УДК 517.5

Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\bar{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ СУМАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА, БЛИЗЬКИМИ ДО СУМ ФУР'Є

Знайдено асимптотично точні рівності для лінійних комбінацій класів згорток при наближенні їх сумами Валле-Пуссена, близькими до сум Фур'є, в метриці *C*.

Ключові слова: *сумісне наближення, $\bar{\psi}$ -інтеграли, суми Валле-Пуссена.*

1. Нехай L — простір сумовних 2π-періодичних функцій і $S[f]=\dfrac{a_0(f)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$ — ряд Фур'є функції $f\in L$. Позначимо $A_k(f;x)=a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$, $\tilde{A}_k(f;x)=$ $=a_k(f)\sin kx-b_k(f)\cos kx$. Якщо $\bar{\psi}=(\psi_1(k),\psi_2(k))$ — пара довільних числових послідовностей $(k=0,1,2,...,\psi_1(0)=1,\ \ \psi_2(0)=0)$ і тригонометричний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\psi}^2(k)}\left(\psi_1(k)A_k(f;x)-\psi_2(k)\tilde{A}_k(f;x)\right),$$

де $\bar{\psi}^{\,2}(k)=\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то $\varphi(x)$ називають $\bar{\psi}$-похідною $f(x)$ в сенсі Степанця і записують $\varphi(x)=f^{\bar{\psi}}(x)$, $f(x)$ називають $\bar{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(x)$ і записують $f(x)=I^{\bar{\psi}}(\varphi;x)$. Множину $\bar{\psi}$-інтегралів всіх функцій простору *L* позначимо через $L^{\bar{\psi}}$. Якщо для послідовностей $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$:

1) $\Delta^2\psi_i(k)=\psi_i(k)-2\psi_i(k+1)+\psi_i(k+2)\geq 0,\ k\in N$;
2) $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_i(k)=0$;
3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\psi_i(k)}{k}<+\infty,\ i=\overline{1,2}$, то елементи *f* із класу $L^{\bar{\psi}}$ є згортками

функцій $\varphi\in L$ із ядром $\Psi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt\right)$. Якщо пари $\bar{\psi}=\left(\psi_1\left(k\right);\psi_2\left(k\right)\right)$ та $\bar{\varphi}=\left(\varphi_1\left(k\right);\varphi_2\left(k\right)\right)$ такі, що пара $\bar{\eta}=\left(\eta_1\left(k\right);\eta_2\left(k\right)\right)$, де $\eta_1=\dfrac{\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2}{\bar{\varphi}^2}$; $\eta_2=\dfrac{\varphi_2\psi_1-\varphi_1\psi_2}{\bar{\varphi}^2}$, задовольняє умови 1—3, то, як показано в [1], $L^{\bar{\psi}}\subset L^{\bar{\varphi}}$ і при цьому кажуть, що пара $\bar{\varphi}$ L-передує парі $\bar{\psi}$ і записують $\bar{\varphi}\overset{L}{<}\bar{\psi}$, і, крім того, $\forall f\in L^{\bar{\psi}}$ існує $f^{\bar{\varphi}}\in L^{\bar{\eta}}$.

Підмножину неперервних функцій із класу $L^{\bar{\psi}}$, для яких $\bar{\psi}$-похідна ортогональна константі і належить одиничній кулі простору 2π-періодичних суттєво обмежених функцій, позначимо символом $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$.

Нехай $\Lambda=\left(\lambda_k^{(n)}\right)\left(n\in N,\, k=0,1,\ldots,n-1\right)$ — трикутна числова матриця, $U_n\left(f;x;\Lambda\right)=\dfrac{\lambda_0^{(n)}a_0\left(f\right)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}A_k\left(f;x\right)$, $\mathfrak{M}\subset L$. Якщо для величини $\mathcal{E}_n\left(\mathfrak{M};\Lambda\right)_X=\sup\limits_{f\in\mathfrak{M}}\left\|f\left(x\right)-U_n\left(f;x;\Lambda\right)\right\|_X$ в асимптотичному розкладі при $n\to\infty$ виділено головний член, то кажуть, що на класі $\mathfrak{M}$ для методу підсумовування рядів Фур'є Λ в метриці X (X=C або X=L) розв'язано задачу Колмогорова-Нікольського. Вперше така задача була поставлена в [2] і розв'язана там же.

$$\text{Якщо, } \lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, & 0\le k\le n-p\\ \dfrac{n-k}{p}, & n-p+1\le k\le n-1\end{cases}\tag{1}$$

то такі лінійні середні частинних сум Фур'є називають сумами Валле-Пуссена і позначають $V_{n,p}\left(f;x\right)$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n}=0$, то кажуть, що суми Валле-Пуссена близькі до сум Фур'є. Задача Колмогорова-Нікольського на класі $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ для сум Валле-Пуссена в рівномірній метриці була розв'язана в [3].

2. Дана робота присвячена встановленню асимптотичної рівності при $n\to\infty$ для величини

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_{\infty}^{\bar{\psi}};V_{n,p}\right)=\sup_{f\in C_{\infty}^{\bar{\psi}}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i\left(n\right)\left|f^{\bar{\varphi}_i}\left(x\right)-V_{n,p}\left(f^{\bar{\varphi}_i};x\right)\right|\right\|_C\tag{2}$$

при умові, що пари $\bar{\varphi}_i=\left(\varphi_{i,1}\left(k\right);\varphi_{i,2}\left(k\right)\right)$ L-передують парі $\bar{\psi}=\left(\psi_1\left(k\right);\psi_2\left(k\right)\right)$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n}=0$.

Вперше задачу сумісного наближення функцій та їх похідних поставити таким чином запропонував Степанець О. І. в роботі [4], в якій на класі r-разів диференційовних функцій W^r для сум Фур’є $\left(S_n\left(f;x\right)=V_{n,1}\left(f;x\right)\right)$ досліджувалась величина

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(W^r\right)=\sup_{f\in W^r}\left\|\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}\left|f^{(r_i)}\left(x\right)-S_n\left(f^{(r_i)};x\right)\right|\right\|_C$$

при умові $0\le r_i\le r$. Було доведено, що при $n\to\infty$ $\mathcal{E}_{n,m}\left(W^r\right)=\frac{4}{\pi^2}\sqrt{m_0^2+m_1^2}\,\frac{\ln n}{n^r}+O\left(1\right)\frac{1}{n^r}$, де m_0 — кількість парних чисел серед цілих $r-r_i$, $m_1=m-m_0$, $O\left(1\right)$ — величина, рівномірно обмежена по n,r,r_i.

Доозначимо послідовність $\psi\left(k\right)$ з множини невід’ємних цілих чисел на промінь $\left[1;\infty\right)$, і з множини функцій $\psi\left(t\right)$, $t\ge 1$, що задовольняють умови 1)—3), виділимо підмножини $\mathfrak{M}_0$ та $\mathfrak{M}_C$ з наступними властивостями. Нехай $\eta\left(t\right)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi\left(t\right)\right)$, $\mu\left(t\right)=\frac{t}{\eta\left(t\right)-t}$. Якщо функція $\mu\left(t\right)$ при $t\ge 1$ обмежена зверху і знизу додатними числами, то віднесемо $\psi\left(t\right)$ до $\mathfrak{M}_C$, якщо ж $0<\mu\left(t\right)\le C$ при $t\ge 1$, то $\psi\left(t\right)\in\mathfrak{M}_0$. Доведемо справедливість наступного твердження.

3. **Теорема.** Якщо пари $\bar{\varphi}_i=\left(\varphi_{i,1}\left(k\right);\varphi_{i,2}\left(k\right)\right)$ L-передують парі $\bar{\psi}=\left(\psi_1\left(k\right);\psi_2\left(k\right)\right)$,

$$\eta_{i,1}\left(k\right)=\frac{\varphi_{i,1}\left(k\right)\psi_1\left(k\right)+\varphi_{i,2}\left(k\right)\psi_2\left(k\right)}{\bar{\varphi}_i^2\left(k\right)}\in\mathfrak{M}_0;$$

$$\eta_{i,2}\left(k\right)=\frac{\varphi_{2,i}\left(k\right)\psi_1\left(k\right)-\varphi_{1,i}\left(k\right)\psi_2\left(k\right)}{\bar{\varphi}_i^2\left(k\right)}\in\mathfrak{M}_C\ \left(i=\overline{1,m}\right),\ p=\alpha_n n$$

і послідовність $\alpha_n\ln n$ — обмежена, то при $n\to\infty$ для величини $\mathcal{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}};V_{n,p}\right)$ виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}};V_{n,p}\right)=\max_{\left|\alpha_i\right|=1}\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n}{p}+O\left(1\right)\bar{\psi}\left(n\right),\tag{3}$$

де $A=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,1}(n)$, $B=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,2}(n)$, $O(1)$ — величина, обмежена по n, причому $0\le\max\limits_{|\alpha_i|=1}\sqrt{A^2+B^2}\le m\bar{\psi}(n)$.

Доведення. Маємо з (2)

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar\psi};V_{n,p}\right)=\sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}}\max_x\left|\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i(n)\left|f^{\bar{\varphi}_i}(x)-V_{n,p}\left(f^{\bar{\varphi}_i};x\right)\right|\right|=$$

$$=\sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}}\max_x\max_{|\alpha_i|=1}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{\varphi}_i(n)\left(f^{\bar{\varphi}_i}(x)-V_{n,p}\left(f^{\bar{\varphi}_i};x\right)\right)\right|=$$

$$=\max_{|\alpha_i|=1}\sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{\varphi}_i(n)\left(f^{\bar{\varphi}_i}(x)-V_{n,p}\left(f^{\bar{\varphi}_i};x\right)\right)\right\|_C. \qquad (4)$$

В [5] було встановлено наступний факт. Якщо $f(x)\in C_\infty^{\bar\psi}$ $\left(\psi_1\in\mathfrak{M}_0,\psi_2\in\mathfrak{M}_C\right)$, то в кожній точці $x\in R$, при $\forall a>0$ справедлива асимптотична рівність

$$f(x)-S_n(f;x)=-\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}f^{\bar\psi}(x-t)\frac{\sin nt}{t}dt+$$

$$+\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}f^{\bar\psi}(x-t)\frac{\cos nt}{t}dt+O(1)\bar\psi(n),\ n\to\infty. \qquad (5)$$

З (1) для сум Валле-Пуссена будемо мати, що $f(x)-$ $-V_{n,p}(f;x)=\frac{1}{p}\sum\limits_{k=n-p+1}^{n}\left(f(x)-S_k(f;x)\right)$, тому згідно (5)

$$f(x)-V_{n,p}(f;x)=-\sum_{k=n-p+1}^{n}\frac{\psi_1(k)}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{k}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}f^{\bar\psi}(x-t)\frac{\sin kt}{t}dt+$$

$$+\sum_{k=n-p+1}^{n}\frac{\psi_2(k)}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{k}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}f^{\bar\psi}(x-t)\frac{\cos kt}{t}dt+O(1)\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+1}^{n}\bar\psi(k). \qquad (6)$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}=0$, то $p=\alpha_n n$, де $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Тоді при будь-яких $k\in[n-p+1;n]$ для $\psi(k)\in\mathfrak{M}_0$

$$\psi\left(k\right)=\psi\left(n\right)+O\left(1\right)\alpha_n\psi\left(n\right),\ n\to\infty. \tag{7}$$

При цих же умовах для будь-якого $a>0$ і $\|\varphi\|_\infty = = \operatorname*{esssup}_x\left|\varphi\left(x\right)\right|\le 1$ справедливі асимптотичні рівності:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{a}{k}} \varphi\left(x-t\right)\frac{\sin kt}{t}dt=O\left(1\right)\alpha_n;\\ &\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{a}{k}} \varphi\left(x-t\right)\frac{\cos kt}{t}dt=O\left(1\right)\alpha_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи оцінки (7), (8), включення $\mathfrak{M}_C\subset\mathfrak{M}_0$, обмеження $\alpha_n\ln n=O\left(1\right)$, із співвідношення (6), можна одержати наступну рівність

$$f\left(x\right)-V_{n,p}\left(f;x\right)=$$

$$=-\frac{\psi_1\left(n\right)}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\overline{\psi}}\left(x-t\right)\frac{\sin\frac{p}{2}t\sin\frac{2n-p+1}{2}t}{t\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\frac{\psi_2\left(n\right)}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\overline{\psi}}\left(x-t\right)\frac{\sin\frac{p}{2}t\cos\frac{2n-p+1}{2}t}{t\sin\frac{t}{2}}dt+O\left(1\right)\overline{\psi}\left(n\right), \tag{9}$$

де $\psi_1\in\mathfrak{M}_0,\psi_2\in\mathfrak{M}_C$, $n\to\infty$.

Як випливає із [1] для $f\left(x\right)\in C_\infty^{\overline{\psi}}$ при умові $\overline{\varphi}_i\overset{L}{<}\overline{\psi}$ $f^{\overline{\varphi}_i}\left(x\right)\in C_\infty^{\overline{\eta}_i}$, де пари $\overline{\eta}_i=\left(\eta_{i,1}\left(k\right);\eta_{i,2}\left(k\right)\right)$ вибрані згідно умов теореми, крім того, $\overline{\varphi}_i\left(n\right)\overline{\eta}_i\left(n\right)=\overline{\psi}\left(n\right)$. Тому для довільної функції $f\left(x\right)$ із класу $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в $\forall x\in R$ згідно (9) матимемо

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\overline{\varphi}_i\left(n\right)\left(f^{\overline{\varphi}_i}\left(x\right)-V_{n,p}\left(f^{\overline{\varphi}_i};x\right)\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i \bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,1}(n)}{\pi p} \int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin\frac{p}{2}t \sin\frac{2n-p+1}{2}t}{t\sin\frac{t}{2}} dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i \bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,2}(n)}{\pi p} \int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin\frac{p}{2}t \cos\frac{2n-p+1}{2}t}{t\sin\frac{t}{2}} dt +$$

$$+O(1)\sum_{i=1}^{m} \bar{\varphi}_i(n)\bar{\eta}_i(n) =$$

$$= \frac{1}{\pi p} \int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin\frac{p}{2}t\left(-A\sin\frac{2n-p+1}{2}t + B\cos\frac{2n-p+1}{2}t\right)}{t\sin\frac{t}{2}} dt +$$

$$+O(1)\bar{\psi}(n) = -\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pi p}\times$$

$$\times \int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin\frac{p}{2}t \sin\frac{(2n-p+1)t+\theta_n}{2}}{t\sin\frac{t}{2}} dt + O(1)\bar{\psi}(n), \quad (10)$$

де $A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,1}(n)$, $B = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{\varphi}_i(n)\eta_{i,2}(n)$, $\operatorname{tg}\theta_n = \frac{B}{A}$.

Об'єднаємо співвідношення (4) та (10) і одержимо, що

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}; V_{n,p}\right) = \max_{|\alpha_i|=1} \sqrt{A^2+B^2}\times$$

$$\times \sup_{f\in C_\infty^{\bar{\psi}}} \left\| \frac{1}{\pi p} \int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\bar{\psi}}(x-t) \frac{\sin\frac{p}{2}t \sin\frac{(2n-p+1)t+\theta_n}{2}}{t\sin\frac{t}{2}} dt \right\|_C +$$

$$+O(1)\psi(n). \tag{11}$$

Користуючись результатами роботи [6] та запропонованою в ній методикою, можна довести: при $\forall\beta\in R,\ p\in\left[\left[\frac{n}{2}\right]+1;n\right]$

$$\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left\|\frac{1}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f^{\overline{\psi}}(x-t)\frac{\sin\frac{p}{2}t\sin\frac{(2n-p+1)t+\beta}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}dt\right\|_C =$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_\infty\le1}\left\|\frac{1}{\pi p}\int\limits_{\frac{a}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \varphi(x-t)\frac{\sin\frac{p}{2}t\sin\frac{(2n-p+1)t+\theta_n}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}dt\right\|_C =$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n}{p}+O(1). \tag{12}$$

Оскільки $|A|\le\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n)\eta_{i,1}(n)\le m\overline{\psi}(n)$, аналогічно $|B|\le m\overline{\psi}(n)$, то

$$\max_{|\alpha_i|=1}\sqrt{A^2+B^2}=O(1)\overline{\psi}(n). \tag{13}$$

Об'єднуємо асимптотичні співвідношення (11), (12) та (13) і одержуємо (3). Теорема доведена.

4. Якщо в даній теоремі вибрати $p=1$, то одержуємо результати робіт, присвячених сумісному наближенню класів функцій сумами Фур'є (див., напр., [5, Т.2]). Якщо до того ж вибрати $\psi_1(k)=\frac{1}{k^r}\cos\frac{r\pi}{2}$; $\psi_2(k)=\frac{1}{k^r}\sin\frac{r\pi}{2}$; $\varphi_{i,1}(k)=\frac{1}{k^{r_i}}\cos\frac{r_i\pi}{2}$; $\varphi_{2,i}(k)=$ $=\frac{1}{k^{r_i}}\sin\frac{r_i\pi}{2}\ (r,\ r_i\in N_0)$, то матимемо результати, доведені в [4].

Нехай $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Через H_ω позначимо множину неперервних функцій $f(x)\in L$, для яких $\omega(f;t)\le\omega(t)$. Через $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ позначимо множину функцій

$f(x) \in L^{\overline{\psi}}$, для яких $f^{\overline{\psi}}(x) \in H_{\omega}$. На класах $C^{\overline{\psi}} H_{\omega}$ можна одержати асимптотичні рівності, аналогічні до (3), використовуючи схему доведення нашої теореми та результати робіт [5, 6].

Список використаних джерел:

1. Сорич В. А. Умови *L*-передування $\overline{\psi}$ -похідних / В. А. Сорич, Н. М. Сорич, А. В. Сорич // Наукові праці Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. Збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів. У 2-х томах. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський державний університет, 2002. — Т. 2. — С. 6—9.
2. Колмогоров А. М. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen / А. М. Колмогоров // Ann. Math. — 1935. — 36. — S. 521—526.
3. Рукасов В. И. Приближение классов $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ методами Валле-Пуссена / В. И. Рукасов, О. А. Новиков, С. О. Чайченко // Теорія наближення функцій та її застосування. — К. : Ін-т математики НАН України. — 2000. — С. 396—406.
4. Степанец А. И. Одновременное приближение тригонометрических функций и их производных суммами Фурье / А. И. Степанец // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 3. — С. 543—544.
5. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Праці Інституту математики НАНУ, 2002. — Т. 1. — 426 с.; — Т. 2. — 467 с.
6. Ефимов А. В. О приближении функций суммами Валле-Пуссена / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23, № 5. — С. 737—770.

The asymptotically precise equalities for linear combinations of classes of rolls approximated by Vallee-Poussin's sums approximate to the Fourier's sums in *C*-metric have been found.

Key words: *the joint approximation,* $\overline{\psi}$ *-integrals, Vallee-Poussin's sums.*

Отримано: 10.09.2009