

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.032>

УДК 539.3

**О.Я. Григоренко**<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

**І.А. Лоза**<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-2678-6908>

**С.О. Сперкач**<sup>3</sup>, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

**А.Д. Безугла**<sup>3</sup>, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

<sup>2</sup> Національний транспортний університет, Київ

<sup>3</sup> Технічний центр НАН України, Київ

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, lozaigor1956@gmail.com,  
svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

## Чисельний розв'язок задачі про розповсюдження електропружних хвиль в суцільному п'єзокерамічному циліндрі

*Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я. Григоренком*

*Дослідження поширення вільних осесиметричних хвиль в суцільному п'єзоелектричному циліндрі з осовою поляризацією здійснюється на основі лінійної теорії пружності і лінійного електромеханічного зв'язку. Бічна поверхня циліндра вільна від навантажень та вкрита тонкими електродами, до яких підведена знакозмінна різниця потенціалів. Побудовано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Тривимірною задачею теорії електропружності в частинних похідних (шляхом представлення компонентів тензора пружності, компонент векторів переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу біжучими хвилями в осовому напрямку) зведена до крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь. Отриману задачу розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. Запропонований підхід дозволяє дослідити характер розповсюдження електропружних біжучих хвиль для випадку неперервно-неоднорідного матеріалу суцільного циліндра. Розглянуто випадок, коли властивості матеріалу змінюються за степеневим законом по товщині. Наведено спектральні характеристики біжучих хвиль для однорідних та неоднорідних матеріалів та проведено порівняльний аналіз.*

**Ключові слова:** осесиметричне поширення хвиль, п'єзокерамічний суцільний циліндр, неоднорідний матеріал, чисельний метод, дисперсійні криві.

Циліндричні п'єзокерамічні хвилеводи широко використовуються в акустoeлектроніці, що вказує на важливість досліджень хвильових процесів у п'єзокерамічних тілах циліндричної форми. Для підвищення довговічності експлуатаційних характеристик хвилеводів в багатьох випадках їм надають неоднорідної структури. Для математичного моделювання таких структур досить складна задача електропружності ще більш ускладнюється. Якщо хвилеводи

---

Цитування: Григоренко О.Я., Лоза І.А., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельний розв'язок задачі про розповсюдження електропружних хвиль в суцільному п'єзокерамічному циліндрі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 2. С. 32–40. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.032>

мають шарувату структуру, то виникає необхідність задовольняти не тільки граничні умови на поверхнях, які обмежують тіло, але й на поверхнях розділу фізико-механічних властивостей шарів, що складають конструкцію. Це зумовлює збільшення кількості рівнянь. Останнім часом для конструювання таких хвилеводів все більше використовуються функціонально градієнтні матеріали. У цьому випадку фізико-механічні характеристики матеріалу вже не є константами, а функціями (як правило товщинної координати). Це становить значну проблему для багатьох чисельних та аналітичних методів. Як відомо, аналітичний розв'язок для таких задач може бути отриманий лише за певних видів симетрії задачі. Так, це випадок осьової поляризації п'єзокераміки для поздовжніх хвиль (осесиметрична [11, 12] та неосесиметрична задачі [14, 15]) та колової поляризації для крутильних хвиль [13]. У таких випадках симетрії задачі для отримання розв'язку використовуються функції Бесселя. Як відомо, рівняння Бесселя — це рівняння з постійними коефіцієнтами. Якщо розглядати функціонально градієнтний матеріал, то коефіцієнти у рівнянні будуть функціями товщинної координати, а отже, це вже не буде рівнянням Бесселя. Тому й застосування методу представлення розв'язку у вигляді комбінації функцій Бесселя, на наш погляд, не є припустимим. Більш загальний метод запропонований у роботах [1, 8–10]. В основі цього методу лежить розвинення компонентів розв'язуючого вектора у степеневі ряди. У цьому випадку розв'язок може бути отриманий для усіх варіантів поляризації п'єзокераміки, але складнощі у реалізації цього методу при неоднорідній структурі хвилеводу роблять його мало ефективним.

Для розв'язання такого класу задач пропонується ефективний чисельно-аналітичний підхід, розвинений у роботах [2–7].

Система рівнянь, яка описує дану задачу у циліндричній системі координат  $r, \theta, z$  складається з:

рівнянь руху

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) + \frac{\partial T_5}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_5}{\partial r} + \frac{1}{r}T_5 + \frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (1)$$

рівнянь вимушеної електростатики діелектриків

$$\frac{\partial D_1}{\partial r} + \frac{1}{r}D_1 + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0; \quad E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (2)$$

співвідношень Коші для випадку малих деформацій

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial r}; \quad S_2 = \frac{1}{r}u_1; \quad S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}; \quad S_5 = \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad (3)$$

матеріальних співвідношень для випадку осьової поляризації п'єзокерамічного матеріалу

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3; \\ T_2 &= c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3; \\ T_3 &= c_{13}S_1 + c_{13}S_2 + c_{33}S_3 - e_{33}E_3; \\ T_5 &= 2c_{55}S_5 - e_{15}E_1; \quad D_1 = 2e_{15}S_5 + \varepsilon_{11}E_1; \\ D_3 &= e_{13}S_1 + e_{13}S_2 + e_{33}S_3 + \varepsilon_{33}E_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $T_i$ ,  $S_i$ ,  $c_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензорів напружень, деформацій, пружних модулів при постійному електричному полі, п’єзомодулів та діелектричних проникностей при постійній деформації відповідно;  $u_i$ ,  $E_i$  та  $D_i$  – компоненти векторів переміщень, напруженості електричного поля та електричної індукції відповідно;  $\rho$  та  $\Phi$  – густина матеріалу та електро-статичний потенціал.

Вирішуючи систему (1) – (4) відносно компонент розв’язуючого вектора  $R = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}$ , отримуємо систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) T_1 - \frac{\partial T_5}{\partial z} + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_3}{\partial z}; \\ \frac{\partial T_5}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{r} T_5 + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_5}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1; \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 - \frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_3}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_3}{\partial r} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1; \\ \frac{\partial D_1}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_1}{c_{11} r} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_1, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\Delta = c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2$ ,  $\Delta_1 = e_{13}(c_{11} - c_{12})$ ,  $\Delta_2 = c_{11}^2 - c_{12}^2$ ,  $\Delta_3 = c_{13}(c_{11} - c_{12})$ ,  $\Delta_4 = c_{13}e_{13} - c_{11}e_{33}$ ,  $\Delta_5 = c_{13}^2 - c_{11}c_{33}$ ,  $\Delta_6 = c_{11}\varepsilon_{33} + e_{13}^2$ . Компоненти розв’язувального вектора представляються у вигляді хвиль, що поширюються вздовж поздовжньої координати

$$\{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{iT_1(r), T_5(r), \Phi(r), iu_1(r), u_3(r), D_1(r)\} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6)$$

З урахуванням (6) система (5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) T_1 + kT_5 - \frac{k\Delta_1}{rc_{11}} \Phi - \left( \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} + \rho\omega^2 \right) u_1 - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_3; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{1}{r} T_5 - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_1 + \left( \frac{k^2\Delta_5}{c_{11}} - \rho\omega^2 \right) u_3; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1; \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{ke_{13}}{c_{11}} \Phi - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 + \frac{kc_{13}}{c_{11}} u_3; \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - ku_1 + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1; \\ \frac{dD_1}{dr} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{k^2\Delta_6}{c_{11}} \Phi + \frac{k\Delta_1}{c_{11} r} u_1 - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} u_3 - \frac{D_1}{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для розв'язання крайової задачі (7) в інтервалі  $0 \leq r \leq R$  необхідно сформулювати граничні умови для сингулярної точки  $r = 0$ . Для цього використаємо процедуру, аналогічну тій, яка була використана у роботі [9]. Виходячи з фізичних міркувань, маємо такі умови:

$$T_5 \rightarrow 0, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad D_1 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (8)$$

При цьому в рівняннях (7) містяться невизначеності, для розкриття яких скористаємось правилом Лопітала—Бернуллі

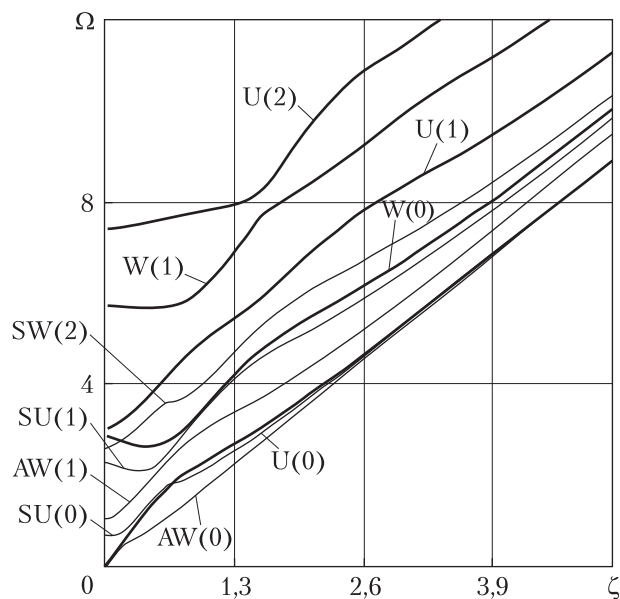
$$\frac{T_1}{r} \rightarrow \frac{dT_1}{dr}, \quad \frac{T_5}{r} \rightarrow \frac{dT_5}{dr}, \quad \frac{u_1}{r} \rightarrow \frac{du_1}{dr}, \quad \frac{D_1}{r} \rightarrow \frac{dD_1}{dr}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) рівняння (7) у точці  $r = 0$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \frac{dT_1}{dr} + kT_5 - \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + \rho\omega^2 u_1 - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} \frac{du_3}{dr}; \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{dT_5}{dr} - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_3}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} + \left( \frac{k^2\Delta_5}{c_{11}} + \rho\omega^2 \right) u_3; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1; \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{ke_{13}}{c_{11}} \Phi - \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} + \frac{kc_{13}}{c_{11}} u_3; \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - ku_1 + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1; \\ \frac{dD_1}{dr} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{k^2\Delta_6}{c_{11}} \Phi + \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} u_3 - \frac{dD_1}{dr}. \end{aligned} \quad (10)$$

Після ряду перетворень отримаємо систему рівнянь для точки  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial T_5}{\partial r} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11} + c_{12}} T_1 - \frac{k^2}{2} \left( e_{33} - \frac{2c_{12}c_{13}e_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} \right) \Phi - \left( \frac{k^2}{2} \left( c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}} \right) + \frac{\Omega^2}{2} \right) u_3; \\ \frac{d\Phi}{dr} &= 0; \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11} + c_{12}} [T_1 + k(e_{13}\Phi + c_{13}u_3)]; \\ \frac{du_3}{dr} &= 0; \\ \frac{\partial D_1}{\partial r} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} T_1 + \frac{k^2}{2c_{11}} \left( \Delta_6 - \frac{e_{13}\Delta_1}{c_{11} + c_{12}} \right) \Phi + \frac{k^2e_{13}}{2} \left( 1 - \frac{2c_{12}c_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} \right) u_3. \end{aligned} \quad (11)$$



**Рис. 1.** Порівняння характеру поведінки дисперсійних кривих для суцільного та порожнистого ( $\varepsilon = 0,5$ ) циліндрів із п'єзокераміки PZT 4

В результаті для області  $0 < r \leq R$  маємо систему рівнянь (7), а для точки  $r = 0$  — систему рівнянь (11). На зовнішній поверхні циліндра розглядатимемо такі граничні умови: зовнішня поверхня вільна від механічних навантажень  $T_1|_{r=R} = 0, T_5|_{r=R} = 0$  та вкрита тонким суцільним електродом. Тобто зовнішня поверхня — еквіпотенціальна  $\Phi|_{r=R} = C$ , де  $C = \text{const}$ . Для визначеності виберемо  $C = 0$ . Тобто на зовнішній поверхні циліндра маємо  $\Phi|_{r=R} = 0$ .

Введемо безрозмірні величини:

$$\Omega = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad \zeta = kR,$$

де  $R$  — радіус циліндра;  $\rho$  — густина матеріалу циліндру;  $\varepsilon_0$  — діелектрична проникність вакууму;  $\lambda = 10^{10}$ .

В результаті ми прийдемо до крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях вигляду:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{R},$$

де  $\mathbf{R} = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}$ .

Матриця  $\mathbf{A}$  для точки  $x = 0$  має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{c}_{13}\zeta}{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}} & 0 & -\frac{\zeta^2}{2} \left( \tilde{e}_{33} - \frac{2\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{13}\tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})} \right) & 0 & -\left( \frac{\zeta^2}{2} \left( \tilde{c}_{33} - \frac{2\tilde{c}_{13}^2\tilde{c}_{13}\tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})} \right) + \frac{\Omega}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}} & 0 & \frac{\zeta\tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}} & 0 & \frac{\zeta\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta\tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})} & 0 & \frac{\zeta^2}{2\tilde{c}_{11}} \left( \frac{\Delta_6 - \tilde{e}_{13}\Delta_5}{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}} \right) & 0 & \frac{\zeta^2\tilde{e}_{13}}{2} \left( 1 - \frac{2\tilde{c}_{12}\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а для точок  $x \in (0, 1]$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \left( \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right) & \zeta & -\frac{\zeta \Delta_1}{x \tilde{c}_{11}} & -\left( \frac{\Delta_2}{x^2 \tilde{c}_{11}} + \Omega^2 \right) & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{1}{x} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\zeta \Delta_3}{x \tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta^2 \Delta_5}{\tilde{c}_{11}} - \Omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta} \\ \frac{1}{\tilde{c}_{11}} & 0 & \frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\tilde{c}_{12}}{x \tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} & 0 & -\zeta & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \\ -\frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 & -\frac{\zeta^2 \Delta_6}{\tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta \Delta_1}{x \tilde{c}_{11}} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Граничні умови мають вигляд:

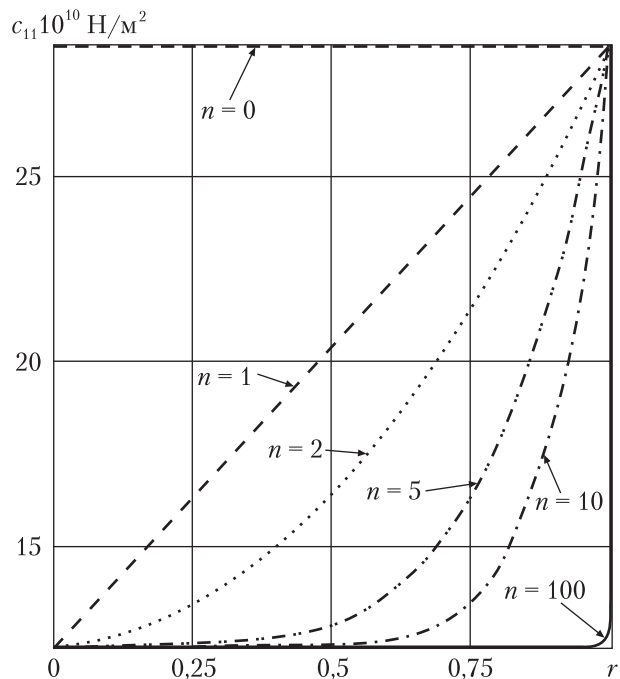
$$\mathbf{BR}(1) = 0, \quad (14)$$

матриця  $\mathbf{B}$  дорівнює:

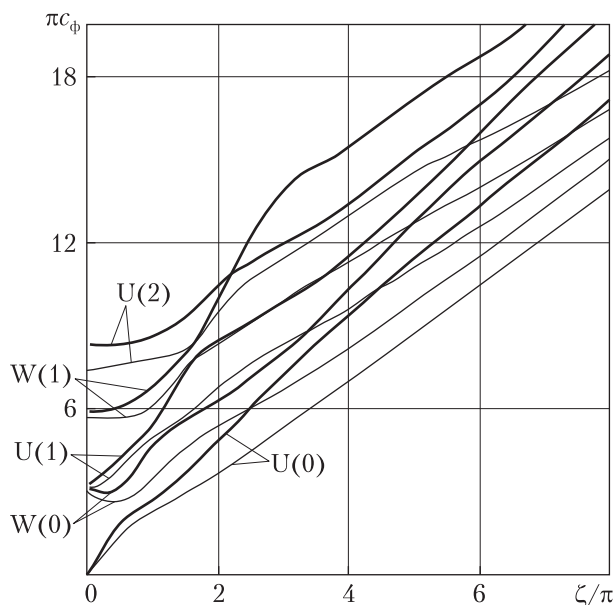
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримана крайова задача інтегрується стійким методом дискретної ортогоналізації [3, 7].

Проведемо чисельний аналіз крайової задачі на власні значення (12)–(14) для циліндра з п'єзокераміки PZT 4 з характеристиками  $c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2$ ;  $e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2$ ;  $e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2$ ;  $\epsilon_{11} = 730$ ;  $\epsilon_{33} = 635$ ;  $\rho_{\text{п}} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .



**Рис. 2.** Розподіл пружного модуля  $c_{11}$  по товщині циліндра залежно від об'ємної частки п'єзокераміки ( $n$ ) у ФГПМ



**Рис. 3.** Вплив неоднорідності матеріалу на характер поведінки дисперсійних кривих для циліндра з ФГПМ ( $N = 5$ )

Порівняємо дисперсійні криві для випадку поширення осесиметричних електропружних хвиль в однорідному, достатньо товстостінному ( $\epsilon = 0,5$ ) порожнистому циліндрі та суцільному циліндрі із п'єзокераміки PZT 4. На рис. 1 широкими лініями позначені гілки дисперсійних кривих суцільного циліндра, а вузькими лініями — порожнистого циліндра. Як видно з наведеного рисунка, основна перебудова гілок дисперсійних рівнянь в порівнянні з порожнистим циліндром відбувається для

перших двох гілок. Гілка  $U(0)$  йде спочатку по гілці  $AW(0)$ , а потім виходить на гілку  $SU(0)$ . Літери A та S, нагадаємо, вказують на антисиметричний та симетричний розподіли переміщень відносно серединної поверхні циліндра при  $\xi = 0$  [2, 6]. Перебудова перших двох гілок пов'язана з тим, що у порожнистому циліндрі дві перші гілки у короткохвильовій області виходять на хвилі «релеєвського типу» [2].

Розглянемо випадок, коли матеріалом циліндра є функціонально градієнтний п'єзоелектричний матеріал. А саме матеріал, який складається з двох компонент — сталі та п'єзокераміки. Тоді характеристики матеріалу змінюються по товщині циліндра наступним чином:

$$P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p, \quad (15)$$

де  $V(z)$  визначає об'ємну частку п'єзокераміки в загальному об'ємі ФГПМ та визначається за формулою:

$$V(r) = \left( \frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n. \quad (16)$$

Ця формула є загальною для фізико-хімічних характеристик матеріалу,  $P_p$ ,  $P_m$  — відповідні характеристики кераміки і металу. Показник об'ємної частки кераміки у формулі (16) може змінюватися в межах  $0 < n < 1000$ ; при значенні  $n = 0$  структура є повністю металевою, якщо ж  $n = \infty$ , то — п'єзокерамічною. Це показано на прикладі пружного модуля  $c_{11}$  (рис. 2).

На рис. 3 представлені результати чисельного аналізу крайової задачі (12), (15) для випадку, коли матеріалом циліндра являється ФГПМ ( $N = 5$ ). На рис. 3 широкими лініями зображені гілки дисперсійних рівнянь для циліндра з ФГПМ ( $N = 5$ ), вузькими — з п'єзокерамічного циліндра ( $N = 10000$ ). Як можна побачити з наведеного рисунка, наявність сталеві фази у матеріалі циліндра призвела до збільшення його жорсткості і, як наслідок, до більших значень частот. Цікавим фактом є також наявність дисперсії для першої гілки  $U(0)$  у випадку, коли матеріалом циліндра є ФГПМ.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Grigorenko A.Y., Loza I.A., Shul'ga N.A. Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder. *Soviet. Appl. Mech.* 1984. **20**, № 6. P. 517–521. <https://doi.org/10.1007/BF00890550>
2. Grigorenko, A.Y., Loza I.A. Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 4. P. 374–380. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0821-7>
3. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. General Theory and Applications of Classical Theory. 2016. Vol. I. Springer. P. 116.
4. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. Vol. IIA. Springer. 2016. P. 42.
5. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. Vol. IIB. Springer. 2016. P. 108.
6. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Loza I.A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. Springer. 2021. P. 227.
7. Grigorenko Ya. M. Grigorenko A. Ya., Rozhok L. S. Solving the Stress Problem for Solid Cylinders with Different End Conditions. *Int. Appl. Mech.* 2006. **42**, № 6. P. 629–635. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0130-z>
8. Loza I.A. Axisymmetric acoustoelectrical wave propagation in a hollow circularly polarized cylindrical waveguide. *Soviet. Appl. Mech.* 1984. **20**, № 12. P. 1103–1106. <https://doi.org/10.1007/BF00888958>
9. Loza I.A. Propagation of nonaxisymmetric waves in hollow piezoceramic cylinder with radial polarization. *Soviet. Appl. Mech.* 1985. **21**, № 1. P. 22–27. <https://doi.org/10.1007/BF00887877>
10. Loza I.A., Medvedev K.V., Shul'ga N.A. Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in layered cylinders. *Soviet. Appl. Mech.* 1987. **23**, № 8. P. 703–706. <https://doi.org/10.1007/BF00886654>
11. Mirsky I. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders. Part 1: Theory. *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. **37**, No. 6. P. 2106–2122. <https://doi.org/10.1121/1.1909508>
12. Paul H.S. Vibrations of Circular Cylindrical Shells of Piezoelectric Silver Iodide Crystals. *J. Acoust. Soc. Am.* 1966. **40**, P. 1077–1080. <https://doi.org/10.1121/1.1910191>
13. Paul H.S. Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric  $\beta$ -quartz. *Arch. Mech. Stosow.* 2010. **14**, P. 127.
14. Puzyrev V. Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. *Int. J. Solids Struct.* 2010. **47**, P. 2115–2122. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.04.011>
15. Shatalov M., Every A., Yenwong-Fai A. Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material. *Int. J. Solids Struct.* 2009. **46**. P. 837–850. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.09.022>

Надійшло до редакції 05.12.2021

REFERENCES

1. Grigorenko, A. Y., Loza, I. A. & Shul'ga, N. A. (1984). Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder. *Soviet. Appl. Mech.*, 20, No. 6, pp. 517-521. <https://doi.org/10.1007/BF00890550>
2. Grigorenko, A. Y. & Loza, I. A. (2017). Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 4, pp. 374-380. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0821-7>
3. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M. & Vlaiikov, G. G. (2016). Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. General theory and applications of classical theory. Vol. I, Springer. P. 116.
4. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M. & Vlaiikov, G. G. (2016). Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. Vol. IIA. Springer. P. 42.
5. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H., Grigorenko, Ya. M. & Vlaiikov, G. G. (2016). Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. Vol. IIB. Springer. P. 108.
6. Grigorenko, A. Ya., Müller, W. H. & Loza, I. A. (2021). Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. Springer. P. 227.
7. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya. & Rozhok, L. S. (2006). Solving the Stress Problem for Solid Cylinders with Different End Conditions. *Int. Appl. Mech.*, 42, No. 6, pp. 629-635. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0130-z>



8. Loza, I. A. (1984). Axisymmetric acoustoelectrical wave propagation in a hollow circularly polarized cylindrical waveguide. *Soviet. Appl. Mech.*, 20, No. 12, pp. 1103-1106. <https://doi.org/10.1007/BF00888958>
9. Loza, I. A. (1985). Propagation of nonaxisymmetric waves in hollow piezoceramic cylinder with radial polarization. *Soviet. Appl. Mech.*, 21, No. 1, pp. 22-27. <https://doi.org/10.1007/BF00887877>
10. Loza, I. A., Medvedev, K. V. & Shul'ga, N. A. (1987). Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in layered cylinders. *Soviet. Appl. Mech.*, 23, No. 8, pp. 703-706. <https://doi.org/10.1007/BF00886654>
11. Mirsky, I. (1965). Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders. Part 1: Theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37, No. 6, pp. 2106-2122. <https://doi.org/10.1121/1.1909508>
12. Paul, H. S. (1966). Vibrations of Circular Cylindrical Shells of Piezoelectric Silver Iodide Crystals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 40, pp. 1077-1080. <https://doi.org/10.1121/1.1910191>
13. Paul, H. S. (2010). Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric  $\beta$ -quartz. *Arch. Mech. Stosow.* 14. P. 127.
14. Puzyrev, V. (2010). Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. *Int. J. Solids Struct.*, 47, pp. 2115-2122. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.04.011>
15. Shatalov, M., Every, A. & Yenwong-Fai, A. (2009). Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material. *Int. J. Solids Struct.*, 46, pp. 837-850. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.09.022>

Received 05.12.2021

A.Ya. Grigorenko<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

I.A. Loza<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-2678-6908>

S.O. Sperkach<sup>3</sup>, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

A.D. Bezugla<sup>3</sup>, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

<sup>1</sup> S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

<sup>2</sup> National Transport University, Kyiv

<sup>3</sup> Technical center of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, lozaigor1956@gmail.com, svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

#### NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF ELECTROELASTICITY WAVES IN A SOLID PIEZOCERAMIC CYLINDER

The study of the propagation of free axisymmetric waves in a solid piezoelectric cylinder with axial polarization is carried out on the basis of linear elasticity theory and linear electromechanical coupling. The cylinder lateral surface are free of loads and are covered by thin electrodes, to which the alternating potential is applied. The governing system of differential equations in partial derivatives with variable coefficients is obtained. The three-dimensional problem of the theory of electroelasticity in partial derivatives (by presenting components of the elasticity tensor, component of displacement vectors, electrical induction and electrostatic potential by traveling waves in the axial direction) is reduced to the boundary value problems for the system of the ordinary differential equations. The resulting problem is solved by a stable method of discrete orthogonalization with the method of step-by-step search. The proposed approach allows to investigate the nature of propagation of electric-elastic traveling waves for the case of continuously nonhomogeneous material. The spectral characteristics and a comparative analysis of traveling waves for homogeneous and nonhomogeneous materials of a solid piezoelectric cylinder are presented.

**Keywords:** *axisymmetric wave propagation, piezoelectric solid cylinder, numerical method, nonhomogeneous material, dispersion curves.*