

УДК 518.1:519.6

А. Н. Хомченко, Н. А. Козуб

Херсонский национальный технический университет

ТРИ СПОСОБА ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСОВ СЕРЕНДИПОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Проиллюстрированы три разных подхода к задаче конструирования базисных полиномов на примере серендипового конечного элемента с 12-ма узлами.

Ключевые слова: *серендипов конечный элемент.*

*Посвящается 120-летию
со дня рождения Р. Куранта*

Введение, постановка проблемы. История метода конечных элементов (МКЭ) началась в 1943 г., когда Р. Курант опубликовал свою знаменитую работу [1]. Через 25 лет Эргатудис, Айронс и Зенкевич создали очень полезное семейство серендиповых конечных элементов (СКЭ). За последние 40 лет в учебной и монографической литературе по МКЭ сложилось, на наш взгляд, ошибочное представление о единственности базиса для конкретной модели СКЭ с фиксированным количеством узлов. Кроме того, создатели СКЭ и их последователи, похоже, смирились с проблемой “негативизма” в поузловом распределении равномерной массовой силы на СКЭ высших порядков [2]. Конечно, это вредит репутации СКЭ, особенно в глазах приверженцев механических аналогий. Чтобы уловить специфику серендиповых моделей, лучше отказаться от некоторых стандартных подходов, привычка к которым воспитана на достижениях матричной алгебры и вековых традициях одномерной интерполяции по Лагранжу [3-6]. Здесь уместно привести слова А. Эйнштейна: “Ты никогда не решишь проблему, если будешь думать так же, как те, кто ее создал”. О серендиповых элементах писали многие авторитетные специалисты; только надежда сказать что-то свое может оправдать новую попытку.

Анализ предшествующих публикаций, постановка задачи. СКЭ появились в результате настойчивых попыток исключить внутренние узлы на квадратных элементах лагранжева семейства [7]. Первые элементы были найдены неожиданно путем изобретательного подбора подходящих полиномов, поэтому О. Зенкевич [2] предложил название – “серендиповы”. После того, как и другие способы построения базисов СКЭ привели к тем же результатам, возникло обманчивое ощущение устойчивости базиса по отношению к способу его построения. В основной части статьи будет показано, как это происходит. Многие ошибочно приняли это совпадение за доказательство единственности решения задачи серендиповой интерполя-

ции. Тем более, что для лагранжевой интерполяции единственность имеет место. Возможно, поэтому поиски смежных базисов фактически прекратились. Первые успешные попытки геометрического конструирования базисов СКЭ в 2D и 3D описаны в [8-10]. Главное достижение геометрического моделирования – создание альтернативных базисов. Эти базисы открывают совершенно новые возможности для постановки и решения актуальных задач оптимизации базисов [11], а также обратных задач серендиповых аппроксимаций [12].

Цель статьи – на примере СКЭ-12 проиллюстрировать 3 различных подхода к задаче конструирования базисных полиномов, показать полученные геометрически альтернативные (смежные) базисы.

Основная часть. СКЭ-12 – это серендипов конечный элемент с 12 узлами (рис. 1). Соответствующий лагранжев КЭ имеет 16 узлов, 4 из которых расположены внутри КЭ. Как видим, в СКЭ оставлены только господствующие узлы, осуществляющие межэлементные связи.

$$|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1.$$

Наша задача сводится к построению полинома $N(\xi, \eta)$ от двух переменных, сохраняющего геометрическую изотропию и удовлетворяющего интерполяционной гипотезе:

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \tag{1}$$

где i – номер базисной функции ($i = \overline{1,12}$), k – номер узла интерполяции ($k = \overline{1,12}$), δ_{ik} – символ Кронекера.

Понятно, что таких полиномов должно быть 12, по числу узлов интерполяции.

1 способ. Этот алгебраический способ построения базиса получил наибольшее распространение в МКЭ [2-6]. Сначала выбирается 12-параметрический полином с двумя аргументами

$$N(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3. \tag{2}$$

Первые 10 слагаемых образуют полный полином 3-й степени.

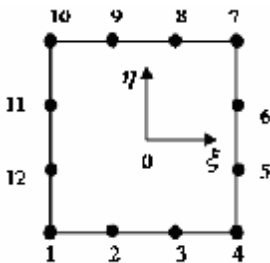


Рис. 1. Серендипов КЭ с кубичным изменением поля

Недостающие два члена в (2) выбирают из группы членов 4-й степени так, чтобы сохранить геометрическую изотропию и обеспечить кубическое изменение функции вдоль координатных направлений ξ и η на границах СКЭ. При регулярном расположении узлов (рис. 1) достаточно построить только две базисные функции: “угловую” и “промежуточную”. Понятно, что интерполяционная гипотеза (1) сводит задачу к составлению и решению СЛАУ 12×12 .

Например, для углового узла 1 получается

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10), \quad (3)$$

для промежуточного узла 2

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta). \quad (4)$$

Вообще, для угловых узлов $i = 1, 4, 7, 10$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10), \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (5)$$

Для промежуточных узлов $i = 2, 3, 8, 9$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+9\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (6)$$

Остальные функции базиса получаются из (6) перестановкой ξ и η .

Единственность базиса (5), (6) в этом способе интерполяции обусловлена отличием от нуля определителя матрицы СЛАУ.

II способ. Здесь используется идея представления квадратного КЭ в виде композиции из четырех отрезков (сторон квадрата). Для функций в промежуточных узлах удается разделить переменные, что приводит к перемножению одномерных полиномов Лагранжа в соответствующих направлениях ξ и η . Функции в угловых узлах комбинируются из соответствующих билинейных функций и функций в промежуточных узлах. Аналогичный пример используют авторы [3] для построения более простого базиса на СКЭ-8.

Сначала, взяв соответствующий многочлен Лагранжа третьей степени по одному направлению и умножив его на линейную функцию по другому направлению, найдем базисные функции для промежуточных узлов. Например,

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta);$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)(1-\eta);$$

$$N_{11}(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1+3\eta)(1-\xi);$$

$$N_{12}(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1-3\eta)(1-\xi).$$

Теперь для углового узла 1 можно использовать линейную комбинацию билинейной базисной функции $\overline{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ с

функциями N_2, N_3, N_{11}, N_{12} . Коэффициенты линейной комбинации подбираем, исходя из интерполяционной гипотезы (1):

$$N_1(\xi, \eta) = \overline{N_1}(\xi, \eta) - \frac{2}{3}(N_2(\xi, \eta) + N_{12}(\xi, \eta)) - \frac{1}{3}(N_3(\xi, \eta) + N_{11}(\xi, \eta)).$$

После простых алгебраических преобразований получаем функцию (3).

Как видим, и второй способ дает тот же результат. Так возникает уверенность в “единственности” базиса СКЭ-12. Именно этот базис уже десятки лет “кочует” из одной книги в другую. То же самое произошло и с другими элементами: плоским СКЭ-16 и пространственными СКЭ-32 и СКЭ-44. Между тем, на этих СКЭ мы обнаружили много (даже бесконечно много) базисов, которые обеспечивают межэлементную непрерывность, сохраняют геометрическую изотропию и удовлетворяют интерполяционную гипотезу. Таким образом, СКЭ высших порядков оказались много сложнее и разнообразнее, чем казалось раньше. Хороший пример неединственности базиса мы находим в векторной алгебре, где для представления любого вектора можно предложить бесчисленное множество базисов. Конечно, всегда находятся какие-то критерии для выбора “лучшего” базиса. Предложенные разработчиками СКЭ базисы трудно назвать лучшими, хотя бы потому, что они приводят к неестественному поузловому распределению равномерной массовой силы СКЭ. Есть и другие недостатки. Прежде, чем перейти к описанию третьего способа конструирования базиса СКЭ-12, полезно обратить внимание на геометрические особенности поверхностей $N_i(\xi, \eta)$. Например, $N_1(\xi, \eta)$ представляет собой композицию двух поверхностей: гиперболического параболоида (гипара) с линиями нулевого уровня $\xi = 1, \eta = 1$ и параболоида вращения с линией нулевого уровня – окружностью $\xi^2 + \eta^2 = \frac{10}{9}$. Как видим, этот полином имеет нежелательные [13]

кратные нули в узлах 5, 6, 7, 8, 9. Поверхность $N_2(\xi, \eta)$ сконструирована из того же гипара с линиями нулевого уровня $\xi = 1, \eta = 1$ и параболического цилиндра с линиями нулевого уровня $\xi = -1,$

$\xi = \frac{1}{3}$. Оказывается, существуют другие подходящие комбинации исходных геометрических объектов.

III способ (геометрический). Желая подчеркнуть преимущества геометрического конструирования, мы сразу покажем один из новых (альтернативных) базисов СКЭ-12. Необходимо отметить особую роль гипара. Эта поверхность является обязательной составляющей всех серендиповых моделей. Другие составляющие подбираются с

учетом интерполяционной гипотезы, а также условия сохранения весового баланса

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (7)$$

Чтобы получить новую базисную функцию $N_1(\xi, \eta)$ можно в (3) заменить параболоид вращения параболическим цилиндром. Эта поверхность проходит через узлы 2, 3, 11, 12 и точку $(-1; -1; 1)$ так, что в пересечении с плоскостью нулевого уровня образуются две прямые 2-12 и 3-11.

Искомый полином имеет вид:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 - \xi)(1 - \eta)(9(1 + \xi + \eta)^2 - 1).$$

Этот полином удастся разложить на четыре линейных сомножителя. Это означает, что поверхность $N_1(\xi, \eta)$ образуется “перемножением” четырех плоскостей, проходящих через общую точку $(-1; -1; 1)$. При этом первая плоскость проходит через узлы 4 и 7, вторая – через 7 и 10, третья – через 2 и 12, четвертая – через 3 и 11 (рис. 1).

В общем случае для $i = 1, 4, 7, 10$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9(1 - \xi_i \xi - \eta_i \eta)^2 - 1), \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (8)$$

При построении $N_2(\xi, \eta)$ можно использовать четыре плоскости с общей точкой $\left(-\frac{1}{3}; -1; 1\right)$. При этом первая плоскость должна проходить через узлы 4 и 7, вторая – через 7 и 10, третья – через 10 и 1, четвертая – через 3 и 9 (рис. 1). Тогда

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 - \eta)(-3\xi - \eta). \quad (9)$$

Вообще, для $i = 2, 3, 8, 9$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(9\xi_i \xi + \eta_i \eta), \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (10)$$

Легко заметить, что в этой модели удалось резко уменьшить количество кратных нулей в узлах. Новый базис относится к суперпараметрическому, поскольку появился тринадцатый параметр, ассоциируемый с членом $\xi^2 \eta^2$. Поэтому свойства базиса изменились не только количественно, но и качественно. Так, спектр поузлового распределения равномерной массовой силы уже не содержит отрицательных нагрузок.

Двух базисов (5), (6) и (8), (10) уже вполне достаточно, чтобы генерировать бесчисленное множество подходящих базисов по формуле взвешенного усреднения

$$N_i(\xi, \eta) = \alpha N_i'(\xi, \eta) + (1 - \alpha) N_i''(\xi, \eta), \quad (11)$$

где $N_i'(\xi, \eta)$ – первый базис (с параболоидом вращения); $N_i''(\xi, \eta)$ – второй базис (с параболическим цилиндром); $0 \leq \alpha \leq 1$ – весовой коэффициент.

С помощью весового коэффициента α удобно управлять серендиповой поверхностью. Например, арифметическое усреднение ($\alpha = 0,5$) дает третью модель СКЭ-12:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (9(\xi^2 + \eta^2 + \xi_i \xi \eta_i \eta - \xi_i \xi - \eta_i \eta) - 1),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \xi_i, \eta_i = \pm 1;$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (18 \xi_i \xi + \eta_i \eta + 1), \quad i = 2, 3, 8, 9;$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1.$$

Интересно отметить, что при усреднении параболоида вращения и параболического цилиндра образуется эллиптический параболоид. Некоторые новые модели СКЭ-12 и результаты их тестирования приведены в статье [14].

Выводы. Геометрическое моделирование СКЭ показывает, что исключение внутренних узлов лагранжевой интерполяции не только уменьшает объем вычислений, но и (что гораздо важнее) улучшает качества серендиповых моделей. В настоящее время изучаются возможности обобщения полученных результатов на трехмерные СКЭ. Первые результаты свидетельствуют об исключительной роли когнитивной компьютерной графики [15] в моделировании трехмерных СКЭ.

Список использованной литературы:

1. Courant R. L. Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bulletin of the American Mathematical Society. – Vol. 49, 1943. – P.1-23.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
6. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
7. Ergatoudis I., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Curved isoparametric, “quadrilateral” elements for finite element analysis // Int. J. Solids Struct. – Vol. 4. – 1968. – P.31-42.

8. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / Ив.-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 с.; Деп. в ВИНТИ 18.03.82, №1213.
9. Хомченко А. Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. Симп. по диффер. и интегр. уравнениям: Тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С.257-258.
10. Хомченко А. Н., Камаева Л. И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн. межвуз. сб. – Горький: ГГУ, 1985. – С.14-17.
11. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Оптимизация спектров узловых нагрузок на серендиповых элементах высших порядков // Тези доп. V міжн. конф. “Матем. та програм. забезпечення інтелект. систем”. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. – С.11.
12. Хомченко А. Н., Астионенко И. А., Литвиненко Е. И. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов // Вестн. Херс. нац. техн. ун-та. – 28(2). – Херсон: ХНТУ, 2007. – С.383-389.
13. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
14. Козуб Н. А., Манойленко Е. С., Хомченко А. Н. Температурный тест для модифицированных базисов бикубической интерполяции // ААЭКС. – №1(19). – Херсон: ХНТУ, 2007. – С.25-30.
15. Зенкин А. А. Когнитивная компьютерная графика. – М.: Наука, 1991. – 192 с.

It is illustrated three various approaches to a problem of designing of basic polygons on example SFE-12.

Key words: *serendipian eventual element, SFE-12.*

Отримано: 27.03.2008

УДК 519.21+62

Я. М. Чабанюк, І. М. Подун

Національний університет “Львівська політехніка”

АСИМПТОТИЧНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ГЕНЕРАТОРА СТРИБКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З ШВИДКИМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

В роботі одержано асимптотичні представлення генератора стрибкової еволюції в марковському середовищі, а також побудовано граничний генератор еволюції як розв’язок проблеми сингулярного збурення для отриманих асимптотичних представлень.

Ключові слова: *стрибкова еволюція, марковський процес, розв’язок проблеми сингулярного збурення.*

Вступ. Стійкість динамічної системи, що задовольняє принципу усереднення, була встановлена М. М. Боголюбовим [1] (див. також