За допомогою цього рівняння розв'язок задачі оптимального керування отримано в замкненій формі.

Ключові слова: *рівняння дифузії, інтегродиференціальне рівняння Ріккаті, метод динамічного програмування, задача оптимального керування.*

Розглядається процес, що описується рівнянням дифузії

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + b^2 u(t,x), 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le l, \tag{1}$$

де b, $l > 0$, $T > 0$ – задані дійсні числа, D – коефіцієнт дифузії [1, с.185]. Початкова умова для рівняння (1) має вигляд

$$z(0,x) = z_0(x),\quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

де функція $z_0(x)$ двічі неперервно диференційована по змінній x.

Задано також однорідні крайові умови

$$z(t,0) = 0,\ z(t,l) = 0. \tag{3}$$

Функція $u(t,x)$, що входить в рівняння (1), називається керуванням. Вважаємо, що керування належать до класу кусково неперервних функцій. Далі розглядаємо функціонал