

МЕТОДЫ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В.А. Прусов

Украинский научно-исследовательский
гидрометеорологический институт (УкрНИГМИ)

А.Е. Дорошенко

Институт программных систем НАН Украины
dor@isofts.kiev.ua

С.В. Приходько, Ю.М. Тырчак, Р.И. Черныш

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Розглядаються математичні аспекти проблеми моделювання і прогнозування атмосферних процесів над регіоном. Запропоновано новий підхід до створення математичних моделей, що адекватно описують широкий діапазон просторових і часових масштабів цих процесів в атмосфері, і пропонується новий нестандартний чисельний метод ефективного вирішення комплексної задачі аналізу і прогнозу метеорологічних величин. Коротко описується програмна реалізація запропонованих чисельних методів, приводяться результати експериментів.

Mathematical aspects of simulation and forecasting (prediction) of atmospheric processes above locale are considered. The new approach to creation of mathematical models adequately depicting a broad range of spatial and temporary scales of these processes in atmosphere is described and a new numerical method of the effective solution of a integrated problem of the analysis and forecasting meteorologic values is offered. The program implementation of the offered numerical methods is briefly described, the outcomes of experiments are resulted.

1. Введение

На современном этапе развития Украины приоритетное значение приобретает необходимость формирования общегосударственной политики, определяющей цель, методы, средства и организационные формы решения задач относительно снижения естественных и техногенных рисков, смягчение следствий стихийных бедствий, аварий и катастроф. В основе ее должны быть прогнозирование и своевременное предупреждение людей об угрожающих бедствиях. По расчетам международных экспертов затраты на прогнозирование и обеспечение готовности к стихийным бедствиям и катастрофам приблизительно в 15 раз меньше в сравнении с размером возмещения убытков. Это определяет необходимость первоочередного обеспечения проведения фундаментальных и прикладных научных исследований; разработки и усовершенствование методов мониторинга, прогнозирования, оценки риска, а также введение в оперативную практику информационно-аналитических систем предупреждения и информирование органов управления и население по вопросам возникновения чрезвычайных ситуаций естественного и техногенного характера.

Сегодня моделирование региональных атмосферных процессов реализуется с учетом того, что поля метеорологических величин в ограниченной области формируются под влиянием макромасштабных циркуляций атмосферы. Поэтому ограниченная область решения рассматривается как часть некоторого целого, и нестационарные краевые условия на ее боковых границах формулируются на основе данных, полученных для окаймляющей области. Кроме этого при численном решении задач прогноза состояния атмосферы для ограниченной территории появляется необходимость сгущать сетку для достижения требуемой точности решения задачи в местах больших градиентов зависимых функций.

Модель с сеткой переменного разрешения можно реализовать двумя способами [1]. Во-первых, можно использовать одну математическую модель и численный метод с непрерывно или скачкообразно меняющейся густотой сетки (алгоритм «двустороннего взаимодействия»). В этом случае возникает ряд проблемных вопросов, связанных с изменением размера шага сетки, которые относятся к локальным и глобальным эффектам отражения, прохождения и преобразования различных волн на границах сеток

переменного разрешения. К тому же большинство разностных схем имеет наибольшую точность, когда сетка имеет постоянный шаг. Даже при постепенном изменении шага сетки в зоне перехода появляются ошибки, превосходящие ошибки в остальной части сетки. Если же этот переход происходит скачкообразно, то значение ошибки может увеличиться на порядок. Все явные разностные схемы численного решения уравнений гидродинамики и тепло-, массопереноса являются условно устойчивыми, т.е. существует верхний предел для величины шага интегрирования по времени. Если изменение шага пространственной сетки происходит плавно, то максимальный временной шаг пропорционален отношению максимального шага сетки к локальному максимуму характерной скорости. Однако, как показывает опыт работы с вложенными сетками, существуют еще недостаточно изученные случаи превращения устойчивой схемы в неустойчивую схему даже при выполнении условий устойчивости.

При втором способе, предполагая, что поля метеорологических величин на ограниченной территории формируются на фоне общей циркуляции атмосферы, задачу прогноза погоды для ограниченной области можно сформулировать путем комбинации двух моделей различной полноты: 1) глобальной модели общей циркуляции атмосферы, включающей упрощенные уравнения, численно решаемые на грубой сетке; и 2) региональной модели, включающей полные уравнения гидродинамики и тепло-, массопереноса, численно решаемые на мелкой сетке. Необходимые для региональной модели граничные условия отождествляются с решением глобальной модели, уравнения которой могут интегрироваться одновременно с уравнениями региональной моделью или заранее. Этот метод прогноза на вложенных сетках получил название метода «одностороннего воздействия», поскольку численные результаты внутренней модели не влияют на интегрирование уравнений внешней модели.

При анализе сути метода «одностороннего воздействия» может показаться, что с вычислительной точки зрения не существует верхнего предела для срока регионального прогноза на вложенных сетках. Поэтому ранее считалось, что региональные модели, включающие полные уравнения гидродинамики и тепло-, массопереноса, численно решаемые на мелкой сетке, в недалеком будущем будут составлять основу оперативных схем прогноза погоды. На практике, однако, в моделях с «односторонним воздействием» нестационарные граничные условия определяются экстраполяцией, что ведет к появлению ошибок, распространяющихся внутрь области решения со скоростью внешних гравитационных волн и значительно сокращающих возможный срок прогноза погоды для ограниченной территории. Для того чтобы региональные модели прогноза погоды стали реальностью, необходимо дальнейшее изучение взаимодействия сеток с различным разрешением.

Теоретические основы метода «одностороннего воздействия» пока изучены недостаточно хорошо. Для моделей, в которых нестационарные граничные условия берутся из модели с более крупной сеткой, вопрос о постановке граничных условий рассматривался вначале как незначительная проблема. Однако вскоре было обнаружено, что переопределенные граничные условия, особенно для моделей, основанных на полных уравнениях гидродинамики в приближении гидростатики, порождают неприемлемо большие ошибки. Они обусловлены генерированием на границах вычислительных мод, гравитационных волн и других возмущений. При этом особенно сильно возмущает картину движения та часть волн, которая распространяется с большой скоростью в виде внешних гравитационных волн.

Вопрос о правильной формулировке граничных условий в случае метода «одностороннего воздействия» является весьма сложным. В работе [2], посвященной изучению влияния различных типов граничных условий на результаты численного моделирования на неравномерных сетках, показано, что оптимальные математические и вычислительные граничные условия для схемы с «односторонним воздействием» должны обладать следующими свойствами:

- граничные условия должны точно определять главную квазигеострофическую часть решения в случае, когда движение направлено внутрь области; на выходе должны отсутствовать отражения в виде вычислительных мод или гравитационных волн;
- быстрые гравитационные волны, образующиеся внутри области, должны, по возможности, уходить через границу, или не должны отражаться и усиливаться благодаря граничным условиям.

Большинство применяемых на практике граничных условий не удовлетворяют не только обоим требованиям одновременно, но даже в отдельности одному из них. Вышеизложенного уже достаточно, чтобы увидеть, насколько многосторонней является задача численного прогноза состояния атмосферы для ограниченной территории и как многочисленны трудности ее реализации.

2. Теоретические основы метода численного решения нестационарных задач с предысторией

Так как естественное численное решение задачи регионального прогноза погоды в постановке классической начально-краевой задачи сопряжено с трудностями, о которых речь шла выше, заменим ее близкой, но удовлетворяющей специальным требованиям, вытекающим из концепции «одностороннего воздействия». Поясним это простым примером.

Пусть на отрезке $\eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i$ нужно найти функцию $f(\eta)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{df}{d\eta} = R(f) \quad (1)$$

и дополнительным условиям (предыстории)

$$f(\eta_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где f_i – дискретные значения функции $f(\eta)$, заданные в узлах $\eta = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) крупномасштабной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагом сетки $h_i = \eta_i - \eta_{i-1}$. В общем случае R есть нелинейный оператор. Для обыкновенных дифференциальных уравнений он является алгебраическим, а для уравнений в частных производных представляет собой пространственный дифференциальный оператор.

Ограничимся сначала в задаче (1)–(2) обыкновенным дифференциальным уравнением. Естественный классический путь численного решения поставленной задачи заключается в следующем. На отрезке $[\eta_{i-1}, \eta_i]$ вводится мелкомасштабная сетка $\bar{\omega}_\tau$ точек ζ_k ($k = 0, 1, \dots, M$) с шагом $\tau_{k-1} = \zeta_k - \zeta_{k-1}$ при условии, что $\zeta_0 = \eta_{i-1}$, $\zeta_M = \eta_i$, и рассматривается дифференциальное уравнение не всюду на η , а только на отрезке $[\eta_{i-1}, \eta_i]$. Заменяя производную $f'(\zeta_k)$ ее приближенным значением $f'(\zeta_k) \approx [f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)]/\tau_k$, осуществляется переход, например, к разностной схеме

$$\frac{1}{\tau_k} [f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)] = L(f(\zeta_k)), \quad k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (3)$$

Начальное значение $f(\zeta_1) = f(\eta_{i-1}) = f_{i-1}$ задано. Остальные последовательные значения $f(\zeta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, M - 1$) находятся, решая разностное уравнение (3). Т.е. для решения задачи (1)–(2) применяется одна из разностных схем решения задачи Коши [3].

Можно поступить иначе. Если внимательно присмотреться к постановке задачи (1)–(2), то можно увидеть, что нахождение значения $f(\eta)$ на интервале отрезка $[\eta_{i-1}, \eta_i]$ представляет собой задачу интерполяции. Действительно, в точках $\eta = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) известны значения функции $f_i = f(\eta_i)$ и значения (см. уравнение (1)) первой производной от нее $L(f(\eta_i)) = df/d\eta|_{\eta=\eta_i}$. По условию задачи (1)–(2)

требуется найти $f(\eta)$ для значения η , отличного от узлов $\eta = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Следовательно, мы пришли к методу, который известен как интерполирование «с кратными узлами» или с помощью «полинома Эрмита».

Условия, определяющие многочлен $P_{2N}(\eta)$ интерполирования с *двукратными узлами*, будут следующими:

$$\frac{d^\alpha P(\eta)}{d\eta^\alpha} = \frac{d^\alpha f(\eta)}{d\eta^\alpha} \Big|_{\eta=\eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha = 0, 1$$

а сам многочлен для предыстории, заданной во всех N узлах, записывается в виде

$$P_{2N}(\eta) = \sum_{i=1}^N \frac{\omega^2(\eta)}{[(\eta - \eta_i)\omega'(\eta_i)]^2} \left\{ \left[1 - (\eta - \eta_i) \frac{\omega''(\eta_i)}{\omega'(\eta_i)} \right] f(\eta_i) + (\eta - \eta_i) f'(\eta_i) \right\}, \quad (4)$$

$$\omega_n(\eta) = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \dots (\eta - \eta_N).$$

Если предыстория задана в трех узлах ($N = 3$), то интерполирующий многочлен имеет вид

$$\begin{aligned} P_6(\eta) = & \left(\frac{\eta_3 - \eta}{\eta_3 - \eta_2} \right)^2 \left(\frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{3}{4} \frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} \right) f_1 + \frac{1}{4} (\eta - \eta_1) f_1' \right] + \\ & + \left(\frac{\eta_3 - \eta}{\eta_3 - \eta_2} \right)^2 \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \right)^2 \left[f_2 + (\eta - \eta_2) f_2' \right] + \\ & + \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \right)^2 \left(\frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} \right) f_3 - \frac{1}{4} (\eta_3 - \eta) f_3' \right], \end{aligned} \quad (4a)$$

а для двух узлов ($N = 2$) будем иметь

$$\begin{aligned} P_4(\eta) = & \left(\frac{\eta_2 - \eta}{\eta_2 - \eta_1} \right)^2 \left[\left(1 + 2 \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \right) f_1 + (\eta - \eta_1) f_1' \right] + \\ & + \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \right)^2 \left[\left(1 + 2 \frac{\eta_2 - \eta}{\eta_2 - \eta_1} \right) f_2 + (\eta_2 - \eta) f_2' \right]. \end{aligned} \quad (4b)$$

Можно убедиться в том, что последняя формула дает правильные результаты при $f = 1, \eta, \eta^2$ и η^3 . При η^4 максимальная ошибка на интервале (0,1) равна $-0,0625$. В то время как максимальная ошибка интерполирования по формуле Бесселя при одинаковом количестве заданных значений функции $f(\eta_i)$ равна $-0,5625$.

Таким образом, решение задач типа (1)–(2) можно весьма эффективно осуществлять с помощью формул (4), для которых легко доказать их единственность и оценить погрешность интерполирования. К основным преимуществам формул интерполирования с кратными узлами (4), построенных на основе заданных значений функции и производных от нее $f^{(\alpha)}(\eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $\alpha = 0, 1$, относятся [4]:

- они имеют большую точность, чем любая из формул, использующих только значения $f(\eta_i)$;
- при интерполировании на интервале (η_{N-1}, η_N) для них не требуются данные вне правой границы отрезка интерполирования, и поэтому их можно использовать для крайнего правого интервала;
- значения функции $f(\eta_i)$ и ее производных $f^{(\alpha)}(\eta_i)$ могут быть заданы через неравные интервалы по η .

2. Математическая модель состояния атмосферы

Фундаментальные уравнения динамики вязкой сплошной среды, которые основаны на универсальных законах, таких как сохранения массы:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot V) = 0; \quad (5a)$$

- сохранения количества движения

$$\frac{DV}{Dt} + 2\Omega \times V = -\rho^{-1}\nabla p - g + \nabla \cdot (\nu \Pi); \quad (5b)$$

- сохранения энергии

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T - F^{rad}) + Q_H; \quad (5c)$$

- сохранения скалярных величин $\mathfrak{R} = (q, q_L, q_w)$

$$\frac{D\mathfrak{R}}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla \mathfrak{R}) + Q_q; \quad (5d)$$

- состояния среды

$$p = \rho RT, \quad (5e)$$

которые нашли широкое применение в существующих моделях циркуляции атмосферы и прогноза погоды.

В уравнениях (5) приняты такие обозначения:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla,$$

t – время, ρ – плотность среды, V – ее скорость, p – давление, T – температура среды, q – удельная концентрация некоторого ингредиента, q_L – удельная влажность, q_w – удельная водность, Ω – угловая скорость вращения системы отсчета, g – ускорение, обусловленное гравитацией, ν – коэффициент турбулентной вязкости, Π – тензор напряжений, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, α – коэффициент теплового расширения, k – коэффициент турбулентной теплопроводности (диффузии), F^{rad} – плотность радиационного потока энергии, Q_H – интенсивность выделения (поглощения) тепла за счет фазовых переходов влаги, Q_q – источник (сток) скалярной величины $\mathfrak{R} = (q_L, q_w)$ в результате фазовых переходов.

При интегрировании системы уравнений (5) векторное уравнение (5b) для $V = (v_1, v_2, v_3)$ должно быть разложено на три скалярных уравнения, которые соответствуют составляющим по трем координатным направлениям x_1, x_2, x_3 . Поскольку уравнения (5) выполняются для произвольных координатных направлений, их можно выбрать произвольно. Обычно две оси координат x_1, x_2 выбираются параллельными гипотетической (гладкой) поверхности Земли (например, поверхности спокойного моря); при этом одна из них x_1 направляется на восток, а вторая x_2 – на север. Третья координатная ось x_3 направляется вверх, перпендикулярно этой гипотетической поверхности Земли.

Существующие численные методы решения системы уравнений (5) (конечно-разностные, конечных элементов, спектральные [5]) связаны с финитизацией исходных дифференциальных уравнений с помощью проектирования в некоторое конечномерное пространство на дискретном множестве значений аргумента

(сетке). Поэтому, чем больше точек разбиения содержит область независимой переменной, тем лучше функция непрерывной переменной аппроксимируется вектором дискретной функции, которая определена в узлах сетки независимой дискретной переменной. Следовательно, на тех сетках, которые реально могут использоваться при моделировании циркуляции атмосферы, эти методы по сути будут давать решения только для длинноволновых процессов. В тоже время уравнения (5а) и (5b) моделируют возмущения в виде звуковых и гравитационных волн, которые весьма слабо влияют на метеорологические явления, но достаточно остро ставят проблему устойчивости численной реализации самих уравнений. Естественно возникает вопрос, нельзя ли видоизменить исходную систему гидродинамических уравнений (5) таким образом, чтобы они не включали решений, соответствующих звуковым, гравитационным и другим высокочастотным волнам, однако чтобы при этом решения, которые соответствуют макромасштабным возмущениям циркуляции атмосферы, существенно не изменялись бы.

В работе [6], очевидно, впервые на основе оценки порядка величин членов, входящих в уравнений (5а) и (5b), был предложен способ «отфильтровывания» решений, связанных с высокочастотными волнами. Следуя результатам этой работы, третью проекцию уравнения (5b) для составляющей скорости V_3 заменим уравнением статики

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -g. \quad (6)$$

Следствием допущения о гидростатическом балансе стало отсутствие прогностического уравнения вертикального движения. Так как система уравнений (5) замкнута, вертикальная скорость должна определяться из такого диагностического уравнения, при котором поддерживается гидростатический баланс.

Метеорологическими величинами, которые измеряются непосредственно в оперативной практике, являются давление p , абсолютная температура T , горизонтальные составляющие ветра v_1 и v_2 а также влажность q . Плотность ρ легко определяется по существующим значениям p и T с помощью уравнения состояния (5е). С другой стороны, вертикальная составляющая скорости v_3 , фигурирующая в уравнениях системы (5), не измеряется и после введения приближения (6) не выражается явно через другие величины.

Выразим вертикальную скорость в атмосфере в какой-либо момент времени по распределению v_1 , v_2 и T в тот же момент времени с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla \cdot V) = \frac{g}{C_p T} \nabla \cdot V, \quad (7)$$

которое может быть получено комбинацией первого начала термодинамики для адиабатических процессов

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = 0,$$

с уравнениями состояния (5е), сохранения массы (5а) и статики (6). Для обобщения полученного результата на случай влажного воздуха достаточно заменить в уравнении (7) абсолютную температуру T на виртуальную

$$T_v \equiv T(1 + 0,6078q - q_L).$$

Переход от прогностического уравнения сохранения массы (5а) к диагностическому уравнению (7) нарушает замкнутость полной системы уравнений в модели циркуляции атмосферы, потому что уравнение гидростатики (6) также является диагностическим. Дополним систему (5)–(7) уравнением тенденции давления p . Для его получения скомбинируем уравнение состояния (5е), сохранения массы (5а) и гидростатики (6) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = g \nabla \cdot (\rho V).$$

Интегрируя полученное выражение от некоторой текущей высоты x_3 до верхней границы области решения $x_3 = H$, получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{x_3=H} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{x_3} = (g \rho v_3)_{x_3=H} - (g \rho v_3)_{x_3} + g \int_{x_3}^H \nabla \cdot (\rho V) dz, \quad (8)$$

где черточкой сверху обозначены горизонтальные оператор дивергенции и вектор скорости. Далее, используя стандартные допущения об отсутствии турбулентных потоков и неадиабатичных условий на высоте H над Земной поверхностью, которая на порядок превышает высоту пограничного слоя атмосферы, частную производную $(\partial p / \partial t)_{x_3=H}$, как условие на верхней границе области решения, представим в виде

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x_3=H} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t}\right)_{x_3=H} = -(\rho g v_3)_{x_3=H}. \quad (9)$$

Учтем полученное условие в равенстве (8). Это даст окончательное уравнение тенденции давления в области моделирования циркуляции атмосферы

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g \rho v_3 - 2(g \rho v_3)_H - g \int_{x_3}^H \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{\mathbf{V}}) d\zeta. \quad (10)$$

Для замыкания полученной системы уравнений необходимо определиться с физическими характеристиками среды, режимом ее движения, установить соотношения между термодинамическими переменными $V, \rho, p, T, q, q_L, q_W$ и коэффициентами переноса ν, k и, наконец, задаться методом параметризации источников (стоковых) членов F^{rad}, Q_H, Q_q .

Определим связь компонентов $u = v_1, v = v_2, w = v_3$ скорости \mathbf{V} с компонентами сферической системы координат $x_1 = r \cos \varphi \cos \lambda, x_2 = r \cos \varphi \sin \lambda, z = x_3 = r \sin \varphi$. Пусть так же

$$\sigma = \frac{z - F(\lambda, \varphi)}{H - F(\lambda, \varphi)}, \quad \bar{w} = \frac{1}{H - F} \left[w - (1 - \sigma) \left(\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (11)$$

где λ – долгота; φ – широта; σ – приведенная вертикальная координата, которая отслеживает рельеф; F – высота рельефа; H – высота верхней границы области решения задачи над уровнем моря. Тогда с учетом приведенного выше, модель атмосферы в ограниченной области \bar{G} представим с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \bar{w} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) v \sin \varphi - \\ & - \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + (1 - \sigma) g \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right] + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_M \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \bar{w} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) u \sin \varphi - \\ & - \frac{1}{r} \left[\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + (1 - \sigma) g \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_M \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{H - F} \left(\frac{2}{r} - \frac{g}{\pi \theta_v} \right) \frac{\partial w}{\partial \sigma} - \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{g}{\pi \theta_v} \right) w = \\ = \frac{1}{r \cos \varphi} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \frac{g}{\pi \theta_v} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{H - F} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \sigma} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{H - F} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} - \frac{1 - \sigma}{H - F} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \sigma} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & -\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \bar{w} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \\ & + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_H \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) - \\ & - \frac{L}{\pi} \left(\delta \frac{dq_H}{dt} \right) + Q_K - Q_I + Q_R, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial q}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} - \bar{w} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(H-F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_H \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) + M_X, \\
\frac{\partial q_L}{\partial t} = & - \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial q_L}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial q_L}{\partial \varphi} - \frac{w}{\partial \sigma} \frac{\partial q_L}{\partial \sigma} + \\
& + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial q_L}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial q_L}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(H-F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_H \frac{\partial q_L}{\partial \sigma} \right) + \\
& + \delta \frac{dq_H}{dt} + M_K - M_1,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_W}{\partial t} = & - \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial q_W}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial q_W}{\partial \varphi} - \frac{w}{\partial \sigma} \frac{\partial q_W}{\partial \sigma} + \\
& + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(K_G \frac{\partial q_W}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_G \frac{\partial q_W}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(H-F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_H \frac{\partial q_W}{\partial \sigma} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho(H-F)} \frac{\partial \rho V_o q_W}{\partial \sigma} - \delta \frac{dq_H}{dt} - M_1,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = - \frac{g(H-F)}{\theta_v}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g \rho \bar{w} - 2(g \rho \bar{w})_{\sigma=1} - g(H-F) \int_{\sigma}^1 \frac{1}{r \cos \varphi} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \rho v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) d\zeta, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} = & - \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial k}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial k}{\partial \varphi} - \frac{w}{\partial \sigma} \frac{\partial k}{\partial \sigma} + \\
& + \frac{K_M}{(H-F)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right] - \frac{g}{\theta_v} \frac{K_H}{H-F} \frac{\partial \theta_v}{\partial \sigma} + \frac{2}{(H-F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_M \frac{\partial k}{\partial \sigma} \right) - \varepsilon,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & - \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} - \frac{v}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{w}{\partial \sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \\
& + C_2 \frac{\varepsilon}{k} \left[\frac{K_M}{(H-F)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right] - \frac{g}{\theta_v} \frac{K_H}{H-F} \frac{\partial \theta_v}{\partial \sigma} \right] - C_3 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{C_4}{(H-F)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_M \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right),
\end{aligned} \tag{22}$$

$$K_M = C_1 k^2 / \varepsilon. \tag{23}$$

Здесь, кроме приведенных выше и общепринятых, введены следующие обозначения: $\pi = C_p (p/p_0)^{R/C_p}$ – приведенное давление; θ – потенциальная температура; δ – признак наличия конденсации влажности (1 – имеет место, 0 – отсутствует); V_o – установившаяся скорость осадков; k, ε – турбулентная кинетическая энергия и ее диссипация; K_G, K_M – коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена для количества движения; K_H – коэффициент вертикального турбулентного обмена для тепла и влажности; $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (0,09; 1,46; 1,83; 0,42)$ – константы замыкания пограничного слоя атмосферы. Источники – стоковые функции подсеточного масштаба обозначены следующим образом: Q_K – интенсивность высвобождения скрытой теплоты конденсации пара; Q_1 – интенсивность высвобождения скрытой теплоты испарения воды; Q_R – радиационное охлаждения или нагрев; M_X – дополнительный «источник» вещества, обусловленный химическими реакциями; M_K – источник влажности от конденсации; M_1 – источник влажности от испарения.

Математическая модель (12)–(23) отличается от известных и широко используемых в оперативной практике моделей применением вертикальной координаты σ и полученными выше уравнениями (14), (19), (20).

3. Постановка и численное решение задачи прогноза метеорологических величин

Прогноз значений метеорологических величин метеорологических величин над ограниченной территорией \bar{G} будем осуществлять на основе метода «одностороннего воздействия». Другими словами, в качестве граничных условий для региональной модели (12)–(23) будем использовать результаты анализа и прогноза, полученные с помощью макромасштабной (полусферной или глобальной) модели.

Пусть состояние атмосферы в пространстве $r = (\lambda, \varphi, \sigma)$ макромасштабной области $G(r) \subset \bar{G}(r)$ определяется вектором $\mathfrak{X}(r, t) = (u, v, w, \pi, T, q, q_L, q_W, k, \varepsilon)$ дискретных значений анализа и прогноза $\mathfrak{X}(r, t^m) = \mathfrak{X}^m(r)$, полученных на основе макромасштабной модели в моменты времени $t = t^m$ ($m = 0, 1, \dots, M$) с шагом $\tau = t^m - t^{m-1}$. Тогда для определения состояния атмосферы на ограниченной территории \bar{G} при $\forall t \in [t^{m-1}, t^m]$ будем решать задачу, которая в векторном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= D\mathfrak{X}, \quad \forall t \in [t^{m-1}, t^m], \quad \forall r \in \bar{G} \\ \mathfrak{X}(r, t^m) &= \mathfrak{X}^m(r), \quad m = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (24)$$

Заменим континуум $\bar{G} = \bar{G}(r)$ пространственной сеткой из точек путем разбиения области \bar{G} на множество из $J-1$ элементов $\Delta\lambda_j$, $K-1$ элементов $\Delta\varphi_k$ и $L-1$ элементов $\Delta\sigma_l$. Построим вектор $\{r_{jkl}\}$, определяя непрерывную переменную Γ только в точках j ($1 \leq j \leq J$), k ($1 \leq k \leq K$), l ($1 \leq l \leq L$). В результате получим:

$$\lambda_j = \lambda_1 + \sum_{\mu=2}^{J-1} \Delta\lambda_\mu, \quad \varphi_k = \varphi_1 + \sum_{\mu=2}^{K-1} \Delta\varphi_\mu, \quad \sigma_l = \sigma_1 + \sum_{\mu=2}^{L-1} \Delta\sigma_\mu$$

В области определения \bar{G} вместо функции $\mathfrak{X}(r, t)$, заданной на макромасштабной сетке, построим (см. пункт 4) функцию дискретного аргумента $\mathfrak{X}(r_{jkl}, t^m) = \mathfrak{X}_{jkl}^m$ на региональной сетке в узлах $(\lambda_j, \varphi_k, \sigma_l, t^m) \in R$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$, $0 \leq m \leq M$. Кроме того дифференциальному оператору D в (24) поставим в соответствие сеточный оператор Λ (см. пункт 4).

После проведения операции восполнения функции $\mathfrak{X}(t^m) = \mathfrak{X}^m$ в узлы региональной сетки и вычисления значений правых частей $f(t^m) = f^m = \Lambda\mathfrak{X}^m$, $m = 0, 1, \dots, M$ во всех узлах сетки $(\lambda_j, \varphi_k, \sigma_l)$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$, решение задачи (24) будем искать для $\forall t \in [t^m, t^{m+1}]$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(t) &= \mathfrak{X}^{m-1} + \frac{t - t^{m-1}}{\tau} \left[\tau f^{m-1} + \frac{t - t^{m-1}}{4\tau} \left[4(\mathfrak{X}^m - 2\mathfrak{X}^{m-1} + \mathfrak{X}^{m-2}) - \tau(f^m - f^{m-2}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{t - t^{m-1}}{4\tau} \left[5(\mathfrak{X}^m - \mathfrak{X}^{m-2}) - \tau(f^m + 8f^{m-1} + f^{m-2}) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{t - t^{m-1}}{4\tau} \left[2(\mathfrak{X}^m - 2\mathfrak{X}^{m-1} + \mathfrak{X}^{m-2}) - \tau(f^m - f^{m-2}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{t - t^{m-1}}{4\tau} \left[3(\mathfrak{X}^m - \mathfrak{X}^{m-2}) - \tau(f^m + 4f^{m-1} + f^{m-2}) \right] \right] \right] \right] \right] \quad (25) \end{aligned}$$

для каждого узла сетки $(\lambda_j, \varphi_k, \sigma_l)$, $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$.

Схема (25) легко получается из формулы интерполирующего многочлена (4а), т.е. когда предыстория задана в трех узлах ($N = 3$).

Из изложенного выше очевидно, что:

- заблаговременность прогноза t зависит от заблаговременности прогноза макромасштабной модели t^M ;
- временной шаг $\tau = t^{m-1} - t^m$ задания макромасштабной информации с учетом суточного хода метеорологических величин может достигать до $\tau \leq 12$ часов;
- в отличие от классических численных методов решения уравнений математической физики, предложенный метод лишен проблемы устойчивости;
- точность решения $\mathfrak{X}_{ijk}(t)$ зависит от точности интерполяционного метода гладкого восполнения заданной дискретной функции в узлы региональной сетки и метода аппроксимации дифференциального оператора D в (24) сеточным оператором Λ .

4. Аппроксимация правых частей дифференциальных уравнений модели на мезомасштабной сетке

Обозначим через η одну из осей системы координат $r = (\lambda, \varphi, \sigma)$ и отрезком $a \leq \eta \leq b$ линейный размер области решения макромасштабной модели по этой координате. Пусть произвольные точки $a < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < b$, образуют неравномерную макромасштабную сетку $\mathcal{W}_h[a, b]$ с шагом сетки $h_{i-1} = \eta_i - \eta_{i-1}$. Пронумеруем все узлы в некотором порядке $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ и будем рассматривать значения сеточной функции $\mathfrak{X}(\eta_i, t^m)$ в узлах сетки как компоненты вектора $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}_i(t^m), i = 0, 1, \dots, N\}$.

Рассмотрим на отрезке $[\eta_{i-1}, \eta_{i+1}]$ многочлен третьей степени $P_{i-1}(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3$ и выберем его так, чтобы он принимал в точках η_{i-1} , η_i и η_{i+1} такие же значения, как и \mathfrak{X} . Многочлен P_{i-1} можно, очевидно, представить в форме суммы многочлена второй степени, удовлетворяющего в точках η_{i-1} , η_i и η_{i+1} условиям:

$$P_{i-1}(\eta)|_{\eta=\eta_{i-1}} = \mathfrak{X}_{i-1}, \quad P_{i-1}(\eta)|_{\eta=\eta_i} = \mathfrak{X}_i, \quad P_{i-1}(\eta)|_{\eta=\eta_{i+1}} = \mathfrak{X}_{i+1}, \quad (26)$$

и многочлена третьей степени, обращающегося в нуль в точках η_{i-1} , η_i и η_{i+1} . Легко проверить, что такое представление имеет вид

$$P_{i-1}(\eta) = a_0^i + a_1^i(\eta - \eta_i) + a_2^i(\eta - \eta_i)^2 + a_3^i(\eta - \eta_{i-1})(\eta - \eta_i)(\eta - \eta_{i+1}), \quad (27a)$$

где

$$\begin{aligned} a_0^i &= \mathfrak{X}_i, & a_1^i &= \frac{1}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{\mathfrak{X}_{i+1} - \mathfrak{X}_i}{h_i} h_{i-1} + \frac{\mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_{i-1}}{h_{i-1}} h_i \right), \\ a_2^i &= \frac{1}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{\mathfrak{X}_{i+1} - \mathfrak{X}_i}{h_i} - \frac{\mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_{i-1}}{h_{i-1}} \right). \end{aligned} \quad (27b)$$

Очевидно, на отрезке $[\eta_i, \eta_{i+2}]$ можно построить аналогичный многочлен третьей степени

$$P_i(\eta) = b_0^i + b_1^i(\eta - \eta_{i+1}) + b_2^i(\eta - \eta_{i+1})^2 + b_3^i(\eta - \eta_i)(\eta - \eta_{i+1})(\eta - \eta_{i+2}) \quad (28a)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} b_0^i &= \mathfrak{X}_{i+1}, & b_1^i &= \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{\mathfrak{X}_{i+2} - \mathfrak{X}_{i+1}}{h_{i+1}} h_i + \frac{\mathfrak{X}_{i+1} - \mathfrak{X}_i}{h_i} h_{i+1} \right), \\ b_2^i &= \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{\mathfrak{X}_{i+2} - \mathfrak{X}_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\mathfrak{X}_{i+1} - \mathfrak{X}_i}{h_i} \right), \end{aligned} \quad (28b)$$

принимаящий в точках η_i , η_{i+1} и η_{i+2} такие же значения, как и \mathfrak{X} .

В каждом многочлене P_{i-1}, P_i остаются произвольными параметры a_3^i и b_3^i . Построим интерполяционную функцию $\mathfrak{S}(\eta)$ класса гладкости C^p ($p=3$). Потребуем, чтобы интерполяционная функция $\mathfrak{S}_i(\eta)$ в области $[\eta_{i-1}, \eta_{i+2}]$ удовлетворяла условиям

$$\left. \frac{d^k P_{i-1}}{d\eta^k} \right|_{\eta=\eta_i} = \left. \frac{d^k \mathfrak{S}_i}{d\eta^k} \right|_{\eta=\eta_i}, \quad \left. \frac{d^k P_i}{d\eta^k} \right|_{\eta=\eta_{i+1}} = \left. \frac{d^k \mathfrak{S}_i}{d\eta^k} \right|_{\eta=\eta_{i+1}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (29)$$

Такие интерполяционные функции $\mathfrak{S}_i(\eta)$ существуют, представляют собой многочлены степени $2p-1$

$$\mathfrak{S}_i(\eta) = c_0 + c_1(\eta - \eta_i) + c_2(\eta - \eta_i)^2 + c_3(\eta - \eta_i)^3 + c_4(\eta - \eta_i)^4 + c_5(\eta - \eta_i)^5, \quad (30a)$$

и условиями (29) определены однозначно. При этом коэффициенты, входящие в (30a), равны:

$$\begin{aligned} c_5^i &= -\frac{1}{3h_i^5} \left[2(b_0^i - a_0^i) - h_i(b_1^i + a_1^i) + h_i^2(b_2^i - a_2^i) \right], \\ c_4^i &= \frac{1}{3h_i^4} \left[5(b_0^i - a_0^i) - h_i(b_1^i + 4a_1^i) + h_i^2(b_2^i - 4a_2^i) \right], \\ c_3^i &= \frac{1}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} \left[(b_2^i - a_2^i) - 2h_i(h_i + 2h_{i+1})c_4^i - 10h_i^2h_{i+1}c_5^i \right], \\ c_2^i &= a_2^i - (h_i - h_{i-1})c_3^i, \quad c_1^i = a_1^i - h_{i-1}h_i c_3^i, \quad c_0^i = a_0^i. \end{aligned} \quad (30b)$$

Построенные так многочлены $\mathcal{S}_i(\eta)$ дают интерполяционный процесс для достаточно широкого класса функций \mathfrak{R} внутри отрезка $[a, b]$ с третьим порядком гладкости в точках η_i, η_{i+1} , где совпадают соседние отрезки $[\eta_{i-1}, \eta_{i+1}]$ и $[\eta_i, \eta_{i+2}]$.

Вычисление сеточных значений частной производной первого порядка $\psi_i = (\partial\mathfrak{R}/\partial\eta)_i$ и частной производной второго порядка $\xi_i = (\partial^2\mathfrak{R}/\partial\eta^2)_i$, входящих в $f_{jkl}^m = \Lambda\mathfrak{R}_{jkl}^m$, будем осуществлять на основе соотношений

$$\psi_{i+1} + 2\left(1 + \frac{h_i}{h_{i-1}}\right)\psi_i + \frac{h_i}{h_{i-1}}\psi_{i-1} = \frac{3}{h_i} \left\{ \mathfrak{R}_{i+1} - \left[1 - \left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right] \mathfrak{R}_i - \left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2 \mathfrak{R}_{i-1} \right\} - \frac{h_i h_{i-1}^2}{24} \left[1 - \left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right] \frac{\partial^4 \mathfrak{R}}{\partial \eta^4}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{h_i} \left[\frac{h_{i-1}}{h_i} \left(1 - \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) + 1 \right] \xi_{i+1} + \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) \left[\frac{h_{i-1}}{h_i} \left(3 + \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) + 1 \right] \xi_i + \left[\frac{h_{i-1}}{h_i} \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) - 1 \right] \xi_{i-1} = \\ = \frac{12}{h_i^2} \left[\frac{h_{i-1}}{h_i} \mathfrak{R}_{i+1} - \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) \mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_{i-1} \right] + \\ + \frac{h_i^2 h_{i-1}}{360} \left[1 - \left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)^2\right] \left\{ 5 \frac{h_{i-1}}{h_i} + 2 \left[1 - \left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)^2\right] \right\} \frac{\partial^5 \mathfrak{R}}{\partial \eta^5}, \quad (32) \end{aligned}$$

полученных с помощью разложений функции $\mathfrak{R}(r, t)$ в ряд Тейлора для узлов $\eta = \eta_{i-1}$ и $\eta = \eta_{i+1}$ относительно узла $\eta = \eta_i$ с учетом равенств $\psi_i = (\partial\mathfrak{R}/\partial\eta)_i$ и $\xi_i = (\partial^2\mathfrak{R}/\partial\eta^2)_i$.

Очевидно, что соотношения (31), (32) имеют третий порядок при $h_i \neq h_{i-1}$ и четвертый при $h_i = h_{i-1}$. Производные $\psi_i = (\partial\mathfrak{R}/\partial\eta)_i$ и $\xi_i = (\partial^2\mathfrak{R}/\partial\eta^2)_i$ входят в (31), (32) неявно. Но поскольку (31), (32) представляют собой системы алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, то решения их можно осуществить весьма эффективно с помощью метода прогонки с граничными условиями

$$-\frac{h_1}{6}(\xi_2 - \xi_1) + \psi_1 + \psi_2 = 2 \frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1}{h_1}, \quad (33a)$$

$$-\frac{h_{N-1}}{6}(\xi_N - \xi_{N-1}) + \psi_{N-1} + \psi_N = 2 \frac{\mathfrak{R}_N - \mathfrak{R}_{N-1}}{h_{N-1}}. \quad (33b)$$

Здесь необходимо отметить главное преимущество предложенного метода аппроксимации производных, которые входят в дифференциальные уравнения модели циркуляции атмосферы (12)–(23). Поскольку решение системы алгебраических уравнений (31), (32) во всех точках i зависит от значений в других точках, то оно зависит от \mathfrak{R}_i глобально, а не локально. Другими словами вычисленные производные $\psi_i = (\partial\mathfrak{R}/\partial\eta)_i$ и $\xi_i = (\partial^2\mathfrak{R}/\partial\eta^2)_i$ на отрезке $[a, b]$ будут более гладким, т.е. лишены вычислительных возмущений, характерных для локальных трехточечных операторов аппроксимации производных.

5. Программная реализация пакета метеорологического прогнозирования и описание численных экспериментов

Осуществлены последовательная и параллельная реализации пакета программ краткосрочного и среднесрочного регионального метеорологического прогнозирования на территории Украины и ее областей. Последовательная реализация выполнена с помощью инструментария Visual Fortran 6.6 на персональном компьютере Pentium IV (1,7 ГГц, 256 мб)

Пакет имеет две основные функциональности – метеорологическую и экологическую. Метеорологическая часть пакета включает следующие возможности:

1) задавать область исходных данных и прогноза погоды;

Размер области для объективного анализа исходных данных определяется географическими координатами в градусах по долготе и широте. Параметры сетки для этой области задаются количеством узлов и шаг сетки по долоте, широте и высоте с указанием ряда значений давления на стандартных уровнях в исходных данных

объективного анализа. Размер области и параметры сетки зависят от параметров модели численного прогноза погоды Гидрометцентра (ГМЦ) Offenbach (Германия), из которого принимаются исходные метеорологические данные.

2) *чтение и раскодирование исходных метеорологических данных;*

Выполняется чтение по каналам Internet данных объективного анализа из ГМЦ Offenbach в коде GRIB (двоичное представление ВМО) и их раскодирование. Запускается задача дважды в текущие сутки (после 5.00 и 17.00 по местному времени) при обязательном предварительном подключении компьютера к каналу Internet. Процесс считывания по каналу Internet содержимого файлов объективного анализа из ГМЦ Offenbach подтверждается сообщением и визуально контролируется программным пакетом. При штатном завершении процесса считывания в списке отсутствующих файлов с именами, включающими переменные символы, значения которых зависят от календарной даты.

3) *адаптация исходных метеорологических данных;*

Эта функция реализует интерполирование исходных данных в узлы региональной сетки и вычисление значений аппроксимированных правых частей дифференциальных уравнений модели циркуляции атмосферы. Запускается дважды в текущие сутки после выполнения предыдущей задачи.

4) *прогноз погоды на требуемый срок;*

Программа прогноза погоды на требуемый срок (от 1 до 5 суток с шагом в один час) запускается по необходимости (любое количество раз). Реализация ее начинается с анализа наличия файлов с начальными данными, а сам процесс визуально контролируется.

5) *визуализация результатов прогноза;*

Эта функция дает возможность картографического представления результатов прогноза и реализует построение карт метеорологических данных для территории Украины и ее областей на уровне Земли. Кроме этого она реализует построение карт метеорологических данных для территории Украины на уровнях 700, 500 и 300 гПа. Построенные карты прогноза погоды на различные сроки для территории Украины на уровнях Земли, 700, 500 и 300 гПа автоматически заносятся в архив.

Для большей детализации результатов прогноза можно построить приземную карту для любой административной области Украины. Для этого достаточно на приземной карте Украины в окрестности областного центра дважды щелкнуть левой кнопкой мыши. В качестве примера на рисунке приведена приземная карта прогноза погоды для Львовской области.

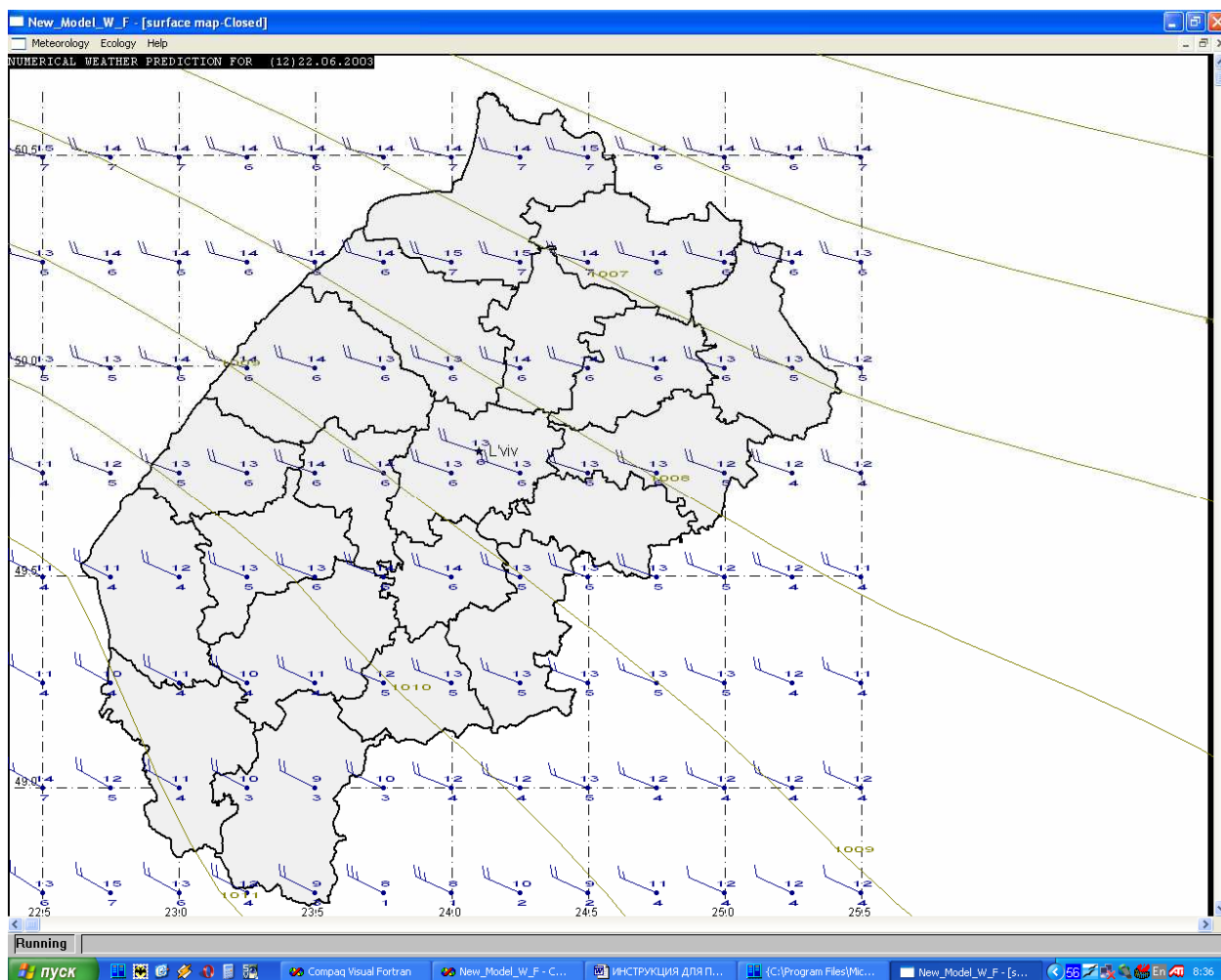


Рис. 1. Пример регионального прогноза погоды.

Основной задачей экспериментов, проведенных на основе изложенной в настоящей работе модели, являлось: 1) изучение свойств используемых численных методов интерполяции, аппроксимации и интегрирования; 2) воспроизведение общих закономерностей взаимодействия глобальных и региональных атмосферных процессов; 3) анализ влияния структуры вертикальной сетки на динамику и теплообмен в пограничном слое атмосферы.

Численные эксперименты были проведены для территории Украины и ее административных областей. Независимо от величины области решения задачи, она заполнялась пространственной разностной сеткой, состоящей из однородных горизонтальных ячеек, формируемых путем деления горизонтальных длин области на 100 отрезков. Высота верхней границы области решения принималась постоянной и составляла $H = 15000$ м. Для построения вертикальной сетки были выбраны 41 уровень по вертикальной координате, лежащие на высотах, значения безразмерных величин $\sigma = x_3/H$ которых задавались логарифмическим законом распределения и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Структура вертикальной сетки

№ п/п	Безразмерная высота σ	№ п/п	Безразмерная высота σ	№ п/п	Безразмерная высота σ	№ п/п	Безразмерная высота σ
1	0.0000000	11	$1.48381 \cdot 10^{-2}$	21	0.2366667	31	0.5750000
2	$6.86644 \cdot 10^{-5}$	12	$2.34671 \cdot 10^{-2}$	22	0.2666000	32	0.6136000
3	$1.82167 \cdot 10^{-4}$	13	$3.61051 \cdot 10^{-2}$	23	0.2974000	33	0.6530667
4	$3.69678 \cdot 10^{-4}$	14	$5.34639 \cdot 10^{-2}$	24	0.3290667	34	0.6934000
5	$6.79145 \cdot 10^{-4}$	15	$7.53174 \cdot 10^{-2}$	25	0.3616000	35	0.7346000
6	$1.18906 \cdot 10^{-3}$	16	0.1000000	26	0.3950000	36	0.7766666
7	$2.02703 \cdot 10^{-3}$	17	0.1256000	27	0.4292667	37	0.8196000
8	$3.39807 \cdot 10^{-3}$	18	0.1520667	28	0.4644000	38	0.8634000
9	$5.62527 \cdot 10^{-3}$	19	0.1794000	29	0.5004000	39	0.9080667
10	$9.20149 \cdot 10^{-3}$	20	0.2076000	30	0.5372667	40	0.9536000
						41	1.0000000

В качестве входной информации для задачи регионального прогноза использовались данные объективного анализа и прогноза, получаемые по каналам Internet из немецкой национальной службы Deutscher Wetterdienst (DWD) Offenbach в двоичном формате GRIB для территории ($0^\circ - 90^\circ N, 0^\circ - 90^\circ E$) в узлах регулярной широтно-долготной сетки с шагом 1.5° . Немецкая национальная служба DWD Offenbach предоставляет странам – членам Всемирной метеорологической организации (ВМО) – набор данных анализа и прогноза метеорологических величин дважды в день каждые 12 часов. Один полный набор данных, состоящий из 255 файлов, содержит данные объективного анализа за 00 или 12 часов текущих суток и данные прогноза на срок 12, 24, 36, 48 часов по Гринвичу. Содержание и структура каждого набора данных приведены в таблице 2. Здесь символом «+» помечены метеорологические величины, которые присутствуют в наборе данных на соответствующем уровне, а «-» – отсутствуют.

Таблица 2. Содержание набора данных DWD Offenbach

Давление на стандартном уровне (гПа)	Высота изобарического уровня	Давление на уровне моря	Относительная влажность воздуха	Температура воздуха	Компоненты скорости ветра u, v
98*	-	+		-	-
89*	-	-		+	+
850	+	-	+	+	+
700	+	-	+	+	+
500	+	-	+	+	+
300	+	-	-	+	+
250	+	-	-	+	+
200	+	-	-	+	+
100	+	-	-	+	+
50	+	-	-	+	+

* – кодом „98” обозначается уровень моря, а „89” – уровень поверхности земли.

Полученные метеорологические данные (давление, температура, влажность и горизонтальные компоненты ветра) методом пополнения на основе сплайн-интерполяции (27–30) первычисляются в узлы мезомасштабной горизонтальной сетки, расстояние между которыми как по широте, так и по долготе

значительно меньшее, чем в исходной сетке. Затем данные мезомасштабной горизонтальной сетки с помощью методов, описанные выше, пересчитываются в узлы мезомасштабной вертикальной сетки. И наконец, правые части системы уравнений модели циркуляции атмосферы, которые содержат частичные производные первого и второго порядка аппроксимируются трехточечными компактными разностными схемами с учетом рельефа подстилающей поверхности на территории прогноза. В результате чего получаются значения разностных аналогов правых частей $f_{jkl} = \Lambda \mathfrak{R}_{jkl}^i$ уравнений для любой из зависимых функций $\mathfrak{R} = (u, v, \pi, T, q, q_L, k, \varepsilon)$ в $\forall j \in (1, J), \forall k \in (1, K), \forall l \in (1, L)$ мезомасштабной сетки для каждого конкретного срока объективного анализа или прогноза, переданных с DWD Offenbach.

Далее при конкретных значениях индексов $j \in (\overline{1, J}), k \in (\overline{1, K})$ и $l \in (\overline{1, L})$ решается задача

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{jkl}}{\partial t} = \Lambda \mathfrak{R}_{jkl}^i \equiv f_{jkl}, \text{ для } \forall t \in [t^n, t^{n+1}],$$

$$\mathfrak{R}_{jkl}(t^i) = \mathfrak{R}_{jkl}^i, f_{jkl} \equiv \Lambda \mathfrak{R}_{jkl}^i = \Lambda \mathfrak{R}_{jkl}(t^i), i = n-1, n, n+1,$$

которая формулируется в постановке задачи интерполирование с кратными узлами [7]. Решение ее ищется для $\forall t \in [t^n, t^{n+1}]$, при этом используются исходные данные за предшествующие сроки $t^{n-1}, t^n = t^{n-1} + 12$ и на момент времени $t^{n+1} = t^{n-1} + 24$ ч.

Алгоритм решения задачи численного прогноза погоды для ограниченной территории на основе метода одностороннего действия приведенный на следующем рис.2

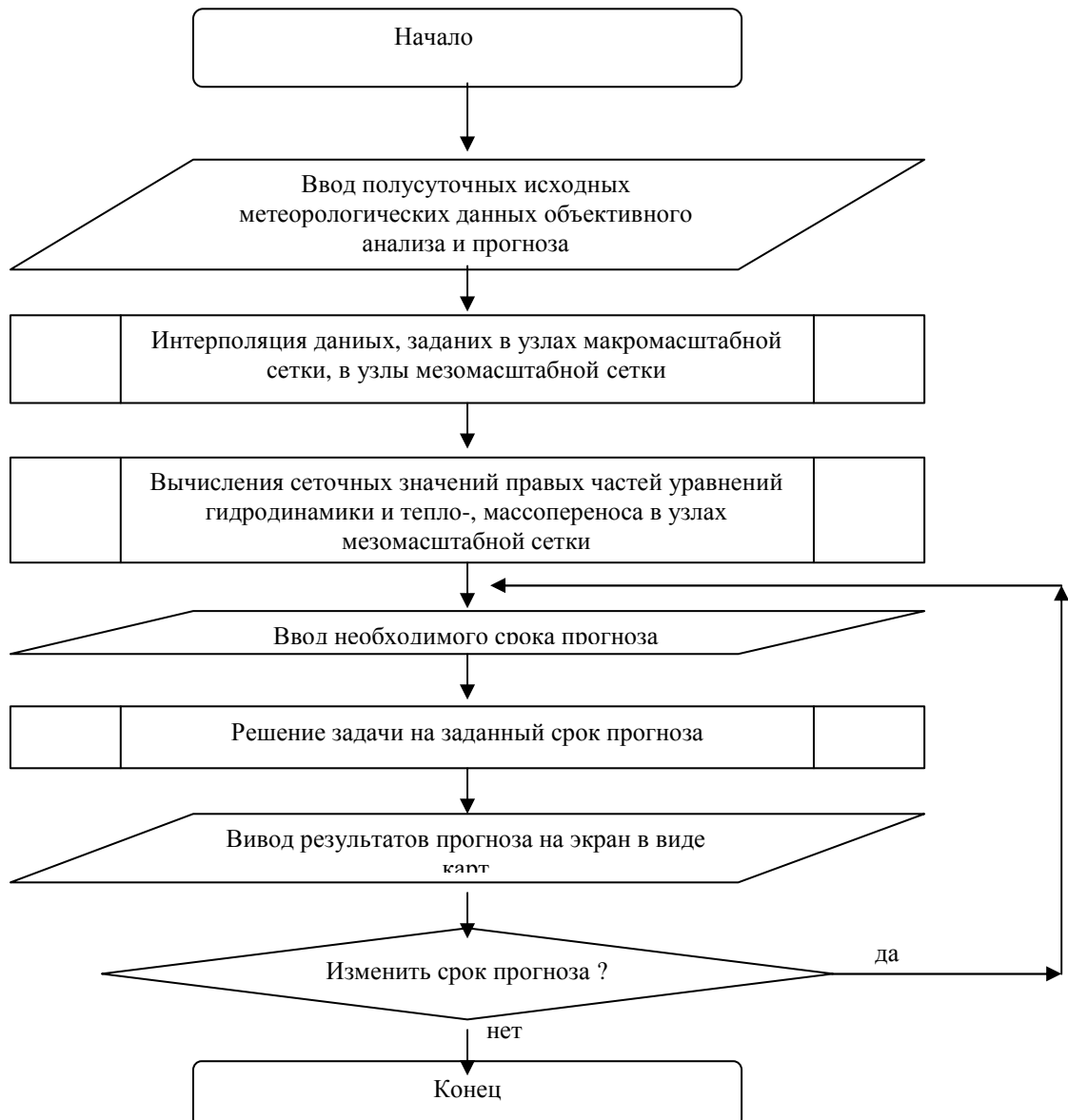
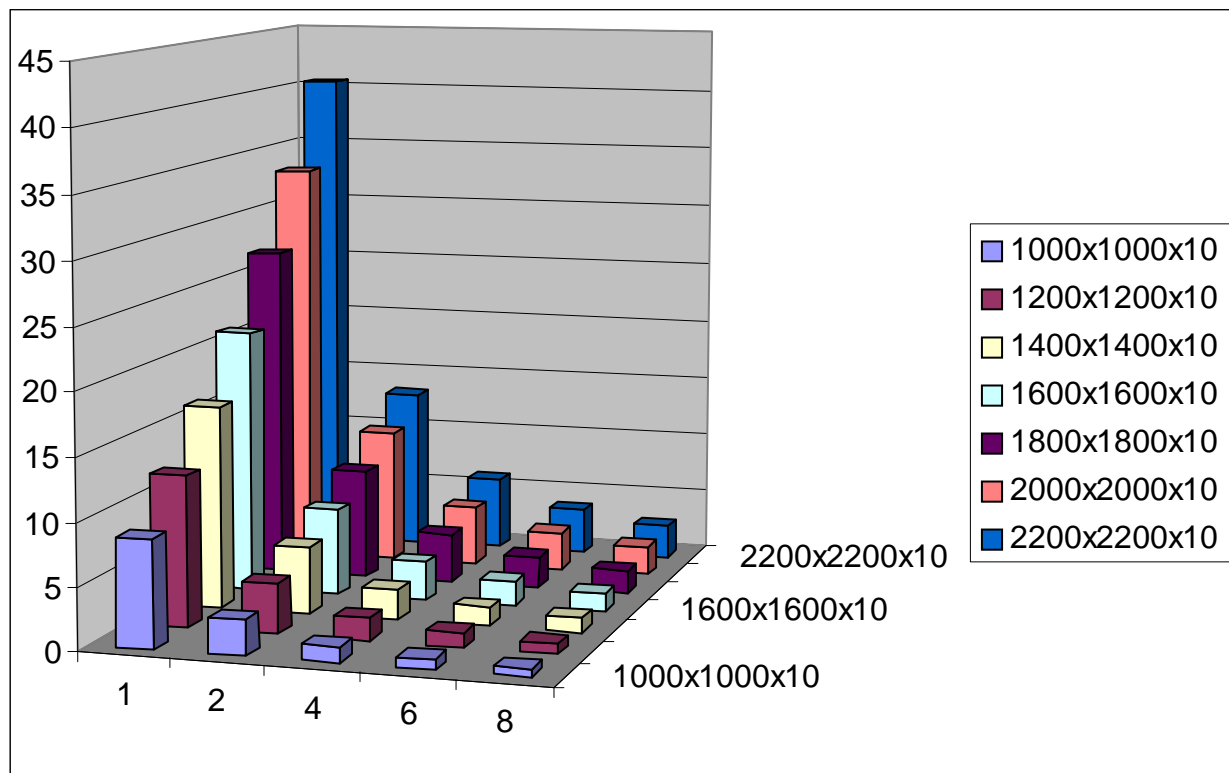


Рис. 2. Алгоритм чисельного прогнозу погоди

Сравнение с фактическими картами погоды показало, что полученные численные результаты качественно и количественно хорошо согласуются с фактическими данными.

Были проведены также эксперименты по крупноблочному распараллеливанию [8] части задачи, относящейся к интерполяция даниых, заданих в узлах макромасштабной сетки, в узлы мезомасштабной сетки. Ниже приведена диаграмма времени инт ерполяционных вычислений (в сек., ось Z) на различных количествах процессоров (от 1 до 8, ось X) при различных размерах мезомасштабной сетки (ось Y). Результаты показывают хорошую степень распараллеливаемости и масштабируемости прогнозных вычислений, которые в дальнейшем предполагается выполнять полностью на параллельной системе.



6. Выводы

В работе рассмотрены математические аспекты проблемы моделирования и прогнозирования атмосферных процессов над регионом. Описывается новый подход к созданию математических моделей, адекватно описывающих широкий диапазон пространственных и временных масштабов этих процессов в атмосфере, и предлагается новый нестандартный численный метод эффективного решения комплексной задачи анализа и прогноза метеорологических величин. Кратко описана программная реализация предложенных численных методов, приводятся результаты экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips N., Shukla J. On the strategy of combining coarse and fine grid meshes in numerical weather prediction // J. Appl. Meteor. – 1973.–№ 12.– P. 763–770.
2. Miyakoda K., Rosati A. One-way nested grid models: The interface condition and the numerical accuracy // Mon. Weather Review.– 1977.– Vol. 105.– P. 1092–1107.
3. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы (введение в теорию).– М.: «Наука», 1973.– 400 с.
4. Довгий С.А., Прусов В.А., Конейка О.В. Математическое моделирование техногенных загрязнений окружающей среды.– Киев: «Наукова думка», 2000.– 247 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: «Наука», 1977.–735 с.
6. Charney J., Eliassen A. A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies.– Tellus, 1949. 1, 38, p. 1268–1274
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.–М.: Наука, т.1, 1966.–632 с.
8. А.Е. Дорошенко, Математические модели и методы организации высокопроизводительных параллельных вычислений. Алгебродинамический подход.- Киев:Наукова думка, 2000.- 177 с.