УДК 539.3

**А. П. Громик**[*]**,** викладач,

**І. М. Конет**[**]**,** д-р фіз.-мат. наук

[*]Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,

[**]Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

# ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

**Ключові слова:** *диференціальне рівняння Пуассона, інтегральні перетворення, фундаментальні розв'язки.*

**Вступ.** Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багатошарових) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес на сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу [5, 7, 14, 15, 19]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [8—10, 12]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових і тришарових просторових середовищах побудовано у працях [2—4, 11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою просторових середовищах.

**Постановка задачі.** Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному напівобмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \Big\{ (x,y,z) \Big| (x,y) \in \Omega_2 = \langle a;b \rangle \times \langle c;d \rangle;$$

$$z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \ge 0; l_{n+1} = \infty \Big\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [6, 17]

$$\left[ a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x,y,z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x,y), \frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p}\Big|_{z=\infty} = 0; p = 0,1, \quad (2)$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} [(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1)T_k - T_{k+1}]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ (\nu_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z})\Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області $\Omega_2$, де $a_{xj}, a_{yj}, a_{zj} \geq 0$ — коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x, y, z\left(j = \overline{1, n+1}\right)$; $\chi_j^2 \geq 0$ — коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(x,y,z) = \left\{f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), ..., f_{n+1}(x,y,z)\right\}$ — інтенсивність теплових джерел; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ — деякі дійсні сталі; $g_0\left(x,y\right)$ — задана обмежена неперервна функція в області $\Omega_2$; $R_k \geq 0$ — коефіцієнти термоопору; $\nu_k, \nu_{k+1} \geq 0$ — коефіцієнти теплопровідності; $T\left(x,y,z\right) = \left\{T_1\left(x,y,z\right), T_2\left(x,y,z\right), ..., T_{n+1}\left(x,y,z\right)\right\}$ — шукана температура.

**Основні результати. 1.** $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області $\Omega_2$ виконуються крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\Big|_{x=\pm\infty} = 0; k = 0,1; j = \overline{1, n+1} \quad (4)$$

щодо змінної $x$ та крайові умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0,1; j = \overline{1, n+1} \quad (5)$$

щодо змінної $y$.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [13, 16, 12].

До задачі (1)—(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної $x$ [13, 16]:

$$F_x\left[g\left(x\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}\left(\sigma\right), \quad (6)$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde g(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde g(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g(x), \qquad (7)$$

$$F_x\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x\left[g(x)\right]\equiv-\sigma^2\tilde g(\sigma). \qquad (8)$$

Інтегральний оператор $F_x$ за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)—(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3'=\left\{(y,z)\middle|\, y\in(-\infty;+\infty);z\in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde T_j-\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde T_j=-\tilde f_j(\sigma,y,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \qquad (9)$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde T_1\right|_{z=l_0}=\tilde g_0(\sigma,y),\left.\frac{\partial^p\tilde T_{n+1}}{\partial z^p}\right|_{z=+\infty}=0;p=0,1, \qquad (10)$$

$$\left.\frac{\partial^k\tilde T_j}{\partial y^k}\right|_{y=\pm\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \qquad (11)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left.\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\tilde T_k-\tilde T_{k+1}\right]\right|_{z=l_k}=0,\\ \left.\left(\nu_k\frac{\partial\tilde T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\tilde T_{k+1}}{\partial z}\right)\right|_{z=l_k}=0,\ k=\overline{1,n}.\end{cases} \qquad (12)$$

До задачі (9)—(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної $y$ [13, 16]:

$$F_y\left[g(y)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(y)\,e^{-isy}dy\equiv\tilde g(s), \qquad (13)$$

$$F_y^{-1}\left[\tilde g(s)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde g(s)\,e^{isy}ds\equiv g(y), \qquad (14)$$

$$F_y\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2F_y\left[g(y)\right]\equiv-s^2\tilde g(s). \qquad (15)$$

Інтегральний оператор $F_y$ за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)—(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $I_n^+$ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2\right)\right]\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z) = -\tilde{\tilde{f}}_j\left(\sigma,s,z\right);\ z \in I_j \quad (16)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{T}}_1\Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s), \quad \frac{d^p\tilde{\tilde{T}}_{n+1}}{dz^p}\Big|_{z=+\infty} = 0;\ p = 0,1 \quad (17)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{d}{dz} + 1\right)\tilde{\tilde{T}}_k - \tilde{\tilde{T}}_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{d\tilde{\tilde{T}}_k}{dz} - \nu_{k+1}\frac{d\tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{dz}\right)\Big|_{z=l_k} = 0,\ k = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (18)$$

До задачі (16)—(18) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $z \ge l_0 \ge 0$ з $n$ точками спряження [12]:

$$F_{n,+}\left[g(z)\right] = \int_{l_0}^{+\infty} g(z)\,V(z,\beta)\,\sigma(z)\,dz \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (19)$$

$$F_{n,+}^{-1}\left[\tilde{g}(\beta)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta)\,V(z,\beta)\,\Omega_n(\beta)\,d\beta \equiv g(z), \quad (20)$$

$$F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^2\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j - z\right)\frac{d^2g}{dz^2} + a_{n+1}^2\theta\left(z-l_n\right)\frac{d^2g}{dz^2}\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} \frac{d^2g}{dz^2} V_j(z,\beta)\,\sigma_j dz = -\beta^2\tilde{g}(\beta) -$$

$$-\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0,\beta)\left(\alpha_{11}^0\frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g\right)\Big|_{z=l_0} - \sum_{j=1}^{n+1} k_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z)V_j(z,\beta)\,\sigma_j dz. \quad (21)$$

У рівностях (19)—(21) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\beta) = \sum_{k=1}^{n} V_k(z,\beta)\,\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k - z\right) + V_{n+1}(z,\beta)\,\theta\left(z-l_n\right);$$

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k - z\right) + \sigma_{n+1}\theta\left(z-l_n\right);$$

$$V_m(z,\beta)=\prod_{j=m}^{n}c_{2j}q_{n+1}\left(\beta^2\right)G_m(z,\beta);m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\beta)=\omega_{n2}(\beta)\cos\left(q_{n+1}\left(\beta^2\right)z\right)-\omega_{n1}(\beta)\sin\left(q_{n+1}\left(\beta^2\right)z\right);$$

$$\sigma_k=\prod_{j=k}^{n}\frac{c_{1j}a_{n+1}}{c_{2j}a_k^2};\sigma_n=\frac{c_{1n}a_{n+1}}{c_{2n}a_n^2};\sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}};$$

$$G_k(z,\beta)=\omega_{k-1,2}(\beta)\cos\left(q_k\left(\beta^2\right)z\right)-\omega_{k-1,1}(\beta)\sin\left(q_k\left(\beta^2\right)z\right);k=\overline{1,n};$$

$$q_j\left(\beta^2\right)=a_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};j=\overline{1,n+1};b_j\left(\beta^2\right)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};j=\overline{1,n+1};$$

$$\omega_{01}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{01}(q_1l_0);\omega_{02}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{02}(q_1l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta)=\omega_{j-1,2}(\beta)\psi_{1m}^{j}\left(q_jl_j;q_{j+1}l_j\right)-\omega_{j-1,1}(\beta)\psi_{2m}^{j}\left(q_jl_j;q_{j+1}l_j\right);$$

$$\psi_{jm}^{k}(q_kl_k;q_{k+1}l_k)=\nu_{11}^{kj}(q_kl_k)\nu_{22}^{km}(q_{k+1}l_k)-\nu_{21}^{kj}(q_kl_k)\nu_{12}^{km}(q_{k+1}l_k);$$

$$\nu_{ij}^{k1}(q_sl_m)=-\alpha_{ij}^{k}q_s\sin(q_sl_m)+\beta_{ij}^{k}\cos(q_sl_m);i,\ j=1,2;k=\overline{1,n};$$

$$\nu_{ij}^{k2}(q_sl_m)=\alpha_{ij}^{k}q_s\cos(q_sl_m)+\beta_{ij}^{k}\sin(q_sl_m);s=\overline{1,n+1};m=\overline{1,n+1};$$

$$\alpha_{11}^{k}=R_k;\beta_{11}^{k}=1;\alpha_{12}^{k}=0;\beta_{12}^{k}=1;\alpha_{21}^{k}=\nu_k;\beta_{21}^{k}=0;\alpha_{22}^{k}=\nu_{k+1};\beta_{22}^{k}=0;$$

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0;i,\ j=1,2;k=\overline{1,n};$$

$$\omega_n(\beta)=\left[\omega_{n1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{n2}(\beta)\right]^2;\Omega_n(\beta)=\frac{\beta}{b_{n+1}(\beta^2)\,\omega_n(\beta)}.$$

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(a_1^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_1^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_1(\sigma,s,z)\\ \left(a_2^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_2^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_2(\sigma,s,z)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left(a_{n+1}^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_{n+1}^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}(\sigma,s,z)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}_1(\sigma,s,z)\\ \tilde{\tilde{f}}_2(\sigma,s,z)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}(\sigma,s,z)\end{bmatrix},\qquad(22)$$

де

$$q_j^2(\sigma,s)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2;\ a_j^2\equiv a_{zj}^2;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[...]=\left[\int\limits_{l_0}^{l_1}...V_1(z,\beta)\sigma_1dz...\int\limits_{l_{n-1}}^{l_n}...V_n(z,\beta)\sigma_ndz\int\limits_{l_n}^{+\infty}...V_{n+1}(z,\beta)\sigma_{n+1}dz\right] \tag{23}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до системи (22). Внаслідок тотожності (21) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\beta^2+k_j^2+q_j^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(\sigma,s,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(\sigma,s,\beta)-$$

$$-\sigma_1a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s), \tag{24}$$

де

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(\sigma,s,\beta)=\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_jdz,\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(\sigma,s,\beta)=\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_jdz,\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,...,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$, і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2$ $(i=\overline{1,n+1})$. Рівняння (24) набуває вигляду

$$\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(\sigma,s,\beta)=$$

$$=\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(\sigma,s,\beta)-\sigma_1a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s), \tag{25}$$

де

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(\sigma,s,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(\sigma,s,\beta),\ \tilde{\tilde{\tilde{f}}}(\sigma,s,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(\sigma,s,\beta).$$

Із рівняння (25) знаходимо функцію

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(\sigma,s,\beta)=\frac{\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(\sigma,s,\beta)}{\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{\sigma_1a_1^2\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)V_1(l_0,\beta)}{\alpha_{11}^0\left(a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}. \tag{26}$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[...] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} ...V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} ...V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} ...V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \end{bmatrix}. \quad (27)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (27) до матриці-елемента $[\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(\sigma,s,\beta)]$, де функція $\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(\sigma,s,\beta)$ визначена формулою (26). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (16)—(18):

$$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(\sigma,s,\beta)V_j(z,\beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2}\Omega_n(\beta)\,d\beta -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)V_j(z,\beta)}{\alpha_{11}^0\left(\beta + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2\right)}\Omega_n(\beta)\,d\beta;\ j = \overline{1, n+1}. \quad (28)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z)$, визначених формулами (28), обернені оператори $F_y^{-1}$ та $F_x^{-1}$, одержуємо функції

$$T_j(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\, f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_j(x,\xi,y,\eta,z)\, g_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta;\ \overline{j = 1, n+1}, \quad (29)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (29) беруть участь компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \frac{2}{\pi^3}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2} \times$$

$$\times\Omega_n(\beta)\cos(|x-\xi|\sigma)\cos(|y-\eta|s)\,d\sigma ds d\beta;\ j,k = \overline{1, n+1}$$

та аплікатної матриці Гріна

$$W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}\left(x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(5).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(x,y,z\right)$, визначені формулами (29), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (4), (5) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що якщо функції $f_j\left(x,y,z\right)$ задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (29) буде також класичним розв'язком задачі (1)—(5).

**Зауваження 1.** У випадку $a_{xj}^2=a_{yj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (29) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному напівобмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі.

**Зауваження 2**. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору $R_k$ дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

**Зауваження 3.** При $R_k=0(k=\overline{1,n})$ безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

**Зауваження 4.** Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0$ дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1-го роду ( $\alpha_{11}^0=0,\beta_{11}^0=1,g_0\left(x,y\right)=\alpha_{11}^0 T_0\left(x,y\right)$, $T_0\left(x,y\right)$ — температура середовища на поверхні $z=l_0$ ), 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1,\beta_{11}^0=0\right)$ та 3-го роду ( $\alpha_{11}^0=-1,\ \beta_{11}^0\equiv h_1>0,\ h$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $z=l_0$ ).

**Зауваження 5.** Аналіз розв'язку (29) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x,y,z)\ (j=\overline{1,n+1}),\quad g_0(x,y)$ проводиться безпосередньо.

**2.** $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області $\Omega_2$ виконуються крайові умови (4) щодо змінної $x$ та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Big|_{y=0}=g_j(x,z);\ \left.\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \quad (30)$$

щодо змінної $y$, де $h\geq 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $g_j(x;z)=hT_j^c(x,z), T_j^c(x,z)$ — температура середовища на поверхні $y=0$.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(4), (30) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [13, 16, 12].

До задачі (1)—(4), (30) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної $x$. Інтегральний оператор $F_x$ за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)—(4), (30) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3'=\left\{(y,z)\middle| y\in(0;+\infty); z\in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) з крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0}=\tilde{g}_j(\sigma,z),\ \left.\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \quad (31)$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (31), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної $y$ [13]:

$$F_{+y}\left[g(y)\right]=\int\limits_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)dy\equiv\tilde{g}(s), \quad (32)$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right]=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{g}(s)K_y(y,s)ds\equiv g(y), \quad (33)$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left.\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\right|_{y=0}, \quad (34)$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор $F_{+y}$ за правилом (32) внаслідок тотожності (34) крайовій задачі (9), (10), (31), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $I_n^+$ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\right]\tilde{\tilde{T}}_j\left(\sigma,s,z\right)=-\tilde{\tilde{F}}_j\left(\sigma,s,z\right);z\in I_j \quad (35)$$

з крайовими умовами (17) та умовами спряження (18), де

$$\tilde{\tilde{F}}_j\left(\sigma,s,z\right)=\tilde{\tilde{f}}_j\left(\sigma,s,z\right)+a_{yj}^2K_y\left(0,s\right)\tilde{g}_j\left(\sigma,z\right);\ j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (35), (17), (18) збігається із задачею (16)—(18). Побудований методом інтегрального перетворення Фур’є на декартовій півосі $z\geq l\geq 0$ з $n$ точками спряження єдиний обмежений розв’язок задачі (35), (17), (18) відповідно до формул (28) визначають функції

$$\tilde{\tilde{T}}_j\left(\sigma,s,z\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tilde{\tilde{\tilde{F}}}\left(\sigma,s,\beta\right)V_j\left(z,\beta\right)}{\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}\Omega_n\left(\beta\right)d\beta-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sigma_1a_1^2\tilde{\tilde{g}}_0\left(\sigma,s\right)V_j\left(z,\beta\right)V_1\left(l_0,\beta\right)}{\alpha_{11}^0\left(\beta+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}\Omega_n\left(\beta\right)d\beta;\ j=\overline{1,n+1}. \quad (36)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_j\left(\sigma,s,z\right)$, визначених формулами (36), обернені оператори $F_{+y}^{-1}$ та $F_x^{-1}$, одержуємо функції

$$T_j\left(x,y,z\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)f_k\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_kd\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta+$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}\left(x,\xi,y,z,\zeta\right)g_k\left(\xi,\zeta\right)\sigma_kd\xi d\zeta;\ j=\overline{1,n+1}, \quad (37)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (37) беруть участь компоненти:
фундаментальної матриці розв’язків

$$E_{jk}\left(x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{V_j\left(z,\beta\right)V_k\left(\zeta,\beta\right)}{\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}\times$$

$$\times\Omega_n\left(\beta\right)\cos\left(\left|x-\xi\right|\sigma\right)K_y\left(y,s\right)K_y\left(\eta,s\right)d\sigma dsd\beta;\ j,k=\overline{1,n+1},$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}\left(x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$$

та ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}\left(x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(4), (30).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{yjk}\left(x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(x,y,z\right)$, визначені формулами (37), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (4), (30) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зауважимо, що якщо функції $f_j\left(x,y,z\right),g_j\left(x,z\right)$ задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (37) буде також класичним розв'язком задачі (1)—(4), (30).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1—4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр $h$ дає можливість виділяти із формул (37) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $y=0$ крайових умов 1-го роду $\left(h\to\infty\right)$ та 2-го роду $\left(h\to 0\right)$; 3) аналіз розв'язку (37) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x,y,z),g_j(x,z),(j=\overline{1,n+1})$ та $g_0(x,y)$ проводиться безпосередньо.

**Висновки.** При найбільш загальних припущеннях у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та вихідних даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях еліптичних крайових задач, так і в практиці інженерних розрахунків задач теплофізики з використанням сучасної комп'ютерної техніки.

## Список використаних джерел:


1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. — М : Мир, 1964. — 517 с.
2. Громик А. П., Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2006. — Вип. 13. — С. 52—65.
3. Громик А. П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2006. — Вип. 14. — С. 36—50.
4. Громик А. П. Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2009. — Вип. 18. — С. 54—67.

5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер — М. : Наука, 1964. — 448 с.
7. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
8. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
9. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
10. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
11. Конет І. М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр., — Чернівці : Прут, 2006. — Вип.14. — С.84—96.
12. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
13. Ленюк М. П. Интегральные преобразования з разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
14. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
15. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : Из-во иностр. лит., 1956. — 668 с.
17. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
19. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах / Г. Ф. Шилин. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 1983. — 115 с.
20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the semi limited cobbed-homogeneous space areas.

**Key words:** *differential equalization Puassona, integral transformations, fundamental solutions.*

Отримано: 05.07.2009